

В. А. Горяшко, Т. М. Слипченко, Ю. В. Тарасов

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ОТРЕЗКЕ ВОЛНОВОДА С ОСТРЫМ ГОФРОМ

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: vitgor06@gmail.com*

Используя строгие уравнения возбуждения, проанализировано распространение волн в отрезке прямоугольного волновода с острым периодическим гофром, для которого отношение высоты к периоду много больше единицы. Показано, что при сильном градиентном рассеянии диаграмма Бриллюэна гофрированного и регулярного волноводов имеют качественно одинаковый характер зависимости продольного волнового числа от частоты. Отличие проявляется в том, что частоты отсечек мод гофрированного волновода растут с уменьшением периода гофра и в произвольном частотном диапазоне, лежащем выше первой частоты отсечки, всегда можно реализовать одномодовый режим. Это явление может быть использовано для подавления конкуренции мод в микроволновых усилителях, а также в узкополосных генераторах, если в последних в качестве обратной связи использовать брегговские отражатели. Ил. 9. Библиогр.: 20 назв.

Ключевые слова: нерегулярный волновод, сильное градиентное рассеяние, частота отсечки.

Использование нерегулярных электродинамических структур в качестве пространства взаимодействия микроволновых генераторов и усилителей является эффективным способом повышения КПД последних. Так, в рамках самосогласованного стационарного моделирования была проведена оптимизация ряда СВЧ-приборов, и предложены варианты сантиметровых ламп бегущих волн с КПД до 80–90 % [1, 2]. Однако в более коротковолновом диапазоне оптимизация электронно-волнового взаимодействия должна быть направлена не только на улучшение энергообмена между пучком и рабочими модами, но и на подавление паразитных мод, поскольку возбуждение этих мод, как правило, препятствует эффективному отбору энергии от электронного пучка. Оказывается, что в микроволновых источниках излучения на быстрой волне можно реализовать одномодовый режим путем гофрирования боковой поверхности волновода или резонатора. Так было предсказано, что в волноводной системе с сильным градиентным рассеянием можно подавить возбуждение высших мод [3]. В нашей работе мы развиваем эту идею и анализируем взаимодействие волн в отрезке волновода с острым гофром (отношение высоты гофра к его периоду много больше единицы).

Гофрированным волноводам посвящена обширная литература [4–7]. Обычно исследования ограничивались анализом взаимодействия мод в условиях брегговских резонансов (обратный период гофра порядка продольного волнового числа). При этом гофр считается плавным, а величинами, содержащими производные от профиля волновода, можно пренебречь. В настоящей работе мы рассматриваем противоположный предельный случай, а именно исследуем волновод с острым гофром. При этом доминирующую роль играет градиентное рассеяние, связанное с остротой поверхностных неоднородностей, а не с их амплитудой.

Заметим, что подходы работ [8–10] справедливы не только для плавного, но и для острого гофра, однако получение окончательного ответа в замкнутой аналитической форме является весьма нетривиальной задачей. Мы предлагаем оригинальный аналитический подход, в рамках которого трехмерная краевая задача сводится к связанной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд возбуждаемых волн, а далее эта система решается методом разделения масштабов.

1. Постановка задачи: уравнения возбуждения нерегулярного волновода. Рассмотрим отрезок идеально проводящего прямоугольного гофрированного волновода длиной L , ориентированного в z -направлении. Мы рассмотрим наиболее простой и интересный с точки зрения приложений случай: каждая пара стенок волновода является симметричной относительно соответствующей центральной плоскости и задается координатными поверхностями $x = \pm a/2$ и $y = \pm w(z)/2$, так что широкая стенка лежит в x -плоскости, $a \gg w(z)$. Считаем, что рассматриваемый нерегулярный волновод идеально согласован на концах $z = 0$ и $z = L$ с выходными регулярными волноводами [2]. При этом считается, что $\dot{w}(0) = \dot{w}(L) = 0$, где точкой обозначена производная по z .

Пусть с левого конца, $z = 0$, волновод возбуждается несколькими TE_{0n} -модами (первый индекс соответствует вариации поля по координате x , а второй – по y) с амплитудами C_n^0 и одинаковой длиной волны в свободном пространстве λ . Волновод считается многомодовым, $w > \lambda$. Возбуждаемое поле полностью описывается x -компонентой вектор-потенциала, которая удовлетворяет однородному волновому уравнению и граничным условиям

$$\left. \frac{\partial A_x}{\partial x} \right|_{x=\pm a/2} = A_x \Big|_{y=\pm w(z)/2} = 0.$$

Решение можно представить в виде локального фурье-разложения по координате y :

$$A_x(y, z, t) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(z) \sqrt{\frac{w_0}{w(z)}} \times \sin \left[n\pi \left(\frac{y}{w(z)} + \frac{1}{2} \right) \right] e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Тогда неизвестные амплитуды $C_n(z)$ удовлетворяют системе связанных уравнений [3]

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 - V_n(z) \right] C_n(z) = \sum_{\substack{n=1, \\ n' \neq n}}^{\infty} U_{nn'}(z) C_{n'}(z), \quad (2)$$

где $w_0 = w(0)$; $k = 2\pi\lambda = \omega/c$ – волновое число в свободном пространстве. По аналогии с квантово-механической задачей рассеяния назовем $V_n(z)$ и $U_{nn'}(z)$ внутримодовым и межмодовым потенциалами соответственно. Потенциал $U_{nn'}(z)$ является оператором и определен как

$$U_{nn'} f = \frac{2B_{nn'}}{w} \left[D_{nn'} \frac{\dot{w}^2}{w} f - \dot{w} \partial_z f - \partial_z (\dot{w} f) \right]. \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \partial_z &\equiv d/dz; \quad \dot{w} \equiv dw/dz; \\ B_{nn'} &= \frac{nn'}{n^2 - n'^2} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} (n - n') \right]; \\ D_{nn'} &= \frac{3n^2 + n'^2}{n^2 - n'^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Внутримодовый потенциал $V_n(z)$ есть

$$V_n(z) = \frac{\pi^2 n^2}{w(z)^2} + \left[1 + \frac{\pi^2 n^2}{3} \right] \left[\frac{\dot{w}(z)}{2w(z)} \right]^2. \quad (5)$$

Граничные условия для искомым амплитуд $C_n(z)$ в начале и конце пространства взаимодействия имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{dC_n}{dz} + ik_n(z) C_n \right) \Big|_{z=0} &= 2ik_n^0 C_n^0, \\ \left(\frac{dC_n}{dz} - ik_n(z) C_n \right) \Big|_{z=L} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $k_n^2(z) = k^2 - V_n(z)$; $C_n^0 = C_n(0)$; $k_n^0 = k_n(0)$. Мощность, переносимая в гофрированном волноводе, вычисляется по формуле

$$P(z) = -\frac{cS}{8\lambda} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \dot{C}_n^* + \sum_{\substack{n'=1, \\ n' \neq n}}^{\infty} \frac{2nn'}{n^2 - n'^2} \frac{\dot{w}}{w} C_n C_{n'}^* \right],$$

где $S = aw_0$ – площадь поперечного сечения волновода.

