

Е. М. Ганапольский, Ю. В. Тарасов, Л. Д. Шостенко

ДЕФАЗИРОВКА СОБСТВЕННЫХ МОД КВАЗИОПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА СО СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

*Институт радиофизики электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: yutarasov@ire.kharkov.ua*

Впервые рассчитан спектр квазиоптического цилиндрического резонатора со случайно-неоднородной боковой поверхностью. Для решения этой задачи разработан новый метод разделения переменных в волновом уравнении, основанный на операторных процедурах. Влияние случайных неоднородностей на спектр резонатора описывается с помощью одного универсального градиентного параметра Ξ , учитывающего степень «остроты» неоднородностей поверхности. Показано, что смещение и уширение спектральных линий за счет дефазировки, связанной с рассеянием резонаторных мод на неоднородностях, пропорционально диссипативному уширению. Выполнен численный эксперимент, который показал, что без учета диссипативных потерь спектр случайно-шероховатого цилиндрического резонатора является регулярным, независимо от уровня неоднородности его границ, но обладает существенно разными статистическими свойствами при малых и больших значениях параметра Ξ . Ил. 4. Библиогр.: 15 назв.

Ключевые слова: цилиндрический резонатор, случайно-неоднородная боковая поверхность, спектр резонатора, метод разделения переменных, дефазировка мод, уширение резонансных линий.

Создание микролазеров, которые по основным характеристикам существенно превосходят лазеры, распространенные в настоящее время, является одним из наиболее важных достижений в области лазерной физики и техники. Ключевым параметром микролазера является сверхвысокая добротность его дискового резонатора, достигающая величин порядка 10^8 . Такая добротность обеспечивает очень низкие пороговые токи возбуждения микролазера и исключительно высокую монохроматичность его излучения. Сверхвысокая добротность лазерного резонатора обусловлена не только применением в нем колебаний шепчущей галереи, но, главным образом, предельно низкими в оптическом диапазоне частот диэлектрическими потерями в материале резонатора, в качестве которого обычно используется легированный кремний. Кроме диэлектрических потерь в материале резонатора, на величину добротности большое влияние оказывают случайные неоднородности, расположенные на его поверхности. Эти неоднородности вызывают смещение и уширение резонансных линий и, следовательно, негативно сказываются на спектральных свойствах резонатора, а значит и на качестве микролазерного излучения. По этой причине изучение физических механизмов влияния случайных неоднородностей на спектр лазерного резонатора представляется важной задачей, от решения которой в определенной степени зависит развитие лазерной физики и техники.

В настоящей работе объектом исследования является модель твердотельного лазерного микрорезонатора в виде квазиоптического электромагнитного резонатора цилиндрической формы со случайными неоднородностями на его боковой границе. Такой резонатор существенно отличается от резонатора с неоднородным объемным заполнением, который ранее исследовался в нашей работе [1]. Резонаторы со случайно-неоднород-

ной боковой поверхностью, подобные бильярдам, получившим название бильярды Шепелянского, уже изучались в работах [2–5] для выяснения возможности наблюдения в них эффектов динамической локализации и квантовой эргодичности. В работах [6, 7] также рассматривались резонаторные системы со случайно-шероховатыми стенками – твердотельные квантовые точки. Авторы этих работ анализировали спектр носителей тока в резонансных системах со случайно-шероховатыми стенками с помощью баллистической σ -модели. Целью этих исследований было описание не только универсальных, но и специфических для квантовых точек резонансных свойств. Однако рассеяние носителей тока на неоднородностях поверхности квантовой точки учитывалось в работах [6, 7], по сути, феноменологическим способом – с использованием концепции коэффициента зеркальности [8]. Это не позволило авторам указанных работ учесть дифракционные эффекты, возникающие при рассеянии квантовых волн, и, как следствие, провести достаточно глубокий анализ спектральных свойств резонансных систем, в которых рассеяние на границах играет определяющую роль.

Целью настоящей работы является выяснение роли случайных неоднородностей боковой поверхности квазиоптического цилиндрического резонатора в формировании его спектра и добротности спектральных линий. Для расчета спектра такого с традиционной точки зрения неинтегрируемого резонатора использован новый метод, предложенный нами в работе [1], который дает возможность производить расчеты, не накладывая серьезных ограничений не только на амплитуду случайных шероховатостей, но и на их остроту. Достоинством этого метода является также то, что он не предполагает наличия в изучаемой системе каких-либо пространственных симметрий, благодаря чему удалось с его помо-

шью получить аналитические выражения для спектра квазиоптического цилиндрического резонатора со случайно-шероховатой боковой поверхностью, подходящие для последующего анализа с применением численных методов.

1. Расчет спектра случайно-шероховатого резонатора. Метод расчета спектра основан на разделении переменных в волновом уравнении с использованием операторных процедур. Его реализация предполагает проведение двух этапов. На первом из них задача о колебаниях в цилиндрическом резонаторе с произвольно-неоднородными боковыми границами при помощи процедуры конформного «сглаживания» боковых границ сводится к задаче о колебаниях в резонаторе, имеющем идеально гладкие стенки, но эффективно неоднородное объемное заполнение. Таким способом удастся ввести полный набор эффективных резонаторных мод, который в дальнейшем, на втором этапе реализации метода, служит хорошим нулевым приближением при использовании теории возмущений.

Рассмотрим цилиндрический резонатор с радиусом поперечного сечения R и случайно-шероховатой боковой поверхностью (рис. 1), отклонение которой от идеальной круговой цилиндрической формы описывается случайной функцией $\xi(\varphi)$. Среднюю высоту шероховатостей будем считать относительно малой $\sigma \ll R$, а сами случайные шероховатости распределенными по гауссовскому закону. На статистическом языке такие шероховатости задаются средним значением функции шероховатости $\langle \xi(\varphi) \rangle$, которое примем равным нулю $\langle \xi(\varphi) \rangle = 0$, и бинарной корреляционной функцией $\langle \xi(\varphi)\xi(\varphi') \rangle = \sigma^2 W(\varphi - \varphi')$, где φ – азимутальный угол, $W(\varphi)$ – функция с единичным максимумом в точке $\varphi = 0$, убывающая до параметрически малых значений на угловом масштабе $|\Delta\varphi| = \varphi_c = s_c/R$, здесь s_c – дуговая длина корреляции, которую будем считать относительно малой, $s_c \ll R$. Это неравенство, несмотря на ограниченность рассматриваемой системы, позволяет с параметрической точностью

считать выполненными условия, необходимые для самоусредняемости спектра.

