

А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук

РЕЗОНАНСНОЕ РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА СТРУКТУРЕ ФЕРРИТ–ЛЕНТОЧНАЯ РЕШЕТКА–МЕТАМАТЕРИАЛ

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: melezhhik@ire.kharkov.ua*

Краевая задача дифракции плоской электромагнитной волны на слое феррит–ленточная решетка–слой метаматериала сведена к задаче Римана-Гильберта с коэффициентом сопряжения, зависящим от частоты падающей волны, материальных параметров феррита и метаматериала. Предложен метод аналитической регуляризации, с помощью которого эта задача редуцирована к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с ядерным матричным оператором. Проведен численный анализ частотной зависимости коэффициента отражения для исследуемой периодической структуры. Установлены диапазоны частот, где коэффициент отражения имеет ярко выраженный резонансный характер. Такое поведение коэффициента отражения обусловлено возбуждением колебаний, локализованных у границ раздела сред. Ил. 6. Библиогр.: 20 назв.

Ключевые слова: дифракция, ферритовый слой, ленточная периодическая решетка, слой метаматериала, система парных сумматорных уравнений, метод аналитической регуляризации, коэффициент отражения, дифракционные поля.

До настоящего времени не ослабевает интерес к исследованию дифракции электромагнитных волн на ленточных решетках и границах раздела различных сред [1–12]. Так была рассмотрена задача дифракции при нормальном падении плоской произвольно поляризованной электромагнитной волны на бесконечно тонкой идеально проводящей ленточной решетке, расположенной на слое изотропного диэлектрика [1]. Дифракционное поле в случае произвольного соотношения между длиной волны, шириной ленты, толщиной слоя и периодом решетки находилось с помощью метода задачи Римана-Гильберта. В итоге были получены приближенные формулы для расчета коэффициентов прохождения и отражения, а также приведены результаты расчетов по этим формулам. В работе [2] получено решение задачи дифракции электромагнитной волны на плоской металлической решетке с экраном и изотропным магнитодиэлектриком. Здесь исходная краевая задача дифракции сведена к двум неоднородным задачам сопряжения. Приведены формулы для расчетов коэффициента отражения и амплитуд дифракционных спектров без наложения каких-либо ограничений на период решетки, коэффициент заполнения, расстояние от решетки до экрана, проницаемости магнитодиэлектрика и длину волны падающего поля. Строгому решению задачи дифракции электромагнитных волн на металлической решетке, расположенной на полубесконечной диэлектрической анизотропной среде, посвящена работа [3]. В связи с тем что тензор, описывающий анизотропный диэлектрик – диагональный, то исходная задача дифракции свелась к системе парных сумматорных уравнений, аналогичной полученной в работе [1], что дало возможность применить стандартную процедуру метода задачи Римана-Гильберта.

Работа [4] посвящена решению задачи дифракции плоской электромагнитной E -поляризованной волны на металлической решетке с гиромангнитной средой, а [5] – решению задачи дифракции плоской электромагнитной E -поляризованной волны на экранированной решетке с поперечно намагниченным ферритом. В работах [4, 5] какая-либо прослойка между плоскостью решетки и анизотропной средой отсутствовала. Кроме того, тензоры, характеризующие гиромангнитные среды, в отличие от [3], были недиагональными. Эти особенности приводят к тому, что краевые задачи дифракции в терминах уравнений Гельмгольца сводятся в итоге к системам парных сумматорных уравнений специального вида, отличных от приведенных, например, в работе [1]. Другими словами, процедура аналитической регуляризации, приведенная в [1], к системам такого вида неприменима.

В последнее время в ряде работ [6–12] предложены эффективные алгоритмы решения задач дифракции волн на ленточных решетках, находящихся на границах раздела различных анизотропных (гиротропных), а также биизотропных (киральных) сред. В основе этих алгоритмов лежит идея аналитической регуляризации парных сумматорных уравнений [12]. В частности, с помощью этих алгоритмов решена задача дифракции наклонно падающей плоской волны на ленточной решетке, расположенной на границе ферромагнитного полупространства [11]. Основная цель настоящей работы – обобщение метода [11] на задачи дифракции плоских волн на структурах вида ферритовый слой–ленточная периодическая решетка–слой метаматериала, включая случаи, когда диэлектрическая и магнитная проницаемости принимают отрицательные значения.