Отметим, что в силу симметрии задачи моды с четными $TE_{0,even}$ и нечетными $TE_{0,odd}$ вариациями по y не связаны между собой: коэффициенты $B_{nn'}$ не равны нулю, только если оба индекса одинаковой четности. Далее мы рассмотрим случай нечетных вариаций поля. Сформулированные уравнения возбуждения (2) верны для волновода с произвольным законом изменения профиля. В данной работе мы рассмотрим периодический гофрированный волновод

$$w(z) = w_0(1 - \varepsilon \cos[2\pi z/d]), \quad (\varepsilon \ll 1). \quad (7)$$

Неоднородности будем считать острыми, $\max|\dot{w}(z)| \gg 1$, т. е. высота неоднородности много больше ее ширины

$$\varepsilon w_0/d \gg 1. \quad (8)$$

При этом нормы внутримодового и межмодового потенциалов являются большими по сравнению с квадратом волнового числа. Соответственно, применение метода последовательных приближений к системе (2) недопустимо. Чтобы иметь возможность сконцентрировать свое внимание на градиентном рассеянии, а роль амплитудного рассеяния свести к минимуму, мы также будем считать, что амплитуда неоднородности меньше длины волны, т. е. выполнено неравенство

$$\varepsilon w_0/\lambda < 1. \quad (9)$$

2. Внутримодовое рассеяние. В этом разделе мы решим вспомогательную задачу о внутримодовом рассеянии и продемонстрируем применение метода разделения масштабов. Под внутримодовым рассеянием мы будем понимать перераспределение поля между прямой и встречной волнами одной и той же моды, связанное только с потенциалом $V_n(z)$. Тогда локальные моды (1) не связаны между собой, и мы получаем для амплитуды каждой моды уравнение

$$\ddot{C}_n(z) + [k^2 - \bar{V}_n - \delta V_n(z)] C_n(z) = 0, \quad (10)$$

где постоянная \bar{V}_n и переменная $\delta V_n(z)$ части внутримодового потенциала имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{V}_n &= \frac{n^2 \pi^2}{w_0^2} \left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{2} + \frac{15}{8} \varepsilon^4 \right) + \\ &+ \frac{\pi^2 (n^2 \pi^2 + 3) \varepsilon^2}{6d^2} + \frac{\pi^2 (n^2 \pi^2 + 3) \varepsilon^4}{8d^2}, \\ \delta V_n &= \frac{2n^2 \pi^2 \varepsilon}{w_0^2} \cos \left[\frac{2\pi z}{d} \right] - \\ &- \frac{\pi^2 (n^2 \pi^2 + 3) \varepsilon^2}{6d^2} \cos \left[\frac{4\pi z}{d} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения для потенциалов \bar{V}_n и $\delta V_n(z)$ выписаны с разной точностью по малому параметру ε . При условии (8) второе слагаемое в правой части $\delta V_n(z)$ является доминирующим. Рассеяние на этом потенциале определяется его квадратом модуля, поэтому в потенциале \bar{V}_n , непосредственно перенормирующим k^2 , удержаны слагаемые того же порядка по ε . Уравнение (10) характеризуется двумя пространственными масштабами, а именно $\sqrt{|k^2 - \bar{V}_n|}$ и $2\pi d$. В силу условий (8) и (9) второй масштаб гораздо меньше первого, что позволяет нам воспользоваться одной из разновидностей метода разделения масштабов, предложенной Н. Н. Боголюбовым [11]. Следует, однако, уточнить, что всегда существует множество закрытых мод с такими большими номерами, что условие $\sqrt{|k^2 - \bar{V}_n|} \gg 2\pi d$ нарушается. Однако, как мы покажем далее, амплитуды закрытых мод быстро убывают с ростом номера моды, так что указанными выше модами можно пренебречь. Представим решение уравнения (10) в виде суммы большой медленной C_n^{sl} и малой быстрой C_n^f амплитуд

$$C_n(z) = C_n^{sl}(z) + C_n^f(z). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10) и отделяя «быстрые» и «медленные» слагаемые, получаем следующие точные уравнения [12, с. 49]:

$$\ddot{C}_n^f(z) + [k^2 - \bar{V}_n]C_n^f(z) = \delta V_n(z)C_n^{sl}(z), \quad (13a)$$

$$\ddot{C}_n^{sl}(z) + [k^2 - \bar{V}_n]C_n^{sl}(z) - \delta V_n(z)C_n^f(z) = 0. \quad (13b)$$

В соответствии с методом разделения масштабов в последнем слагаемом левой части (13б) можно удерживать только постоянную часть. Вместо одной неизвестной функции $C_n(z)$ мы ввели две новые неизвестные функции $C_n^f(z)$ и $C_n^{sl}(z)$, поэтому помимо условий (6) необходимо сформулировать еще два граничных условия. Потребуем выполнения равенств

$$\dot{C}_n^f(0) = \dot{C}_n^f(L) = 0. \quad (14)$$

Тогда решение уравнения (13а) имеет вид

$$C_n^f = C_n^{sl} \left\{ \frac{2\pi^2 \varepsilon}{w_0^2 [k^2 - \bar{V}_n - (2\pi d)^2]} \cos \left[\frac{2\pi z}{d} \right] - \frac{\pi^2 \varepsilon^2 (\pi^2 + 3)}{6d^2 [k^2 - \bar{V}_n - (4\pi d)^2]} \cos \left[\frac{4\pi z}{d} \right] \right\}. \quad (15)$$

Поскольку мы рассматриваем острые неоднородности $\varepsilon w_0/d \gg 1$, то величиной $k^2 - \bar{V}_n$ можно пренебречь по сравнению с $(\pi d)^2$. Тогда решение (15) можно записать в виде двойного неопределенного интеграла от $\delta V_n(z)$

$$C_n^f(z) = C_n^{sl}(z) \int \left(\int \delta V_n(z) dz \right) dz.$$

Для дальнейшего анализа полезно ввести линейный интегральный оператор \hat{L} соотношением

$$\hat{L}[f(z)] = \int \left(\int f(z) dz \right) dz. \quad (16)$$

Тогда очевидно, что $C_n^f(z) = C_n^{sl}(z) \hat{L}[\delta V_n(z)]$ и выражение (13б) принимает вид

$$\ddot{C}_n^{sl}(z) + [k^2 - \bar{V}_n + \Gamma_n]C_n^{sl}(z) = 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_n &\equiv -\delta V_n \hat{L}[\delta V_n] = \\ &= \frac{n^4 \pi^2 d^2 \varepsilon^2}{2w_0^4} + \frac{\pi^2 (n^2 \pi^2 + 3)^2 \varepsilon^4}{1152d^2}. \end{aligned}$$

Здесь верхняя черта в выражении для Γ_n обозначает усреднение по быстрым осцилляциям. Слагаемое Γ_n возникает в (17) из «быстрого» уравнения (13а), поэтому мы связываем его с высокочастотным рассеянием и называем коэффициентом внутримодового высокочастотного рассеяния. Соответственно, \bar{V}_n можно считать коэффициентом внутримодового низкочастотного рассеяния. Видно, что коэффициент внутримодового высокочастотного рассеяния квадратичен по осциллирующему потенциалу $\delta V_n(z)$ и имеет порядок $O(\varepsilon^4)$.

Решение уравнения (17) имеет вид

$$C_n^{sl}(z) = A e^{-k_z z} + B e^{k_z(z-L)}, \quad (18)$$

где $k_z = \sqrt{\bar{V}_n - k^2 - \Gamma_n}$, а константы A и B находятся с помощью соотношений (6), (12), (14), (15) и (18):

$$A \approx \frac{2C_n^0 \sqrt{k^2 - \pi^2/w_0^2}}{\sqrt{k^2 - \pi^2/w_0^2 + ik_z}}, \quad B \approx 0.$$

Таким образом, учитывая только внутримодовое рассеяние, мы получаем, что наличие малых по высоте, но достаточно острых неоднородностей приводит к тому, что мода может становиться закрытой, хотя она является распространяющейся в регулярном волноводе такой же средней ширины. Численная иллюстрация этого эффекта дана на рис. 1, где показана зависимость амплитуды $C_1(z)$ и ее производной от продольной координаты.