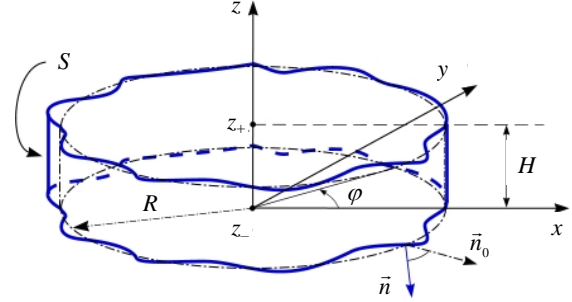


Рис. 1. Геометрия цилиндрического резонатора со случайно-шероховатой боковой поверхностью. Векторы \vec{n} и \vec{n}_0 направлены по внешней нормали к боковой поверхности случайно-неоднородного и идеального цилиндрического резонатора соответственно

Уравнение Гельмгольца для поля в резонаторе решалось с помощью функции Грина, определенной в его внутренней области. В качестве граничных условий для этой функции использовались условия Дирихле на боковой поверхности и Неймана на торцевой. Эти условия соответствуют возбуждению в резонаторе колебаний TE -типа.

Для того чтобы разделить переменные в волновом уравнении, следуя методу, примененному ранее [1], с помощью конформного преобразования координат произведем сглаживание случайно-неоднородной боковой поверхности резонатора до идеально гладкой. Таким путем мы сводим задачу рассеяния волн на этой поверхности к задаче их рассеяния на флуктуациях эффективной диэлектрической проницаемости среды, заполняющей внутренний объем фиктивного резонатора идеальной цилиндрической формы. Координаты пространственной точки в исходной цилиндрической системе при этом будут связаны с новыми координатами, отмеченными знаком «тильда», конформным преобразованием

$$\tilde{r} = r/(1 + \xi(\varphi)/R), \quad \tilde{\varphi} = \varphi, \quad \tilde{z} = z, \quad (1)$$

якобиан которого равен $1/[1 + \xi(\varphi)/R]$. В новых координатах уравнение для функции Грина имеет вид

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K^2 - \hat{V}^{(h)} - \hat{V}^{(s)} \right) G(r, \varphi, z; r', \varphi', z) = \frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z'), \quad (2)$$

отличающийся от исходного уравнения Гельмгольца появлением дополнительных операторных слагаемых в волновом операторе $\hat{V}^{(h)}$ и $\hat{V}^{(s)}$, которые в дальнейшем мы будем именовать эффективными потенциалами. В координатном

представлении эти потенциалы являются дифференциальными операторами следующего вида:

$$\hat{V}^{(h)} = - \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) [\beta^2(\varphi) - 1], \quad (3a)$$

$$\hat{V}^{(s)} = \left[\frac{\xi'(\varphi)}{R\beta(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\xi'(\varphi)}{R\beta(\varphi)} \right] \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} - \left[\frac{\xi'(\varphi)}{R\beta(\varphi)} \right]^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}. \quad (3б)$$

В (2) и (3) использованы обозначения:

$$K^2 = k^2 - i/\tau_{dis}; \quad k = \omega/c, \quad (4)$$

здесь i/τ_{dis} – частота диссипации, которую мы вводим феноменологически. Параметр $\beta(\varphi)$ введен для сокращения записи формул и равен

$$\beta(\varphi) = 1 + \xi(\varphi)/R. \quad (5)$$

$$\left[(1 + \Xi^2) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K^2 - \hat{V}^{(h)} - \hat{V}^{(s1)} - \hat{V}^{(s2)} \right] G(r, \varphi, z; r', \varphi', z') = \frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z'). \quad (6)$$

В уравнении (6) вместо первоначального потенциала $\hat{V}^{(s)}$ введены два новых градиентных потенциала, конфигурационные средние которых равны нулю:

$$\hat{V}^{(s1)} = \frac{1}{R} \left[\xi'(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \xi'(\varphi) \right] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (7a)$$

$$\hat{V}^{(s2)} = - \left[\xi'^2(\varphi)/R^2 - \Xi^2 \right] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}. \quad (7б)$$

Перейдем в уравнении (6) к представлению Фурье, используя для этого базисную систему функций фигурирующего в этом уравнении дифференциального оператора. Нормированные собственные функции этого оператора имеют вид

$$|\vec{r}; \vec{\mu}\rangle = |\varphi; n\rangle |r; l\rangle^{(\tilde{n})} |z; q\rangle \quad (\tilde{n} = n/\sqrt{1 + \Xi^2}), \quad (8a)$$

$$|\varphi; n\rangle = (2\pi)^{-1/2} e^{in\varphi} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (8б)$$

$$|r; l\rangle^{(\tilde{n})} = B_l^{(\tilde{n})} \frac{\sqrt{2}}{R} J_{|\tilde{n}|}(\gamma_l^{(\tilde{n})} r/R) \quad (l = 1, 2, \dots), \quad (8в)$$

$$|z; q\rangle = \sqrt{\frac{2}{H}} \sin \left[\left(\frac{z}{H} + \frac{1}{2} \right) \pi q \right] \quad (q = 1, 2, \dots). \quad (8г)$$

Здесь $\gamma_l^{(\tilde{n})}$ – положительные нули функции $J_{|\tilde{n}|}'(t)$, пронумерованные индексом l в порядке их возрастания, H – высота резонатора в направлении оси z . Нормировочная константа в «радиальной» собственной функции (8в) равна

$$B_l^{(\tilde{n})} = \gamma_l^{(\tilde{n})} \left[(\gamma_l^{(\tilde{n})})^2 - \tilde{n}^2 \right]^{-1/2} \left[J_{|\tilde{n}|}(\gamma_l^{(\tilde{n})}) \right]^{-1}.$$

В представлении собственных мод (8) уравнение (6) принимает вид системы связанных неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно компонент Фурье функции Грина

Существенно, что функциональная структура эффективных потенциалов (3) определяется не только самой функцией $\xi(\varphi)$, но и ее производной, $\xi'(\varphi)$, которая характеризует степень гладкости шероховатостей на границе резонатора.