1. Постановка задачи и метод решения.

Построим процедуру регуляризации для решения задачи дифракции монохроматических плоских электромагнитных волн на бесконечной решетке, образованной идеально проводящими бесконечно тонкими лентами, расположенными в плоскости YOZ параллельно оси OZ (рис. 1).

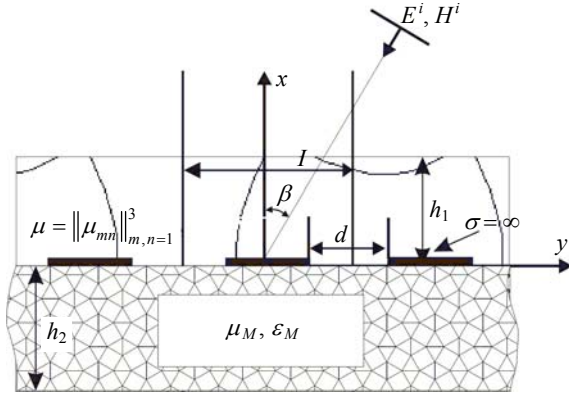


Рис. 1. Геометрия задачи

Вектор напряженности электрического поля возбуждающей волны параллелен оси OZ. Период решетки – l , а ширина щелей – d . Слой $0 < x < h_1$ над решеткой заполнен однородной гиротропной ферромагнитной средой (феррит). Эта среда находится в постоянном магнитном поле \vec{H}_0 , параллельном оси OZ. В этом случае магнитная проницаемость такой среды является тензором второго ранга следующего вида [13]:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\mu_1 = 1 - \frac{f_M(f_H^2 + f_R^2 - iff_R)}{f_H(f^2 - f_H^2 - f_R^2 + 2iff_R)}$;

$$\mu_2 = \frac{ff_M}{f^2 - f_H^2 - f_R^2 + 2iff_R}; \quad \mu_3 = 1 + \frac{if_M f_R}{f_H(f + if_R)}.$$

Здесь f – частота возбуждающей волны (зависимость от времени принята в виде $\exp(-i2\pi ft)$); $f_H = |\gamma|H_0/2\pi$ – частота ферромагнитного резонанса; $f_M = 2|\gamma|M_0$ – частота, характеризующая намагниченность среды (γ – гиромагнитное отношение для электрона, M_0 – намагниченность насыщения); f_R – частота релаксации. Диэлектрическая проницаемость ферромагнитной среды полагается равной ε .

Слой $-h_2 < x < 0$ под решеткой заполнен метаматериалом с диэлектрической и магнитной

проницаемостями, зависящими от частоты следующим образом [14]:

$$\varepsilon_M = 1 - \frac{f_\varepsilon^2}{f(f + iv_\varepsilon)}, \quad \mu_M = 1 - \frac{f_\mu^2 - f_0^2}{f(f + iv_\mu) - f_0^2}, \quad (2)$$

где f_ε, f_μ и f_0 – характеристические частоты, определяемые параметрами структурных элементов, из которых образован метаматериал; v_ε и v_μ – частотные параметры, отвечающие за потери.

Пусть в полупространстве $x > h_1$ распространяется плоская E-поляризованная монохроматическая электромагнитная волна (вектор напряженности электрического поля параллелен оси OZ) $E_z^i = \exp[-ik(x \cos \beta + y \sin \beta)]$, где $k = 2\pi f/c$, β – угол падения (рис. 1).

Задача состоит в определении дифракционного поля, возбуждаемого этой волной. Поскольку падающая волна не зависит от пространственной переменной z , а ленты решетки бесконечны и однородны вдоль оси OZ, то естественно предположить, что искомое дифракционное поле тоже не зависит от переменной z и является E-поляризованным. Следовательно, вектор напряженности электрического поля имеет только компоненту E_z^∂ .