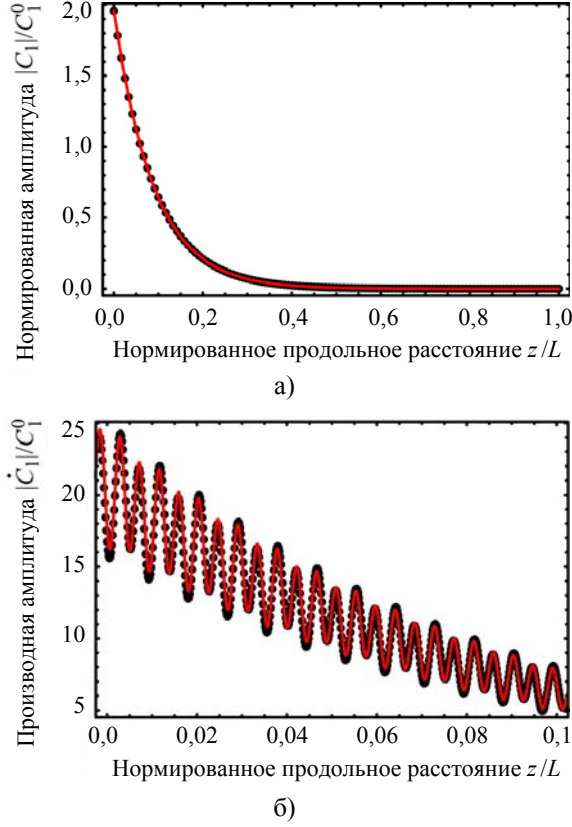


Рис. 1. Амплитуда вектор-потенциала и ее производная для первой моды с учетом только внутримодового рассеяния. Сплошные кривые соответствуют аналитическому решению (10), а точки – результат численного решения (8). Параметры задачи: $\varepsilon = 0,1$; $w_0 = \lambda$; $L = 10\lambda$; $d = \lambda/12$

3. Учет межмодового рассеяния. Применим использованный в разд. 2 метод разделения масштабов к решению системы уравнений возбуждения (2). Представляя амплитуды $C_n(z)$ в виде суммы медленной и быстрой компонент (см. (12)), из (2) получим следующие уравнения для этих компонент:

$$\ddot{C}_n^f(z) = \delta V_n(z) C_n^{sl}(z) + \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\infty} \delta U_{nn'}(z) C_{n'}^{sl}(z), \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{C}_n^{sl}(z) + [k^2 - \bar{V}_n] C_n^{sl}(z) - \delta V_n(z) C_n^f(z) = \\ = \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\infty} [\bar{U}_{nn'} C_{n'}^{sl}(z) + \delta U_{nn'}(z) C_{n'}^f(z)]. \end{aligned} \quad (19б)$$

Здесь $\bar{U}_{nn'}$ и $\delta U_{nn'}(z)$ – постоянная и переменная части межмодового потенциала $U_{nn'}(z)$ (3).

Выражения для этих величин громоздки, и мы их приводить не будем, тем более что физический смысл имеют только усредненные комбинации этих величин. Решение уравнения (19a) можно записать в виде

$$\begin{aligned} C_n^f(z) = \hat{L}[\delta V_n(z)] C_n^{sl}(z) + \\ + \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\infty} \hat{L}[\delta U_{nn'}(z)] C_{n'}^{sl}(z). \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя решение (20) в уравнение (19б), получаем систему связанных уравнений для медленных амплитуд $C_n^{sl}(z)$

$$\begin{aligned} \ddot{C}_n^{sl}(z) + [k^2 - \bar{V}_n - \overline{\delta V_n(z) \hat{L}[\delta V_n(z)]}] C_n^{sl}(z) = \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\infty} \overline{\delta V_n(z) \hat{L}[\delta U_{nn'}(z)]} C_{n'}^{sl}(z) + \\ + \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\infty} [\bar{U}_{nn'} C_{n'}^{sl}(z) + \overline{\delta U_{nn'}(z) \hat{L}[\delta V_{n'}(z)]}] C_n^{sl}(z) + \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\infty} \delta U_{nn'}(z) \sum_{n''=1, n'' \neq n'}^{\infty} \hat{L}[\delta U_{n'n''}(z)] C_{n''}^{sl}(z). \end{aligned} \quad (21)$$

Потенциалы, содержащиеся в (21), имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{V}_n = \frac{n^2 \pi^2}{w_0^2} \left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{2} + \frac{15\varepsilon^4}{2} \right) + \\ + \frac{\pi^2 (n^2 \pi^2 + 3) \varepsilon^2}{6d^2} + \frac{\pi^2 (n^2 \pi^2 + 3) \varepsilon^4}{8d^2}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\bar{U}_{nn'} = \frac{4\pi^2 \varepsilon^2}{d^2} B_{nn'} (D_{nn'} - 1); \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_n \equiv \overline{\delta V_n \hat{L}[\delta V_n]} = \frac{n^4 \pi^2 d^2 \varepsilon^2}{2w_0^4} + \\ + \frac{\pi^2 (n^2 \pi^2 + 3)^2 \varepsilon^4}{1152d^2}; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\overline{\delta V_n \hat{L}[\delta U_{nn'}]} = \frac{2n^2 \pi^2 \varepsilon^2 B_{nn'}}{w_0^2}; \quad (25)$$

$$\overline{\delta U_{nn'} \hat{L}[\delta V_{n'}]} = -\frac{2n'^2 \pi^2 \varepsilon^2 B_{nn'}}{w_0^2}; \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\infty} \delta U_{nn'} \sum_{n''=1, n'' \neq n'}^{\infty} \hat{L}[\delta U_{n'n''}] C_{n''}^{sl} = -R_n C_n^{sl} \\ - \frac{8\pi^2 \varepsilon^2}{d^2} \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\infty} C_{n'}^{sl} \sum_{n''=1, n'' \neq n, n' \neq n''}^{\infty} B_{nn''} B_{n'n''}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} R_n = -\frac{\pi^2 \varepsilon^4}{2d^2} \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\infty} B_{nn'}^2 [11 + 12D_{nn'} + D_{nn'}^2] - \\ - \frac{8\pi^2 \varepsilon^2}{d^2} \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\infty} B_{nn'}^2 = \frac{\pi^2 \varepsilon^2}{6d^2} (n^2 \pi^2 + 3) + \\ + \frac{\pi^2 \varepsilon^4}{32d^2} \left(13 - 6n^2 \pi^2 + \frac{n^4 \pi^4}{45} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Важной особенностью уравнения (21) является то, что индекс суммирования n'' в его правой части, в отличие от n' , может принимать значения, равные n , т. е. часть слагаемых, ответственных за внутримодовое рассеяние, содержится в двойной сумме в правой части (21) помимо его левой части. Для дальнейшего анализа эти слагаемые удобно выделить отдельно из двойной суммы, что и сделано в выражениях (27) и (28). Меняя также в правой части (27) порядок суммирования и переобозначая индексы, сумму по n'' можно вычислить аналитически

$$\sum_{n''=1, n'' \neq n, n'' \neq n'}^{\infty} B_{nn''} B_{n'n''} = \frac{nn'(n^2 + n'^2)}{(n^2 - n'^2)^2}. \quad (29)$$