2. Градиентная перенормировка и разделение колебательных мод. Введем градиентный параметр $\Xi^2 = \langle |\xi'(\varphi)|^2 \rangle / R^2 \sim (\sigma/s_c)^2$, характеризующий степень остроты неоднородностей боковой поверхности резонатора. Тогда уравнение (2) можно записать в виде (знаки «тильда» здесь и далее опускаем)

$$(K^2 - \kappa_{\vec{\mu}}^2 - \mathcal{V}_{\vec{\mu}}) G_{\vec{\mu}\vec{\mu}'} - \sum_{\vec{v} \neq \vec{\mu}} \mathcal{U}_{\vec{\mu}\vec{v}} G_{\vec{v}\vec{v}'} = \delta_{\vec{\mu}\vec{\mu}'}, \quad (9)$$

где $G_{\vec{\mu}\vec{\mu}'} = \int_{\Omega} d\vec{r} d\vec{r}' \langle \vec{r}, \vec{\mu} | G(\vec{r}, \vec{r}') | \vec{r}', \vec{\mu}' \rangle$ – функция

Грина в импульсном представлении; Ω – область пространства, занимаемая резонатором с невозмущенной неоднородностями границей. Величину $\kappa_{\vec{\mu}}^2$, которая является собственным значением градиентно-перенормированного лапласиана в уравнении (6), мы будем далее называть «невозмущенной» энергией моды $\vec{\mu}$:

$$\kappa_{\vec{\mu}}^2 = (1 + \Xi^2) \left(\frac{\gamma_l^{(\tilde{n})}}{R} \right)^2 + \left(\frac{\pi q}{H} \right)^2. \quad (10)$$

Матрица $\|\mathcal{U}_{\vec{\mu}\vec{v}}\|$ коэффициентов в уравнении (9) состоит из матричных элементов суммарного потенциала возмущения, содержащего высотный h и оба градиентных s слагаемые

$$\mathcal{U}_{\vec{\mu}\vec{v}} = \int_{\Omega} d\vec{r} \langle \vec{r}; \vec{\mu} | \hat{V}^{(pert)}(\vec{r}) | \vec{r}; \vec{v} \rangle, \quad (11)$$

где $\hat{V}^{(pert)}(\vec{r}) = \hat{V}^{(h)} + \hat{V}^{(s1)} + \hat{V}^{(s2)}$.

Диагональный элемент этой матрицы $\mathcal{U}_{\vec{\mu}\vec{\mu}} \equiv \mathcal{V}_{\vec{\mu}}$ намеренно выделен из общей суммы в (9). Рассеяние, связанное с этим элементом, мы будем именовать внутримодовым, или когерентным рассеянием, а сам элемент $\mathcal{V}_{\vec{\mu}}$ – внутримодовым потенциалом. Элементы матрицы $\|\mathcal{U}_{\vec{\mu}\vec{v}}\|$ с $\vec{\mu} \neq \vec{v}$ описывают некогерентное межмодовое рассеяние и будут в дальнейшем именоваться межмодовыми потенциалами. В работах [1, 10] показано, что

разделение потенциалов на внутримодовые и межмодовые дает возможность математически корректно получить систему замкнутых уравнений для диагональных компонент гриновской матрицы $\|G_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\|$. Это существенно облегчает анализ спектральных свойств резонатора, находящегося под воздействием внешних потенциалов.

Система уравнений (9), эквивалентная уравнению (6), является сепарабельной. Она допускает своеобразное «разделение переменных» с использованием операторной процедуры, детали которой описаны в [1]. Ключевым моментом указанной процедуры является введение для каждой гармоники (с фиксированным индексом $\bar{\nu}$) «затравочного» внутримодового пропагатора $G_{\bar{\nu}}^{(V)}$, представляющего собой модовую функцию Грина, рассчитанную без учета рассеяния на межмодовых потенциалах $G_{\bar{\nu}}^{(V)} = [K^2 - \kappa_{\bar{\nu}}^2 - \mathcal{V}_{\bar{\nu}}]^{-1}$. С помощью этой функции все межмодовые пропагаторы $G_{\bar{\nu}\bar{\mu}}$ с $\bar{\nu} \neq \bar{\mu}$ выражаются через один внутримодовый диагональный пропагатор $G_{\bar{\mu}\bar{\mu}}$ посредством операторного равенства:

$$G_{\bar{\nu}\bar{\mu}} = \mathbf{P}_{\bar{\nu}} (\hat{1} - \hat{R})^{-1} \hat{R} \mathbf{P}_{\bar{\mu}} G_{\bar{\mu}\bar{\mu}}, \quad (12)$$

где \hat{R} – «перемешивающий» оператор, определенный на модовом подпространстве $\bar{M}_{\bar{\mu}}$, содержащем весь набор модовых индексов за исключением индекса $\bar{\mu}$; $\mathbf{P}_{\bar{\mu}}$ – проектирующий оператор, действие которого состоит в присвоении фиксированного значения $\bar{\mu}$ ближайшему модовому индексу любого рядом стоящего оператора (безразлично, справа или слева). Оператор \hat{R} представляется в виде произведения $\hat{R} = \hat{G}^{(V)} \hat{U}$, где $\hat{G}^{(V)}$ и \hat{U} – операторы, заданные на подпространстве $\bar{M}_{\bar{\mu}}$ матричными элементами

$$\langle \bar{\nu} | \hat{G}^{(V)} | \bar{\nu}' \rangle = G_{\bar{\nu}}^{(V)} \delta_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}, \quad \langle \bar{\nu} | \hat{U} | \bar{\nu}' \rangle = U_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}. \quad (13)$$

Полагая в уравнении (9) $\bar{\mu} = \bar{\mu}'$ и подставляя в него все межмодовые пропагаторы в виде (12), получим следующее выражение для диагонального пропагатора $G_{\bar{\mu}\bar{\mu}}$

$$G_{\bar{\mu}\bar{\mu}} = [K^2 - \kappa_{\bar{\mu}}^2 - \mathcal{V}_{\bar{\mu}} - \mathcal{T}_{\bar{\mu}}]^{-1}. \quad (14)$$

Здесь

$$\mathcal{T}_{\bar{\mu}} = \mathbf{P}_{\bar{\mu}} \hat{U} (\hat{1} - \hat{R})^{-1} \hat{R} \mathbf{P}_{\bar{\mu}} - \quad (15)$$

часть собственной энергии $\bar{\mu}$ -й моды, которая связана только с межмодовым, дефазирующим рассеянием. С учетом связи (12) задача нахождения спектра резонатора, таким образом, сведена

нами к нахождению полюсов только диагональных элементов (14) матрицы $\|G_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\|$.

Поскольку неоднородности на боковой поверхности резонатора имеют случайный характер, спектр резонатора можно рассчитать, выполнив конфигурационное усреднение модовых функций Грина. Суммарный случайный потенциал в уравнении (6) и, соответственно, его матричные элементы, определяющие внутри- и межмодовые потенциалы, зависят от статистических свойств функции шероховатости $\xi(\varphi)$. Характеризовать внутримодовое рассеяние как сильное или слабое можно, сравнив норму потенциала $\mathcal{V}_{\bar{\mu}}$, рассчитанную на невозмущенных собственных функциях (8), с полной энергией моды (10).