Введем функцию $U(x, y)$ таким образом:

$$U(x, y) = \begin{cases} E_z^i + E_z^\partial, & x > h_1; \\ E_z^\partial, & x < h_1. \end{cases} \quad (3)$$

Как следует из системы уравнений Максвелла, эта функция должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta U + k^2(x)U = 0, \quad (4)$$

где

$$k(x) = k^2 \begin{cases} 1, & x > h_1, \quad x < -h_2; \\ \varepsilon\mu_\perp, & 0 < x < h_1; \\ \varepsilon_M\mu_M, & -h_2 < x < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\mu_\perp = (\mu_1^2 - \mu_2^2)/\mu_1$ – эффективная магнитная проницаемость ферритового слоя.

На границах раздела сред функция $U(x, y)$ должна удовлетворять условиям сопряжения (непрерывность тангенциальных компонент электромагнитного поля):

$$U|_{x=h_1+0} = U|_{x=h_1-0},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=h_1+0} = \frac{1}{\mu_\perp} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \Big|_{x=h_1-0}; \quad (6)$$

$$U|_{x=-h_2+0} = U|_{x=-h_2-0},$$

$$\frac{1}{\mu_M} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=-h_2+0} = \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=-h_2-0}; \quad (7)$$

$$U|_{x=0+0} = U|_{x=0-0},$$

$$\frac{1}{\mu_{\perp}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \Big|_{x=0+0} = \frac{1}{\mu_M} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0+0}. \quad (8)$$

На лентах решетки потребуем обращения в нуль тангенциальной компоненты электрического поля

$$U|_{x=0-0} = U|_{x=0+0} = 0. \quad (9)$$

Кроме того, так как ленты решетки имеют ребра, то следует потребовать выполнение условия

$$\int_Q |\nabla U|^2 dx dy < \infty \text{ для любой ограни-$$

ченной области Q . В полупространствах $x > h_1$ и $x < -h_2$ функция $U(x, y)$ должна удовлетворять условию излучения

$$U(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i \frac{2\pi}{l} \Gamma_{n1} x} e^{i \frac{2\pi}{l} n y} + E_z^i, & x > h_1; \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{-i \frac{2\pi}{l} \Gamma_{n1} x} e^{i \frac{2\pi}{l} n y}, & x < -h_2, \end{cases} \quad (10)$$

где ветви корней $\Gamma_{n1} = \sqrt{\kappa^2 - \Phi_n^2}$; $\Phi_n = n + \kappa \sin \beta$;

$\kappa = \frac{l}{\lambda}$ ($\lambda = \frac{c}{f}$ – длина волны возбуждающего поля), выбраны следующим образом:

$$\operatorname{Re} \Gamma_{n1} \geq 0, \quad \operatorname{Im} \Gamma_{n1} \geq 0. \quad (11)$$

Легко показать, что через функцию $U(x, y)$ компоненты H_x и H_y магнитного поля могут быть представлены как

$$H_x = \frac{1}{ik} \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial y}, & x > h_1, \quad x < -h_2; \\ \frac{1}{\mu_{\perp}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + i \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial U}{\partial x} \right), & 0 < x < h_1; \\ \frac{1}{\mu_M} \frac{\partial U}{\partial y}, & -h_2 < x < 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$H_y = -\frac{1}{ik} \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}, & x > h_1, \quad x < -h_2; \\ \frac{1}{\mu_{\perp}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial U}{\partial y} \right), & 0 < x < h_1; \\ \frac{1}{\mu_M} \frac{\partial U}{\partial x}, & -h_2 < x < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Таким образом, задача состоит в определении функции $U(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (4) и граничным условиям (6)–(11). Решение этой задачи будем искать методом частичных областей.

Введем следующие области:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) : x > h_1, -\infty < y < +\infty\}; \\ D_2 &= \{(x, y) : 0 < x < h_1, -\infty < y < +\infty\}; \\ D_3 &= \{(x, y) : -h_2 < x < 0, -\infty < y < +\infty\}; \\ D_4 &= \{(x, y) : x < -h_2, -\infty < y < +\infty\}. \end{aligned}$$