После этого уравнение (21) удобно переписать в виде

$$\ddot{C}_n^{sl}(z) + K_n^2 C_n^{sl}(z) = \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\infty} S_{nn'} C_{n'}^{sl}(z), \quad (30)$$

где

$$K_n^2 = k^2 - \bar{V}_n + \Gamma_n + R_n = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{n^2 \pi^2}{w_0^2} \left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{2} + \frac{15\varepsilon^4}{8} \right) + \frac{n^4 \pi^2 d^2 \varepsilon^2}{2w_0^4} + \frac{\pi^2 \varepsilon^4}{128d^2} \left(5 - \frac{118n^2 \pi^2}{3} + \frac{n^4 \pi^4}{5} \right), \quad (31)$$

а коэффициент межмодового рассеяния в правой части (30) равен $S_{nn'} = 2nn'\pi^2 \varepsilon^2 / w_0^2$. С точностью $O(\varepsilon^2)$ вклады от \bar{V}_n и R_n , см. (22) и (27), содержащие период гофра d , полностью скомпенсировали друг друга в (31). Как результат, с указанной точностью волновое число медленной амплитуды $C_n^{sl}(z)$ в волноводе с острым периодическим гофром практически не зависит от его периода. Это связано с тем, что малая величина d стоит в числителе выражения (31), а не в знаменателе, как это было в (17). Напомним, что мы рассматриваем случай, когда выполнено неравенство $\varepsilon w_0 / d \gg 1$ и вклады в рассеяние внутримодового и межмодового потенциалов по отдельности велики по сравнению с квадратом волнового числа $\bar{V}_n, R_n \gg k^2$.

Следует пояснить, что для выделения медленных и быстрых слагаемых и применения метода разделения масштабов нам приходится разлагать (2) по малому параметру ε , имеющему смысл степени модуляции поверхности волновода. В результате решение представляет ряд по этому малому параметру. При выполнении неравенства $(\varepsilon^2 w_0 / d)^2 \ll 1$ указанный ряд можно оборвать до слагаемых порядка $O(\varepsilon^4)$ и полу-

чить формулы (30) и (31). Случай очень острого гофра $(\varepsilon^2 w_0 / d)^2 > 1$ будет проанализирован нами далее, опираясь на результаты численного моделирования, а сейчас мы получим из (30) явные выражения для истинных волновых чисел.

Рассмотрим подробно случай, когда $K_1^2 > 0$, а $K_n^2 < 0$ при $n > 1$. Эти неравенства справедливы при условии $\lambda > 2w_0 / 3$. Если бы межмодовое рассеяние отсутствовало ($S_{nn'} = 0$), это означало бы, что только одна мода (первая) является распространяющейся, а все остальные являлись бы закритическими. Представим медленную амплитуду в виде

$$C_n^{sl}(z) = C_n^+(z) e^{iK_n z} + C_n^-(z) e^{-iK_n z}, \quad (32)$$

где новые неизвестные амплитуды $C_n^{\pm}(z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dC_n^{\pm}}{dz} = \mp \sum_{\substack{n'=1, \\ n' \neq n}}^{\infty} S_{nn'} [C_n^+ e^{iK_{n'} z} + C_n^- e^{-iK_{n'} z}] \frac{i e^{\mp iK_n z}}{2K_n}. \quad (33)$$

Поскольку $S_{nn'} \sim \varepsilon^2$, то мы будем считать, что волновые числа K_n перенормируются межмодовым рассеянием не сильно и разделение волн на распространяющиеся и нераспространяющиеся сохраняется. Будем также считать, что амплитуды нераспространяющихся волн гораздо меньше амплитуд распространяющихся. Удерживая в сумме (33) только слагаемые с $n' = 1$, мы перепишем (33) для $n > 3$ в интегральном виде:

$$C_n^+ = - \frac{e^{|K_n|z} S_{n1}}{2|K_n|} \times \int_0^z (C_1^+ e^{iK_1 z'} + C_1^- e^{-iK_1 z'}) e^{|K_n|(z'-z)} dz', \quad (34)$$

$$C_n^- = \frac{e^{-|K_n|z} S_{n1}}{2|K_n|} \times \int_L^z (C_1^+ e^{iK_1 z'} + C_1^- e^{-iK_1 z'}) e^{-|K_n|(z'-z)} dz'.$$

Благодаря экспоненциальному множителю подынтегральные выражения в (34) локализованы в окрестности $z' = z$ с радиусом локализации порядка K_n^{-1} . Это обстоятельство позволяет явно вычислить интегралы, поскольку $C_1^{\pm}(z)$ являются медленными функциями на этом масштабе (это следует из того факта, что $dC_1^{\pm} / dz \propto \varepsilon^2$):

$$C_n^{\pm} \approx - \frac{e^{|K_n|z}}{2|K_n|} S_{n1} \left(\frac{C_1^+ e^{iK_1 z}}{|K_n| \pm iK_1} + \frac{C_1^- e^{-iK_1 z}}{|K_n| \mp iK_1} \right). \quad (35)$$

Подставляя (35) в (32), получаем зависимость амплитуд предположительно нераспространяющихся волн от амплитуды распространяющейся:

$$C_n^{sl} \approx -S_{n1} \frac{C_1^{sl}}{|K_n|^2 + K_1^2}, \quad (n > 1). \quad (36)$$

Это приводит к замкнутому уравнению относительно $C_1^{sl}(z)$

$$\ddot{C}_1^{sl} + k_{z1}^2 C_1^{sl} = 0, \quad (37)$$

где истинное волновое число, учитывающее все возможные каналы рассеяния, есть

$$k_{z1}^2 = K_1^2 + \sum_{n'=3}^{\infty} \frac{S_{1n'}^2}{|K_{n'}|^2 + K_1^2}. \quad (38)$$

Общее решение (37) с учетом соотношения (18) и граничных условий (6) имеет вид

$$C_1^{sl} = Ae^{ik_{z1}z} + Be^{-ik_{z1}z},$$

$$A \approx -\frac{2(1+\eta)C_1^0}{e^{2ik_{z1}L}(1-\eta)^2 - (1+\eta)^2}, \quad (39)$$

$$B \approx -\frac{2e^{2ik_{z1}L}(1-\eta)C_1^0}{e^{2ik_{z1}L}(1-\eta)^2 - (1+\eta)^2},$$

где $\eta = k_{z1}/k_1^0$ – отношение волнового числа в гофрированном волноводе к волновому числу в регулярном волноводе ширины $w_0(1-\varepsilon)$.

Важной особенностью результата (38) является то, что волновое число k_{z1} зависит от квадрата коэффициента межмодового рассеяния $S_{nn'}$, поэтому указанный коэффициент можно рассчитывать с меньшей точностью, чем точность коэффициентов внутримодового рассеяния. Утверждение относительно точности расчета $S_{nn'}$ сохраняет свою силу и для нескольких распространяющихся мод. В этом случае вычислительный прием, задаваемый (32)–(38), приводит к замкнутой системе уравнений относительно совокупности амплитуд распространяющихся мод.

Слагаемые ряда (38) при больших n' ведут себя как $1/n'^2$, и ряд сходится. Добавка к квадрату вспомогательного волнового числа, K_1^2 , обусловленная модами с $K_n^2 < 0$, мала и, что особо важно, не зависит от длины волны. Интересной особенностью волновода с острым гофром является то, что моды с различными вариациями поля по поперечной координате имеют одинаковое истинное продольное волновое число при условии, что $\lambda > 2w_0/3$. Действительно, из соотношений (19) и (36) видно, что медленные и быстрые амплитуды мод с индексами $n > 3$ прямо пропорциональны C_1^{sl} и имеют осциллирующий, а не экспоненциально убывающий характер. Эк-

споненциальное убывание амплитуд мод с индексами $n > 3$ имеет место только на краях волновода. Заметим, что если бы мы применили к уравнению (2) стандартное разложение Фурье-Флоке, это привело бы к задаче на собственные значения, допускающей только одно действительное решение.