Если говорить о межмодовом рассеянии, то связанные с ним поправки к невозмущенному спектру определяются потенциалом $\mathcal{T}_{\bar{\mu}}$, среднее значение которого, в отличие от потенциала $\mathcal{V}_{\bar{\mu}}$, не равно нулю. Интенсивность межмодового рассеяния определяется величиной нормы оператора \hat{R} , осуществляющего перепутывание резонаторных мод. Как видно из формулы (10), «невозмущенная» энергия каждой моды уже содержит в себе параметр остроты неоднородностей Ξ^2 . Это означает, что каждая мода шероховатого резонатора в действительности представляет собой пакет из мод резонатора с невозмущенной границей. Учитывая вышесказанное, в дальнейшем моды с энергией (10) будем называть невозмущенными композитными модами.

Можно показать, что в рамках сделанных нами предположений внутримодовое рассеяние композитных мод отсутствует, поэтому влияние рассеяния на спектр резонатора определяется только межмодовым рассеянием, которое описывается перепутывающим оператором \hat{R} , фигурирующем в T -потенциале (15). Величина средней нормы этого оператора по сравнению с единицей позволяет судить, является это рассеяние слабым или же сильным.

Для оценки нормы оператора перемешивания воспользуемся формулой

$$\langle \|\hat{R}\|^2 \rangle = \max_{\bar{\mu}} \langle \left| \sum_{\bar{\nu}} G_{\bar{\nu}}^{(V)} U_{\bar{\nu}\bar{\mu}} \right|^2 \rangle. \quad (16)$$

В силу неравенства $\sigma \ll R$ потенциалы $U_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(h)}$ и $U_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(s2)}$ приводят к слабому рассеянию между модами. В то же время квадрат нормы той части оператора \hat{R} , которая связана с потенциалом $U_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(s1)}$, по порядку величины равен Ξ^2 . Ясно, что рассеяние на этом потенциале может быть как слабым, так и сильным, в зависимости от того, плавными

или острыми являются случайные неоднородности на поверхности резонатора.

Рассмотрим вначале случай слабого рассеяния. Условием слабости межмодового рассеяния, т. е. малости нормы перемешивающего оператора \hat{R} , является одновременное выполнение двух неравенств, $\sigma/R \ll 1$ и $\sigma/s_c \ll 1$. В этом случае обратный оператор в потенциале (15) можно разложить в степенной ряд по оператору \hat{R} и использовать для указанного потенциала приближенное выражение

$$T_{\bar{\mu}} \approx \mathbf{P}_{\bar{\mu}} \hat{\mathcal{U}} \hat{\mathcal{G}}^{(V)} \hat{\mathcal{U}} \mathbf{P}_{\bar{\mu}} = \sum_{\bar{\nu} \neq \bar{\mu}} \mathcal{U}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} G_{\bar{\nu}}^{(V)} \mathcal{U}_{\bar{\nu}\bar{\mu}}. \quad (17)$$

Коррелятор межмодовых потенциалов, возникающий при усреднении потенциала (17), вычисляется асимптотически и равен

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{U}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \mathcal{U}_{\bar{\nu}\bar{\mu}} \rangle &\approx -\delta_{q_{\bar{\nu}} q_{\bar{\mu}}} \left(\frac{\sigma}{R} \right)^2 \times \\ &\times \tilde{W}(n_{\bar{\mu}} - n_{\bar{\nu}}) (n_{\bar{\mu}}^2 - n_{\bar{\nu}}^2)^2 D_{\bar{\mu}\bar{\nu}} D_{\bar{\nu}\bar{\mu}}. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} A_{\bar{\mu}\bar{\nu}} &= -\delta_{q_{\bar{\nu}} q_{\bar{\mu}}} 4 \left(\frac{\sigma}{R} \right)^2 \tilde{W}(n_{\bar{\mu}} - n_{\bar{\nu}}) \frac{(n_{\bar{\mu}}^2 - n_{\bar{\nu}}^2)^2}{(\kappa_{\bar{\mu}} R)^4} [B_{l_{\bar{\mu}}}^{(\bar{n}_{\bar{\mu}})}]^2 [B_{l_{\bar{\nu}}}^{(\bar{n}_{\bar{\nu}})}]^2 \times \\ &\times \int_0^1 dt J_{|\bar{n}_{\bar{\mu}}|}(\gamma_{l_{\bar{\mu}}}^{(|\bar{n}_{\bar{\mu}}|t})} \frac{\partial}{\partial t} J_{|\bar{n}_{\bar{\nu}}|}(\gamma_{l_{\bar{\nu}}}^{(|\bar{n}_{\bar{\nu}}|t})} \int_0^1 dt' J_{|\bar{n}_{\bar{\nu}}|}(\gamma_{l_{\bar{\nu}}}^{(|\bar{n}_{\bar{\nu}}|t')}) \frac{\partial}{\partial t'} J_{|\bar{n}_{\bar{\mu}}|}(\gamma_{l_{\bar{\mu}}}^{(|\bar{n}_{\bar{\mu}}|t')}). \end{aligned} \quad (21)$$

Сходимость сумм по азимутальным модовым числам в выражениях (20) для $\Delta\kappa_{\bar{\mu}}^2$ и $1/\tau_{\bar{\mu}}$ обеспечивается корреляционной функцией $\tilde{W}(n)$. Это позволяет оценить частоту дефазировки, связанной с рассеянием на случайных неоднородностях границ резонатора: $1/\tau_{\bar{\mu}} \sim (1/\tau_{dis}) \Xi^2 (n_{\bar{\mu}} + \varphi_c^{-1})^2$. Добротность каждой из резонансных линий определяется суммой двух частот – диссипации $1/\tau_{dis}$ и дефазировки (20б). Из-за того, что знак последней однозначно не определен, наличие на боковой поверхности резонатора случайных неоднородностей может привести к тому, что конкретная резонансная линия либо практически сохраняет свою добротность, если параметр $\Xi^2 (n_{\bar{\mu}} + \varphi_c^{-1}) \leq 1$, либо в значительной степени теряет ее, если это неравенство изменяется на противоположное.

Несмотря на существенное межмодовое рассеяние, спектр слабошероховатого резонатора при отсутствии диссипации является регулярным и строго дискретным, что полностью соответствует общепринятым представлениям о спектре баллистических консервативных резонаторных систем [12, 13]. Принимая во внимание сложную

Здесь $D_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ – матричные элементы оператора $(1/r)(\partial/\partial r)$, взятые между собственными функциями (8в):

$$D_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \int_0^R dr \langle r; l_{\bar{\mu}} | \frac{\partial}{\partial r} | r; l_{\bar{\nu}} \rangle. \quad (19)$$

3. Поправки к спектру. Дефазировка резонаторных мод. Представляя средний массовый оператор моды $\bar{\mu}$ в виде суммы реальной и мнимой частей $\langle T_{\bar{\mu}} \rangle = \Delta\kappa_{\bar{\mu}}^2 + i/\tau_{\bar{\mu}}$, получим выражения для вещественной и мнимой поправок к энергии моды, определяющих смещение и уширение каждой из резонансных линий

$$\Delta\kappa_{\bar{\mu}}^2 = \kappa_{\bar{\mu}}^4 \sum_{\bar{\nu} \neq \bar{\mu}} A_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \frac{\kappa_{\bar{\mu}}^2 - \kappa_{\bar{\nu}}^2}{(\kappa_{\bar{\mu}}^2 - \kappa_{\bar{\nu}}^2) + (1/\tau_{dis})^2}, \quad (20a)$$

$$\frac{1}{\tau_{\bar{\mu}}} = \kappa_{\bar{\mu}}^4 \sum_{\bar{\nu} \neq \bar{\mu}} A_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \frac{1/\tau_{dis}}{(\kappa_{\bar{\mu}}^2 - \kappa_{\bar{\nu}}^2) + (1/\tau_{dis})^2}. \quad (20б)$$

Весовой фактор $A_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ в формулах (20а, б) имеет вид

форму границ резонатора, уравнения для полей, оказываются сепарабельными, такой резонатор можно рассматривать как интегрируемую квантовую систему, при этом учитывая, что ее классический аналог (бильярд Шепелянского) интегрируемым не является.

Перейдем теперь к рассмотрению случая сильного межмодового рассеяния, который соответствует неравенству $\Xi^2 \sim (\sigma/s_c)^2 \gg 1$. Поверхностные неоднородности, удовлетворяющие этому неравенству, мы будем называть «острыми». Выражение, стоящее между проекторами $\mathbf{P}_{\bar{\mu}}$ в потенциале (15), в этом случае можно разложить в ряд по обратному оператору перемешивания \hat{R}^{-1} , после чего функция $G_{\bar{\mu}\bar{\mu}}$ принимает вид

$$\begin{aligned} G_{\bar{\mu}\bar{\mu}} &\approx \frac{G_{\bar{\mu}}^{(V)}}{2} \left[1 + \frac{1}{2} (\hat{R}^{-1})_{\bar{\mu}\bar{\mu}} \right]^{-1} = \\ &= \frac{G_{\bar{\mu}}^{(V)}}{2} \left[1 + \frac{1}{2} G_{\bar{\mu}}^{(V)-1} (\hat{\mathcal{U}}^{-1})_{\bar{\mu}\bar{\mu}} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Второе слагаемое в квадратных скобках здесь представляет собой малую (по параметру $\|\hat{R}\|^{-1} \ll 1$) поправку к первому, причем тем мень-

шую, чем меньше частота возбуждения ω отличается от резонансной частоты $\bar{\mu}$ -й моды.

Из формулы (22) следует, что сильное межмодовое рассеяние на случайных неоднородностях границ резонатора не меняет радикально аналитического выражения для его спектральной энергии по сравнению со случаем, когда это рассеяние является слабым. В обоих предельных случаях резонансные частоты с параметрической точностью определяются полюсами затравочной функции Грина $G_{\bar{\mu}}^{(V)}$, т. е. равенством $k \approx \kappa_{\bar{\mu}}$. Это означает, что спектр резонатора при неограниченном возрастании остроты шероховатостей $\Xi \rightarrow \infty$ постепенно возвращается к своему первоначальному невозмущенному виду, определяемому выражением (10). Ширину резонансной линии при этом вновь можно определить только процессами диссипации. Уменьшение вклада дефазировки в уширение линий можно объяснить интерференцией рассеянных резонаторных мод, роль которых понижается при сложении большого числа когерентных состояний с разными модовыми энергиями.

4. Численный эксперимент. С целью интерпретации теоретических результатов, полученных в предыдущем разделе, мы провели числен-

ный эксперимент по расчету распределения межчастотных (МЧ) интервалов в спектре случайно-шероховатого резонатора. Расчеты производились по формулам (20) и (22) для случаев неоднородностей малой остроты ($\Xi \ll 1$) и очень острых неоднородностей ($\Xi \gg 1$) соответственно. Из полученных нами формул следует, что в идеализированном, свободном от диссипации резонаторе ширина резонансных линий должна быть нулевой независимо от уровня рассеяния колебательных мод за счет поверхностных неоднородностей. Однако само наличие такого рассеяния, даже если оно является слабым, ведет к существенному перераспределению резонансных частот на частотной шкале по сравнению со случаем, когда неоднородности отсутствуют полностью. Смещение каждой линии из ее исходного положения при отсутствии поверхностных неоднородностей, а также в случае шероховатостей малой остроты ($\Xi \ll 1$), определяется суммой затравочной энергии (10) и поправкой к этой энергии (20а), связанной с рассеянием композитных мод. На рис. 2 представлены гистограммы МЧ-интервалов для случаев, когда неоднородности в резонаторе отсутствуют полностью (рис. 2, а) и для конечного, но малого по сравнению с единицей значения параметра Ξ (рис. 2, б).