Типичный график фурье-спектра полной амплитуды поля $C_1(z)$ представлен на рис. 2. Для разных амплитуд мод $C_n(z)$ высота пиков различна и уменьшается с ростом номера моды. Однако положение пиков является одинаковым для мод со всеми n .

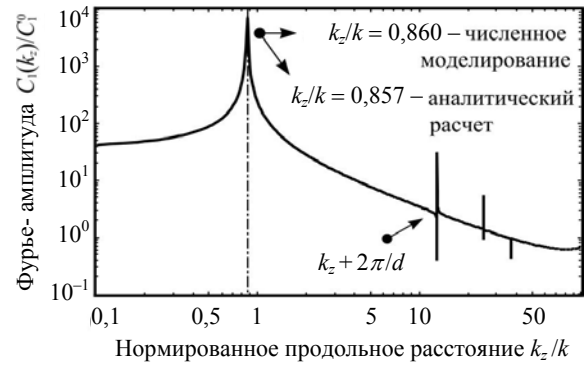


Рис. 2. Нормированная фурье-амплитуда первой моды как функция нормированного волнового числа, полученная в результате численного моделирования (2). Как по оси абсцисс, так и по оси ординат использован логарифмический масштаб. Параметры задачи: $\varepsilon = 0,1$; $w_0 = L/50$; $\lambda = L/50$; $d = \lambda/12$

На рис. 3 показана зависимость волнового числа первой моды от обратного периода гофра. Как и предсказывают аналитические расчеты, волновое число с уменьшением периода убывает, и при некотором критическом значении последнего волновода оказывается закритическим. Напомним, что аналитический результат (38) получен в предположении умеренно острого гофра, $(\varepsilon^2 w_0/d)^2 \ll 1$.

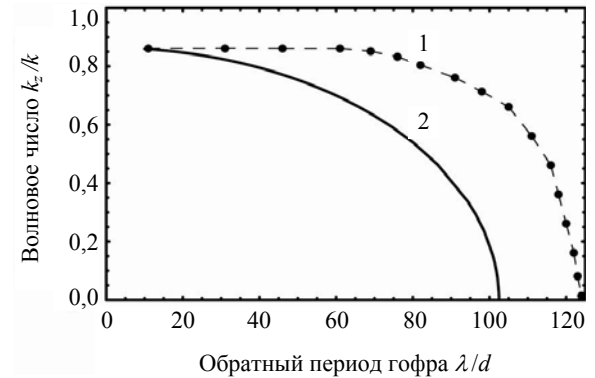


Рис. 3. Зависимость нормированного волнового числа от нормированного обратного периода гофра: 1 – результаты численного моделирования, 2 – аналитическая оценка волнового числа (38). Параметры задачи такие же, как и на рис. 2

Однако сравнение с результатами численного моделирования, представленное на рис. 3, показывает, что наши аналитические результаты применимы и в случае очень острого гофра. Таким образом, замкнутое аналитическое выражение (38) позволяет легко оценить значение волнового числа в широкой области параметров и определить условия достижения одномодового режима в сверхразмерном волноводе. Далее распределение поля и значение волнового числа могут быть уточнены путем численного моделирования.

Как мы уже отмечали ранее, зависимость истинного волнового числа от частоты в волноводе с острым гофром носит такой же качественный характер, как и в регулярном волноводе. Отличие состоит в том, что частоты отсечки в гофрированном волноводе превышают соответствующие частоты отсечки регулярного волновода. Это хорошо видно из рис. 4, на котором представлены диаграммы Бриллюэна гофрированного и регулярного волноводов.

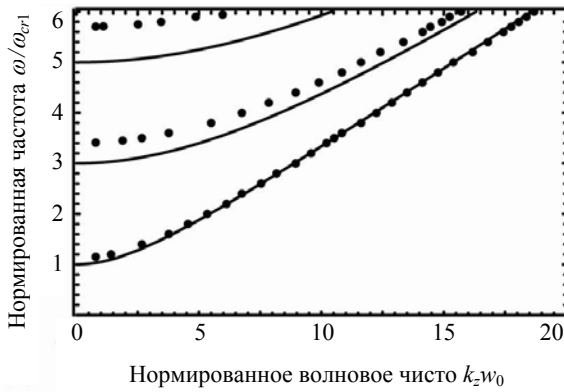


Рис. 4. Диаграмма Бриллюэна гофрированного и соответствующего ему регулярного волновода. Дисперсионные кривые волновода с острой гофрой смещены вверх по оси частот по сравнению с кривыми регулярного волновода. Нормирующий множитель есть $\omega_{cr1} / c = \pi w_0$; $\varepsilon = 0,1$; $w_0 = L/40$; $d = w_0/20$

Точками представлены дисперсионные кривые гофрированного волновода, полученные путем прямого численного решения системы уравнений (2). Сплошной линией обозначены дисперсионные кривые регулярного волновода. Для наглядности мы нормировали частоту электромагнитного поля на частоту отсечки первой моды регулярного волновода

$$\omega/\omega_{cr1} = \sqrt{n^2 + (k_z w_0 / \pi)^2}, \text{ где } \omega_{cr1} / c = \pi w_0.$$

Из наших аналитических расчетов следует интересная закономерность относительно смещения дисперсионных кривых. Пусть $k_{z|n+1}$ и $k_{z|n}$ – истинные $n+1$ и n волновые числа гофрированного волновода, а $\bar{k}_{z|n+1}$ и $\bar{k}_{z|n}$ – соответ-

ствующие $n+1$ и n волновые числа регулярного волновода. Тогда имеют место неравенства

$$\delta_n = (k_{z|n+1} - k_{z|n}) / (\bar{k}_{z|n+1} - \bar{k}_{z|n}) > 1, \quad (40)$$

$$\delta_{n+1} / \delta_n > 1.$$

Оказывается также, что относительное смещение волновых чисел растет с увеличением степени модуляции гофра ε (рис. 5). Соотношения (40) указывают на то, что частоты отсечек гофрированного волновода увеличиваются не пропорционально номеру моды, а имеют более сложную зависимость от него, см. формулу (31).

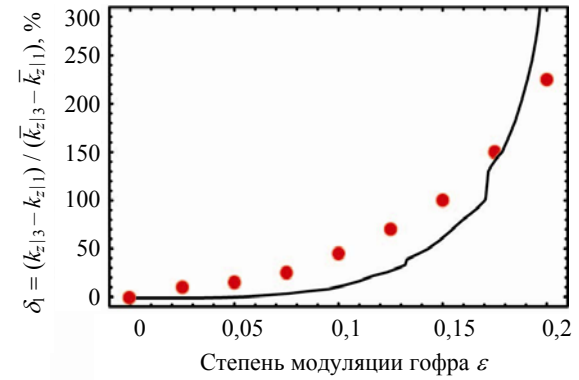


Рис. 5. Относительное смещение волновых чисел гофрированного волновода как функция степени модуляции поверхности волновода. Точками представлены результаты численного моделирования, сплошной линией результат аналитических расчетов. Параметры задачи: $w_0 = 125L/6$; $\lambda = L/50$; $d = \lambda/12$

Полученный нами результат согласуется с общим утверждением относительно поведения нормальных частот консервативной линейной двумерной системы [13, с. 40], а именно: введение связи в консервативную динамическую систему может лишь увеличить интервал между ее нормальными частотами. В нашем случае это утверждение оказывается справедливым для бесконечномерной динамической системы (2), в которой роль связи играет степень модуляции гофра. Заметим, что эффект смещения частот отсечек в высокочастотную область упоминается в работе [14], однако надлежащего исследования он не получил и общие закономерности не были установлены.

4. Особенности численного моделирования. При численном моделировании задачи (2), (6) производные по продольной координате заменялись конечноразностными выражениями, имеющими шестой порядок точности. Далее полученная система линейных алгебраических уравнений решалась методом прогонки, предложенным британским физиком Л. Томасом в конце 1940-х гг. [15]. Заметим, что в начале 1950-х гг. метод решения линейных алгебраических уравнений с ленточной матрицей также независимо был предложен не-

сколькими советскими математиками, см. библиографический список [16]. Оказывается, что устойчивость метода прогонки и корректность конечноразностной аппроксимации зависит не только от структуры разностных уравнений, но и от вида граничных условий [17, с. 274]. Следовательно, стандартное условие устойчивости, см., например, (49) в работе [18, с. 46], в нашем случае не применимо. Поэтому в данном разделе, используя методы нелинейной динамики, мы покажем, как можно проанализировать устойчивость метода прогонки на примере модельной задачи о прохождении волны через отрезок регулярного волновода с граничными условиями типа условий излучения (6)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 C}{dz^2} + k_z^2 C &= 0, \\ \left(\frac{dC}{dz} + ik_z C \right) \Big|_{z=0} &= 2ik_z C^0, \\ \left(\frac{dC}{dz} - ik_z C \right) \Big|_{z=L} &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Дальнейшее обобщение предлагаемого анализа устойчивости на систему (2) может быть проведено по схеме, изложенной в работе [17]. Заметим, что попытка применить условие (49) из работы [18, с. 46] к рассматриваемой модельной задаче (41) показывает, что метод прогонки не устойчив для распространяющихся мод ни при каких значениях шага дискретизации.

Определим безразмерную переменную $\zeta = z/L$, изменяющуюся на интервале от 0 до 1, и введем на указанном интервале равномерную сетку с узлами в точках $\zeta_j = j/J$, где J – натуральное число. Расстояние между соседними узлами обозначим через $\Delta\zeta$ и заменим производные конечными разностями второго порядка точности. Тогда (41) принимает вид

$$\begin{aligned} u_{j+1} + (\delta^2 - 2)u_j + u_{j-1} &= 0, \quad (j = 1, \dots, J-1), \\ -3u_0 + 4u_1 - u_2 + 2i\delta u_0 &= 4i\delta, \\ 3u_J - 4u_{J-1} + u_{J-2} - 2i\delta u_J &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Значение нормированной амплитуды моды в узловой точке мы обозначили как $u_j = C(\zeta_j)/C^0$, величина $\delta = k_z(\zeta_j)L\Delta\zeta$ есть нормированная постоянная распространения регулярного волновода.

Ищем решение системы (42) в виде

$$u_{j+1} = u_j / \xi_{j+1}. \quad (43)$$

Подставляя (43) в (42), находим рекуррентные соотношения для ξ_j

$$\xi_j = 2 - \delta^2 - \frac{1}{\xi_{j+1}}. \quad (44)$$

Вычисления по формуле (44) проводятся в направлении убывания j ($j = J-2, J-3, \dots, 0$), затем из (43) вычисляются u_{j+1} в направлении возрастания j начиная с $j=1$. Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_J &= \frac{2(1-i\delta)}{2+\delta^2}, \\ \xi_{J-1} &= \frac{2+\delta^2-2\delta^4}{2(1+\delta^2)} - i \frac{(2+\delta^2)\delta}{2(1+\delta^2)}, \\ u_0 &= \frac{4i\xi_1\delta}{2-\xi_1(2-2i\delta-\delta^2)}. \end{aligned}$$

Расчет по формуле (43) корректен и погрешность не нарастает, если $\xi_j \neq 0$ и $|\xi_j| \geq 1$. Сначала проанализируем последовательность ξ_j для закритических мод. В этом случае волновое число δ является чисто мнимым, поэтому удобно ввести новую действительную величину соотношением $\delta = i\tilde{\delta}$. Предположим, что последовательность ξ_j сходится к некоторой величине ξ , называемой [19] неподвижной точкой отображения (44). Полагая $\xi_j = \xi_{j+1} = \xi$, из (44) получаем две неподвижные точки

$$\xi^{\pm} = (2 + \tilde{\delta}^2 \pm \tilde{\delta}\sqrt{\tilde{\delta}^2 + 4}). \quad (45)$$

Проводя анализ устойчивости этих точек в линейном приближении, находим мультипликатор [19]

$$\mu(\xi) = \left| \frac{\Delta\xi_{j+1}}{\Delta\xi_j} \right| = \frac{1}{|\xi|^2}. \quad (46)$$

Здесь $\Delta\xi_j$ – малое отклонение ξ_j от ξ . Точка ξ^+ – абсолютно устойчива ($\mu(\xi^+) < 1$), а точка ξ^- – абсолютно неустойчива ($\mu(\xi^-) > 1$). Начальное значение ξ_j является действительным, так что последовательность ξ_j всегда сходится к ξ^+ .

При этом последовательность u_j образует геометрическую прогрессию, т. е. u_j убывают экспоненциально с ростом j , как это и должно быть для закритических мод. Результаты (45) и (46) имеют наглядную геометрическую интерпретацию, представленную на рис. 6. Задав начальное значение ξ_{J-1} , можно по графику найти ξ_{J-2} . Затем это значение с помощью биссектрисы переносится на ось абсцисс и процедура повторяется. Возникает своеобразная лесенка, иллюстрирующая ход итераций.

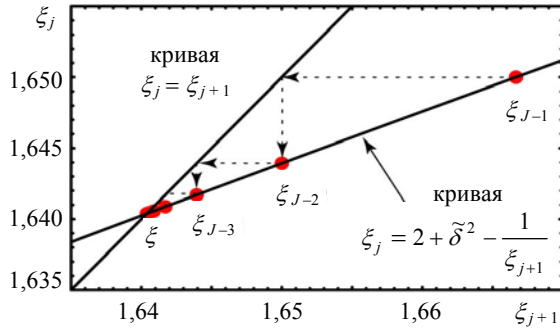


Рис. 6. Итерационная диаграмма отображения (43) для нераспространяющихся мод. Волновое число $\delta = 0,5i$

В случае распространяющихся мод волновое число δ действительно, и из физических соображений мы требуем, чтобы выполнялось условие $\delta \ll 1$: масштаб, на котором строится решение, должен быть меньше длины волны. Из (45) находим, что неподвижные точки являются комплексными величинами

$$\xi^\pm = (2 - \tilde{\delta}^2 \pm i\tilde{\delta}\sqrt{4 - \tilde{\delta}^2}).$$

Они являются устойчивыми, но не притягивающими, поскольку $\mu(\xi^\pm) = 1$. Это означает, что точки ξ_j лежат на окружности в комплексной плоскости с центром в точке ξ^- и радиусом $R = |\xi_{j-1} - \xi^-| \approx 3\delta^3/8$ ($\delta \ll 1$), поскольку начальное значение ξ_{j-1} является комплексным (рис. 7). Величина $|u_j|$ осциллирует вокруг некоторого среднего значения, равного $1/|\xi_{j-1}| \approx 1 + \delta^4$ с амплитудой осцилляций $2R$. Точное решение (41) колеблется вокруг аналитического решения (41) с амплитудой $2R$ и превышает точное решение в среднем на величину δ^4 .