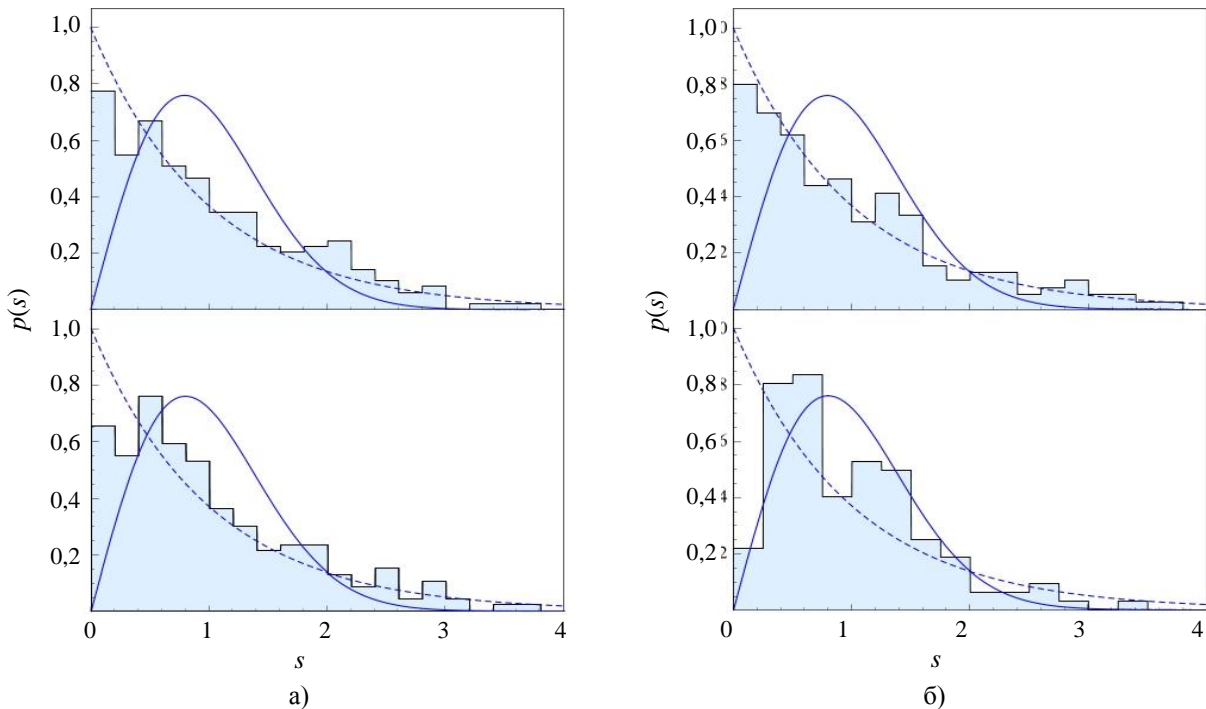


Рис. 2. Гистограммы МЧ-интервалов в спектре случайно-шероховатого резонатора при двух разных значениях параметра Ξ^2 : а) – $\Xi^2 = 0$; б) – $\Xi^2 = 0,03$. Верхние гистограммы соответствует резонатору без диссипации, нижние – диссипативному (или слабо открытому) резонатору. Для сравнения пунктирной и сплошной линиями показаны распределения Пуассона и Вигнера

Видно, что без учета диссипативных потерь (верхние гистограммы) интервалы распределяются по закону, близкому к пуассоновскому,

независимо от того, является боковая стенка резонатора однородной или же нет. Учет диссипации и конечной ширины резонансных линий

приводит к частичной «вигнеризации» распределения – появлению ошутимого провала у функции $p(s)$ в области $s = 0$.

В случае острых шероховатостей, когда $\Xi \gg 1$, распределение можно рассчитывать по формуле (10), не учитывая поправок, связанных со вторым слагаемым в формуле (22). Уширение резонансных линий, связанное с дефазировкой за счет межмодового рассеяния, с ростом параметра Ξ уменьшается, и в пределе $\Xi \rightarrow \infty$ ширина всех резонансных линий определяется исключительно диссипативными процессами, которые в нашей модели учитываются частотой $1/\tau_{dis}$. На рис. 3 показана зависимость от остроты шероховатостей энергий нескольких композиционных мод шероховатого резонатора.

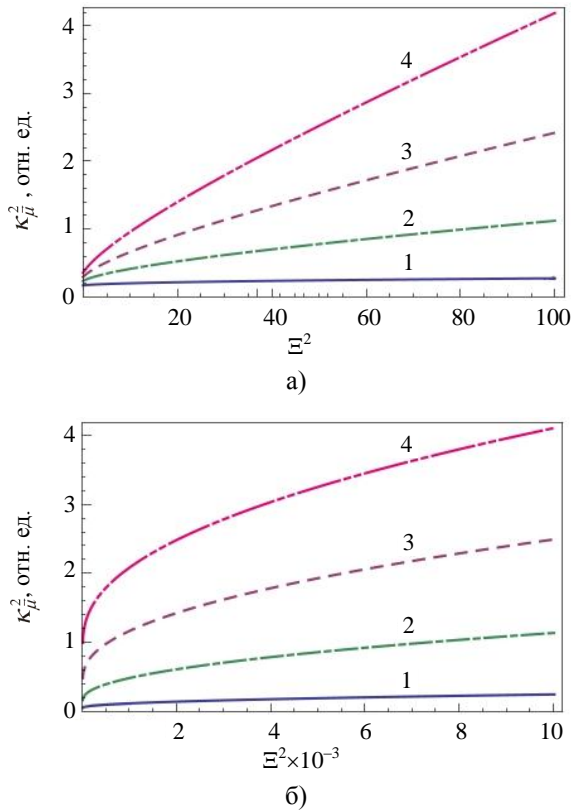


Рис. 3. Зависимость энергии (б) композиционных мод резонатора от остроты шероховатостей его боковой поверхности

Кривые на рис. 3, а соответствуют модам $\bar{\mu} = (20, l, 1)$ с разными радиальными индексами: 1 – $l = 1$, 2 – $l = 2$, 3 – $l = 3$, 4 – $l = 4$. На рис. 3, б аналогичные зависимости приведены для мод $\bar{\mu} = (n, 1, 1)$ с $n = 4, 20, 40$ и 60 (кривые 1, 2, 3 и 4, соответственно). Видно, что с ростом параметра Ξ все модовые энергии монотонно растут, причем одновременно увеличиваются и частотные интервалы между соседними модами. Последнее обстоятельство позволяет при сильном рассеянии

пренебречь не только дефазировкой, но и диссипативным уширением резонансных линий, которое мы изначально считаем малым. Из представленных графиков видно, что композитные моды обладают свойством «всплывать» по энергии при заострении шероховатостей, так что в заданном частотном интервале число резонансных мод с ростом Ξ уменьшается, и при неограниченном возрастании этого параметра стремится к нулю.

На рис. 4. представлены гистограммы МЧ-интервалов для нескольких случаев, когда неоднородности являются очень острыми, а рассеяние композитных мод на них – сильным.