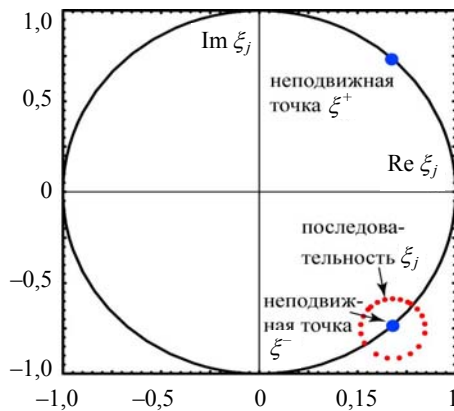


Рис. 7. Положение точек последовательности ξ_j на комплексной плоскости, случай распространяющихся мод. Для наглядности выбрано большое значение $\delta = 0,8$

Аналогичным образом можно показать, что метод прогонки устойчив также и для системы (2). Следовательно, численные ошибки в методе прогонки не нарастают при использовании граничных условий излучения. Это связано с тем, что начальное значение ξ_{j-1} есть комплексная величина и последовательность ξ_j лежит на окружности в комплексной плоскости. Последнее обстоятельство является принципиально важным. Так, если выбрать на правом конце интервала модельное граничное условие в виде $du/dz|_{z=L} = 0$, то начальное значение $\xi_{j-1} = 1$ будет при этом действительным.

Последовательность ξ_j из-за этого не ограничена и численные ошибки нарастают. Метод прогонки может приводить к неприемлемым погрешностям. Вторым важным вопросом относительно численного моделирования, который мы обсудим, является сходимость фурье-разложения (1). Зависимость амплитуд первых нескольких нечетных мод от продольной координаты представлена на рис. 8.

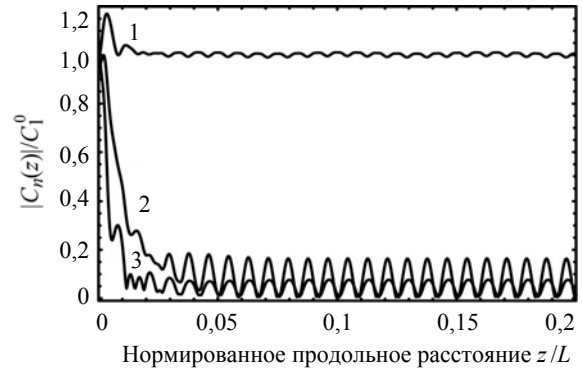


Рис. 8. Зависимость нормированной амплитуды моды от нормированной продольной координаты: 1 – амплитуда $|C_1(z)|/C_1^0$; 2 – амплитуда $|C_3(z)|/C_3^0$; 3 – амплитуда $|C_5(z)|/C_5^0$. Параметры: $w_0 = \lambda$; $d = \lambda/12$; $L = 10\lambda$; $\varepsilon = 0,1$; $C_n^0 = 1$; $n = 1, 3, 5 \dots$

Напомним, что моды с нечетными и четными вариациями по y не связаны виду симметрии волновода. Результаты на рис. 8 получены для таких параметров задачи, при которых в соответствующем регулярном волноводе только первая мода является распространяющейся, а остальные – нет (средняя ширина волновода равна длине волны, $w_0 = \lambda$). Однако в волноводе с острым гофром амплитуды высших мод не спадают экспоненциально от края системы вглубь, а носят осциллирующий характер, как это и предсказывается аналитическими расчетами (см. (18), (19), (36) и (39)). Другими словами, выраженное разделение мод на распространяющиеся и нераспространяющиеся по признаку экспоненциального

спадания амплитуды в волноводе с острым гофром отсутствует. При моделировании необходимо учитывать все моды, для которых выполнено условие $\bar{k}_n^2 = (k^2 - n^2\pi^2/w_0^2) > 0$, и обычно 5–8 мод, для которых $\bar{k}_n^2 = (k^2 - n^2\pi^2/w_0^2) < 0$. Амплитуды последней группы мод быстро убывают с номером моды, и каждая последующая амплитуда, как правило, в 2–3 раза меньше предыдущей (рис. 9).

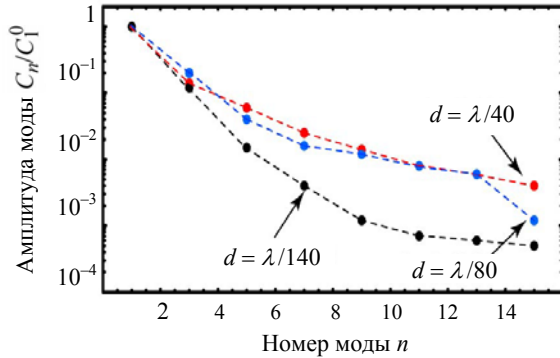


Рис. 9. Нормированные амплитуды мод как функции номера мод. Параметры моделирования: $w_0 = \lambda$; $d = \lambda/12$; $L = 10\lambda$; $\varepsilon = 0,1$; $C_1^0 = 1$; $C_n^0 = 0$, $n > 1$. Ось ординат представлена в логарифмическом масштабе

Таким образом, начиная с некоторого критического номера моды n_{cr} , для которого $\bar{k}_{n_{cr}}^2 < 0$, амплитуды ведут себя подобно членам убывающей геометрической прогрессии, и естественно ожидать, что бесконечный ряд (1) сходится. Подчеркнем, что учет мод с $\bar{k}_n^2 < 0$ является принципиально важным, поскольку эти моды дают существенный вклад в продольное волновое число и без их учета результат оказывается неправильным даже качественно (сравнить разд. 2 и 3).

Заметим, что прямое численное решение уравнения Гельмгольца методом сеток в холодном нерегулярном волноводе не вызывает принципиальных трудностей, хотя и является нетривиальным, если физическая постановка задачи требует использования условий излучения в начале и конце пространства взаимодействия [20]. Однако как продолжение данного исследования предполагается провести моделирование лазера на свободных электронах с гофрированным волноводом. В этом случае при самосогласованном моделировании электронно-волнового взаимодействия численный расчет по методу сеток неэффективен ввиду большого объема вычислений.

Электронный пучок, как правило, занимает только часть объема взаимодействия, поэтому достаточно вычислять значения полей только в местах нахождения зарядов, в то время как при применении сеточных методов с неизбежностью

приходится рассчитывать поле во всем объеме. Также отметим, что при оптимизации микроволновых источников граничные условия на возбуждаемые поля ставятся в сечении, которое заранее не определено, а вычисляется в ходе самосогласованного решения уравнений движения и уравнений для возбуждаемого поля. Поэтому для решения подобного класса задач эффективным оказалось сведение трехмерной краевой задачи к связанной системе обыкновенных дифференциальных уравнений типа (2) [1, 2].