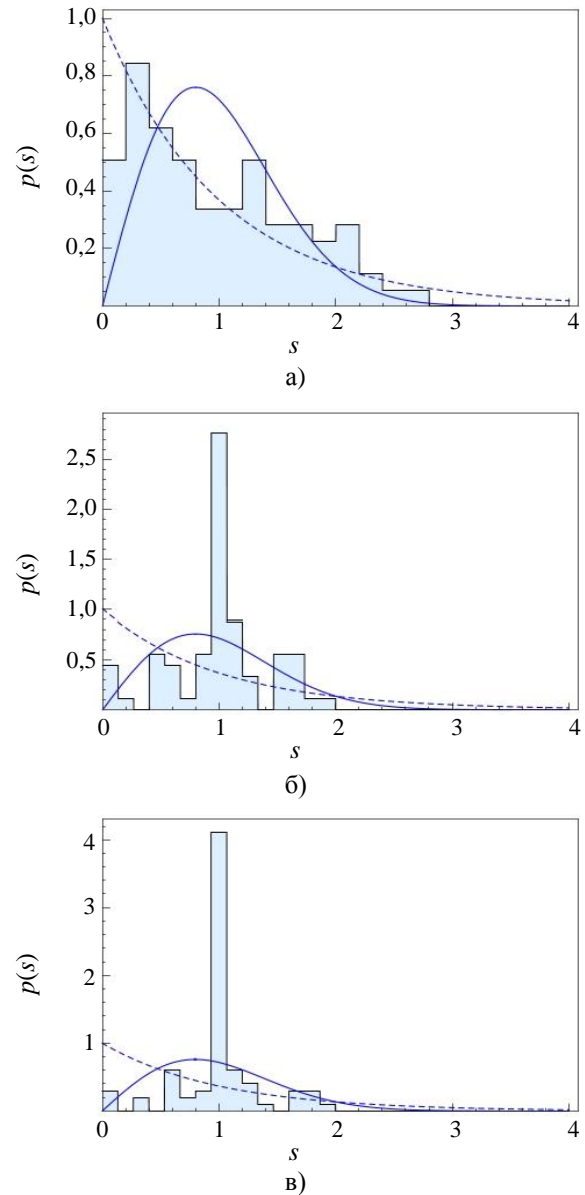


Рис. 4. Распределения МЧ-интервалов для больших значений параметра остроты неоднородностей Ξ : а) – $\Xi^2 = 20$; б) – $\Xi^2 = 150$; в) – $\Xi^2 = 300$. Показана кластеризация уровней в окрестности $s = 1$ в случае, когда острота неоднородностей становится экстремально большой

Видно, что по мере заострения шероховатостей распределение МЧ-интервалов, будучи пуассоновским при малых Ξ и полном отсутствии диссипации в системе, постепенно принимает колоколообразную форму с максимумом расположенным при $s = 1$. Если $\Xi \rightarrow \infty$, это распределение, учитывая его нормировку, приближается к δ -функции $\delta(s-1)$. Такой вид имеет распределение МЧ-интервалов для заведомо интегрируемых систем (в частности, для гармонического осциллятора), в которых оно может быть описано с помощью только одного параметра.

Необычное, на первый взгляд, поведение МЧ распределения объясняется следующим образом. Рассмотрим резонатор без диссипации и проследим для него трансформацию функции $p(s)$ с ростом градиентного параметра Ξ . На начальном этапе, в области малых по сравнению с единицей значений этого параметра, распределение довольно долго сохраняет пуассоновский вид. При этом система резонансных частот в достаточно протяженном частотном интервале является двухпараметрической (для TE -моды). С ростом Ξ распределение МЧ-интервалов, как видно из рис. 4, трансформируется от пуассоновского, имеющего максимум при $s = 0$, к колоколообразному, максимум которого смещается в точку $s = 1$. При этом оказывается, что из-за эффекта всплывания мод система резонансных уровней все более приближается к однопараметрической. Эффективные (градиентно-перенормированные) азимутальные индексы, фигурирующие в выражении (10) для собственной энергии, у колебаний с разными l с ростом Ξ стремятся к нулю, так что все резонансы квантуются уже только одним, радиальным индексом. Если бы азимутальные числа у всех колебаний были изначально строго одинаковыми, усреднение проводилось бы по всей частотной оси, а не по ограниченному ее участку, мы получили бы вместо пика с конечной шириной, показанного на рис. 4, δ -распределение $p(s) = \delta(s-1)$.

Подобная ситуация уже встречалась ранее в работе Берри и Табора [14], где на примере заведомо интегрируемой системы гармонических осцилляторов авторами была выдвинута и обоснована концепция кластеризации уровней либо в окрестности точки $s = 0$, либо в окрестности $s = 1$. Достаточно очевидно, что уровни одного осциллятора, предельно скоррелированные между собой, распределены по закону $p(s) = \delta(s-1)$. Присутствие в системе, рассмотренной в [14], других осцилляторов с несоизмеримыми частотами (условие, аналогичное нарушению однопараметричности спектральных мод в нашей задаче)

привело авторов к колоколообразному распределению, аналогичному по форме тому, которое соответствует предельно большим значениям градиентного параметра (см. рис. 4), а именно $\Xi^2 = 150$ и $\Xi^2 = 300$.

Выводы. Теоретически исследованы спектральные свойства цилиндрического объемного резонатора со слабо-неоднородной боковой поверхностью. Предложен новый метод расчета спектра, который базируется на непосредственном решении волновых уравнений для электромагнитного поля, а не на симметричных свойствах системы. Хотя такой резонатор, рассматриваемый как классический бильярд, является системой неинтегрируемой, с позиций волновой (квантовой) теории он описывается сепарабельной системой уравнений даже в тех случаях, когда его граница является случайной. Условием сепарабельности является нарушение в системе P - либо T -симметрии, которое в нашем случае возникает за счет случайной шероховатости границ или диссипации. Это позволило нам в рамках единого подхода рассмотреть случаи диссипативного и бездиссипативного резонаторов.

Путем разделения мод резонатора, произведенного нами при произвольном уровне неоднородности его боковой границы, показано, что добротность резонансных линий может становиться конечной только при учете потерь диссипативной и/или радиационной природы. При отсутствии диссипации, несмотря на сложный характер границ резонатора, его спектр является регулярным. Нами установлено, что интенсивность межмодового рассеяния, а значит и степень перепутывания резонаторных мод, определяется в основном остротой поверхностных неоднородностей, а не их высотой. При отсутствии диссипации и слабом рассеянии колебаний за счет неоднородностей поверхности распределение МЧ-интервалов в спектре близко к пуассоновскому. Резонансные линии, будучи строго дискретными в отсутствие диссипативных потерь, при наличии последних приобретают конечную ширину, начинают сливаться друг с другом; они не могут уже рассматриваться как независимые. При этом распределение интервалов между линиями, уширенными благодаря дефазировке за счет межмодового рассеяния, приобретают заметную вигнеровскую составляющую.

В рамках развитой нами теории удалось рассмотреть, помимо плавных неоднородностей стенок резонатора, также и случай, когда эти неоднородности являются произвольно острыми. Заострение случайных неоднородностей приводит к монотонному возрастанию всех резонансных частот резонатора и их взаимному удалению. При этом спектр квазиоптического резонатора,

изначально многочастотный в любом достаточно протяженном интервале частот, за счет неоднородностей поверхности существенно прореживается, приближаясь к моночастотному, когда неоднородности становятся достаточно острыми.

Результаты, полученные в настоящей работе, относятся к резонаторным системам бильярдного типа, которые с точки зрения классической динамики являются системами баллистическими. Эти результаты существенно отличаются от тех, которые были получены нами ранее для резонаторов такой же цилиндрической формы, но со случайным объемным заполнением [1]. В объемно-неупорядоченных ограниченных системах волновой транспорт всегда имеет диффузионный характер независимо от того, присутствует в них диссипация или нет. Из-за этого уровень хаотичности спектра, определяемый в соответствии с критерием Чирикова [15] шириной резонансных линий, всегда остается конечным. Поэтому спектр волновых (квантовых) резонансных систем со случайными неоднородностями в объеме всегда обладает определенным уровнем хаотичности, тогда как хаотизация спектра аналогичных систем бильярдной конфигурации возможна лишь при наличии в них диссипативных потерь.

1. *Ganapolskii E. M.* Influence of random bulk inhomogeneities on quasioptical cavity resonator spectrum / E. M. Ganapolskii, Z. E. Eremenko, Yu. V. Tarasov // *Phys. Rev. E.* – 2007. – 75, N 2. – 026212 (13 p.).
2. *Frahm K. M.* Quantum Localization in Rough Billiards / K. M. Frahm, D. L. Shepelyansky // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – 78, N 8. – P. 1440–1443.
3. *Frahm K. M.* Emergence of Quantum Ergodicity in Rough Billiards / K. M. Frahm, D. L. Shepelyansky // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – 79, N 10. – P. 1833–1836.
4. *Observation* of dynamical localization in a rough microwave cavity / L. Sirko, Sz. Bauch, Y. Hlushchuk et al. // *Phys. Lett. A.* – 2000. – 266, N 4–6. – P. 331–335.
5. *Experimental* investigation of a regime of Wigner ergodicity in microwave rough billiards / Y. Hlushchuk, L. Sirko, U. Kuhl et al. // *Phys. Rev. E.* – 2001. – 63, N 4. – 046208 (4 p.).
6. *Mirlin A. D.* Statistics of energy levels and eigenfunctions in disordered systems / A. D. Mirlin // *Phys. Rep.* – 2000. – 326, N 5–6. – P. 259–382.
7. *Blanter Ya. M.* Level and eigenfunction statistics in billiards with surface disorder / Ya. M. Blanter, A. D. Mirlin, B. A. Muzykantskii // *Phys. Rev. B.* – 2001. – 63, N 23. – 235315 (19 p.).
8. *Fuchs K.* The conductivity of the metallic films according to the electron theory of metals / K. Fuchs // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* – 1938. – 34, N 1. – P. 100–108.
9. *Tarasov Yu. V.* Elastic scattering as a cause of quantum dephasing: the conductance of two-dimensional imperfect conductors / Yu. V. Tarasov // *Waves Random Media.* – 2000. – 10, N 4. – P. 395–415.
10. *Ganapolskii E. M.* Effect of random surface inhomogeneities on spectral properties of dielectric disk microresonators: Theory and modeling at millimeter wave range / E. M. Ganapolskii, Z. E. Eremenko, Yu. V. Tarasov // *Phys. Rev. E.* – 2009. – 79, N 4. – 041136 (14 p.).
11. *Little B. E.* Estimating surface-roughness loss and output coupling in microdisk resonators / B. E. Little, S. T. Chu // *Opt. Lett.* – 1996. – 21, N 17. – P. 1390–1392.

12. *Birkhoff G. D.* Proof of the ergodic theorem / G. D. Birkhoff // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* – 1931. – 17, N 12. – P. 656–660.
13. *Хинчин А. Я.* Математические основания статистической механики / А. Я. Хинчин. – М.-Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1943. – 101 с.
14. *Berry M. Y.* Level clustering in the regular spectrum / M. Y. Berry, M. Tabor // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 1977. – 356. – P. 375–394.
15. *Chirikov B. V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems / B. V. Chirikov // *Phys. Rep.* – 1979. – 52, N 5. – P. 263–379.

E. M. Ganapolskii, Yu. V. Tarasov, L. D. Shostenko

THE DEPHASING OF EIGEN-MODES OF A QUASIOPTICAL CYLINDRICAL RESONATOR WITH RANDOMLY INHOMOGENEOUS SIDE BOUNDARY

The spectrum of quasi-optical cylindrical resonator with randomly inhomogeneous side surface is calculated for the first time. To solve this problem, the novel method of mode separation in wave equation is developed, which is based on the operator technique. The effect of random inhomogeneities on the resonator spectrum is described in terms of single universal gradient parameter Ξ allowing for the degree of «sharpness» of surface inhomogeneities. It is shown that the shift and the broadening of a spectral line, which results from the dephasing of resonator modes due to their scattering by inhomogeneities, is proportional to the dissipative broadening. The numerical experiment is performed, which reveals that without accounting for the dissipation loss the spectrum of a random-inhomogeneous cylindrical resonator is regular, whatever the level of boundary inhomogeneity, but possesses quite different statistical properties in the case of small and large values of parameter Ξ .

Key words: cylindrical resonator, randomly-inhomogeneous side boundary, resonator spectrum, mode separation method, mode dephasing, resonance line broadening.

Є. М. Ганапольський, Ю. В. Тарасов,
Л. Д. Шостенко

ДЕФАЗУВАННЯ ВЛАСНИХ МОД КВАЗІОПТИЧНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО РЕЗОНАТОРА З ВИПАДКОВО-НЕОДНОРІДНОЮ БІЧНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Вперше розраховано спектр квазіоптичного циліндричного резонатора з випадково-неоднорідною бічною поверхнею. Для вирішення цієї задачі розроблено новий метод поділу змінних у хвильовому рівнянні, який ґрунтується на операторних процедурах. Вплив випадкових неоднорідностей на спектр резонатора описано за допомогою одного універсального градієнтного параметра Ξ , що враховує ступінь «гостроти» неоднорідностей поверхні. Показано, що зсув і розширення спектральних ліній за рахунок дефазування, пов'язаного з розсіянням мод резонатора на неоднорідностях, є пропорційним дисипативному розширенню. Виконано числовий експеримент, який довів, що без урахування дисипативних втрат спектр випадково-неоднорідного циліндричного резонатора є регулярним, незалежно від рівня неоднорідності його меж, але має суттєво різні статистичні властивості при малих і великих значеннях параметра Ξ .

Ключові слова: циліндричний резонатор, випадково-неоднорідна бічна поверхня, спектр резонатора, метод поділу змінних, дефазування мод, розширення резонансних ліній.

Рукопись поступила 14.12.10 г.