Выводы. Установлено, что путем нанесения острой периодической гофрировки на боковую поверхность волновода можно изменять его модовый состав, управляя частотами отсечек мод за счет изменения остроты (крутизны) неоднородностей. Для описания этого эффекта предложен оригинальный аналитический подход для изучения распространения волн в отрезке волновода с острым гофром и граничными условиями типа условий излучения. Используя локальное фурье-разложение по поперечной координате, двумерная краевая задача сводится к бесконечной системе связанных обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд мод. Эта система в свою очередь решена методом разделения масштабов. В результате в замкнутом аналитическом виде найдены постоянные распространения и амплитуды мод. Показано, что при сильном градиентном рассеянии функциональные зависимости продольных волновых чисел от частоты в гофрированном и регулярном волноводах являются одинаковыми. Однако частоты отсечек мод в гофрированном волноводе расположены неэквидистантно, и их смещение в высокочастотную область растет с уменьшением периода гофра. Смещение частоты отсечки оказывается тем сильнее, чем большим является номер моды. При этом разность между $(n+1)$ -й и n -й частотами отсечек больше, чем разность между n -й и $(n-1)$ -й частотами. Тот факт, что введение связи в консервативную динамическую систему может лишь увеличить интервал между нормальными частотами системы, хорошо известен для двумерных систем. В нашем случае это утверждение оказывается справедливым для бесконечномерной динамической системы (2), в которой роль связи играет степень модуляции гофра.

Эффект неэквидистантного расположения частот отсечек может быть использован для реализации одномодового режима в микроволновых усилителях, а также в узкополосных генераторах с брэгговскими отражателями. Кривая усиления обычно имеет конечную ширину, и для избежания взаимодействия с высшими модами, необходимо, чтобы эти моды не попадали в полосу усиления. В то же время частота рабочей моды, при которой достигается максимальный КПД,

лежит на относительном расстоянии порядка $1/4$ от нижней границы кривой усиления. Поэтому очевидно, что частоты отсечек необходимо сдвигать непропорционально номеру моды.

Для численного решения системы (2) нами был использован метод прогонки. Этот метод учитывает ленточную структуру матрицы, получаемой из конечноразностного представления системы (2), и является весьма эффективным как с точки зрения количества вычислительных операций, так и с позиции экономности вычислительных ресурсов [16, 17]. Устойчивость этого метода зависит от явного вида граничных условий, и нами выведено условие устойчивости применительно к граничным условиям (6) и показано, что метод прогонки с условиями типа условий излучения абсолютно устойчив и может быть применен к системе (2).

1. Гуляев Ю. В. Усилители на основе эффекта Вавилова-Черенкова с нерегулярными электродинамическими структурами / Ю. В. Гуляев, В. Ф. Кравченко, А. А. Кураев // Успехи физ. наук. – 2004. – 174, № 6. – С. 639–655.
2. Батура М. П. Основы теории, расчета и оптимизации современных электронных приборов СВЧ / М. П. Батура, А. А. Кураев, А. К. Сеницын. – Минск: Белорусский гос. ун-т информатики и радиоэлектрон., 2007. – 245 с.
3. Makarov N. M. Electron localization in narrow surface-corrugated conducting channels: Manifestation of competing scattering mechanism / N. M. Makarov, Yu. V. Tarasov // Phys. Rev. B. – 2001. – 64, N 23. – P. 235306(1–14).
4. FEL's with Bragg reflection resonators: cyclotron autoresonance masers versus ubitrons / V. L. Bratman, G. G. Denisov, N. S. Ginzburg, M. I. Petelin // IEEE J. Quant. Electr. – 1983. – QE-19, N 3. – P. 282–296.
5. Денисов Г. Г. Гофрированные цилиндрические резонаторы для коротковолновых релятивистских СВЧ генераторов / Г. Г. Денисов, М. Г. Резников // Изв. вузов. Радиофизика. – 1982. – 25, № 5. – С. 562–569.
6. Single-mode operation of a Bragg Free-electron maser oscillator / T. S. Chu, F. V. Hartemann, B. G. Danly, R. J. Temkin // Phys. Rev. Letters. – 1994. – 72, N 15. – P. 2391–2395.
7. Electrodynamic properties of two-dimensional Bragg resonators of planar geometry / A. V. Arzhanniko, N. S. Ginzburg, P. V. Kalinin et al. // Optics Communications. – 2001. – 187, N 4–6. – P. 311–317.
8. Петров П. В. Теория одномерных брэгговских резонаторов планарной геометрии / П. В. Петров // Журн. техн. физики. – 2002. – 72, вып. 2. – P. 1–7.
9. Лапшин В. И. Дисперсионное соотношение для резонатора с синусоидально гофрированными металлическими стенками, наполненного холодной плазмой / В. И. Лапшин, А. Ф. Стоянов, И. В. Ткаченко // Вісн. Харк. ун-ту. – 2005. – № 664, вып. 2. – С. 27–32.
10. Approach to a Coaxial Arbitrary-Shaped Groove Cylindrical Waveguide for Application in Wideband Gyro-TWTs / L. Yue, W. Wang, Y. Wei, Y. Gong // IEEE transactions of plasma science. – 2007. – 35, N 3. – P. 551–558.
11. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
12. Заславский Г. М. Введение в нелинейную физику / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. – М.: Наука, 1998. – 368 с.

13. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
14. Esteban J. Characterization of corrugated waveguides by modal analysis / J. Esteban, J. M. Rebolgar // IEEE transactions on Microwave Theory Tech. – 1991. – 39, N 6. – P. 937–943.
15. Moler C. The Thomas Algorithm. / C. Moler // Numerical Analysis Digest. – 1996. – 96, iss. 09.
16. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
17. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон; пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 420 с.
18. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
19. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах / В. С. Анищенко. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
20. Ильгамов М. А. Неотражающие условия на границах расчетной области / М. А. Ильгамов, А. Н. Гильманов. – М.: Физматлит, 2003. – 240 с.

V. A. Goryashko, T. M. Slipchenko, Yu. V. Tarasov

WAVE INTERACTION IN A WAVEGUIDE SECTION WITH SHARP CORRUGATION

Using rigorous excitation equations we have analyzed the wave propagation in a rectangular waveguide section with sharp corrugation, the ratio of the corrugation height to its period is much more than unity. We have shown the strong gradient scattering to result in that the Brillouin diagram of the corrugated and regular waveguides have the same character of the longitudinal wave number–frequency dependence. The difference is just that the cutoff frequencies of the corrugated waveguide modes increase with decreasing of the corrugation period and there can be always realized single-mode regime in the arbitrary frequency region that is located higher than the first cutoff frequency. The phenomenon can be used for suppression of the mode competition in microwave amplifiers as well as in the narrow-band generators, if Bragg reflectors are used there as feedback.

Key words: irregular waveguide, strong gradient scattering, cutoff frequency.

V. O. Goryashko, T. M. Slipchenko, Yu. V. Tarasov

ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ВІДРІЗКУ ХВИЛЕВОДУ З ГОСТРИМ ГОФРОМ

Використовуючи строгі рівняння збудження, проаналізовано поширення хвиль у відрізку прямокутного хвилеводу з гострим періодичним гофром, для якого відношення висоти до періоду значно більше одиниці. Показано, що при сильному градієнтному розсіянні діаграма Бріллоуєна гофрованого й регулярного хвилеводів мають якісно однаковий характер залежності поперечної хвильової частоти від частоти. Відмінність полягає в тому, що частоти відсічок мод гофрованого хвилеводу збільшуються зі зменшенням періоду гофра й у довільному частотному діапазоні, що лежить вище першої частоти відсічки, завжди можна реалізувати одномодовий режим. Це явище може бути використане для заглушення конкуренції мод у мікрохвильових підсилювачах, а також у вузькосмугових генераторах, якщо в останніх як зворотний зв'язок використовувати бреггівські відбивачі.

Ключові слова: нерегулярний хвилевід, сильне градієнтне розсіяння, частота відсічки.

Рукопись поступила 22.02.11 г.