В каждой из этих областей функцию $U(x, y)$ представим в виде ряда Фурье по переменной y . Тогда, учитывая условия излучения (10) и уравнение (4), имеем

$$U(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i \frac{2\pi}{l} \Phi_n y} e^{i \frac{2\pi}{l} \Gamma_{n1} x} + e^{-ik(x \cos \beta + y \sin \beta)}, & (x, y) \in D_1; \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{l} \Phi_n y} \left(b_n^1 e^{-i \frac{2\pi}{l} \Gamma_{n2} x} + b_n^2 e^{i \frac{2\pi}{l} \Gamma_{n2} x} \right), & (x, y) \in D_2; \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{l} \Phi_n y} \left(c_n^1 e^{-i \frac{2\pi}{l} \Gamma_{n3} x} + c_n^2 e^{i \frac{2\pi}{l} \Gamma_{n3} x} \right), & (x, y) \in D_3; \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{i \frac{2\pi}{l} \Phi_n y} \left(e^{-i \frac{2\pi}{l} \Gamma_{n1} x} \right), & (x, y) \in D_4, \end{cases} \quad (14)$$

где $\Gamma_{n2} = \sqrt{\kappa^2 \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} - \Phi_n^2}$; $\Gamma_{n3} = \sqrt{\kappa^2 \varepsilon_M \mu_M - \Phi_n^2}$, а коэффициенты $a_n, d_n, b_n^1, b_n^2, c_n^1$ и c_n^2 являются неизвестными величинами, которые следует определить из граничных условий (6)–(9).

Подставляя (14) в (6)–(9), после ряда преобразований получаем систему парных сумматорных уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\nu) y_n e^{in\varphi} - b \sum_{n=-\infty}^{-1} (n+\nu) y_n e^{in\varphi} = \quad (15)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\varphi}, \quad |\varphi| < \varphi_0;$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n+\nu) y_n e^{in\varphi} = 0, \quad |\varphi| > \varphi_0; \quad (16)$$

$$\sum_{n \neq 0} (-1)^n y_n = -y_0, \quad (17)$$

где $\varphi = \frac{2\pi y}{l}$; $\varphi_0 = \frac{\pi d}{l}$; $b = \frac{\mu_{\perp} + \mu_M(1 + \mu_2/\mu_1)}{\mu_{\perp} + \mu_M(1 - \mu_2/\mu_1)}$;
 $\nu = \kappa \sin \beta - [\kappa \sin \beta]$, а символ [...] обозначает
 целую часть числа $\kappa \sin \beta$. Коэффициенты f_n
 выражаются через коэффициенты y_n по формуле

$$f_n = \left[|n + \nu| b_n + \frac{i \mu_M \mu_{\perp}}{\mu_{\perp} + \mu_M(1 - \mu_2/\mu_1)} K_n \right] y_n - g_{n_0} \delta_{nn_0}.$$

Здесь $b_n = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ b, & n < 0; \end{cases}$ $\delta_{nn_0} = \begin{cases} 1, & n = n_0; \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$ – сим-
 вол Кронекера; $n_0 = [\kappa \sin \beta]$, а величины K_n
 имеют вид

$$K_n = \frac{\Gamma_{n_3}^{\nu}}{\mu_M} K_{1n} - \frac{1}{\mu_{\perp}} K_{2n},$$

где

$$K_{1n} = \frac{\Gamma_{n_3}^{\nu} + \mu_M \Gamma_{n_1}^{\nu} - (\Gamma_{n_3}^{\nu} - \mu_M \Gamma_{n_1}^{\nu}) \exp\left(i \frac{4\pi h_2}{l} \Gamma_{n_3}^{\nu}\right)}{\Gamma_{n_3}^{\nu} + \mu_M \Gamma_{n_1}^{\nu} + (\Gamma_{n_3}^{\nu} - \mu_M \Gamma_{n_1}^{\nu}) \exp\left(i \frac{4\pi h_2}{l} \Gamma_{n_3}^{\nu}\right)};$$

$$K_{2n} = \frac{\alpha_n^+ (\alpha_n^- - \mu_{\perp} \Gamma_{n_1}^{\nu}) \exp\left(i \frac{4\pi h_1}{l} \Gamma_{n_2}^{\nu}\right) - \alpha_n^- (\alpha_n^+ + \mu_{\perp} \Gamma_{n_1}^{\nu})}{\alpha_n^+ + \mu_{\perp} \Gamma_{n_1}^{\nu} + (\alpha_n^- - \mu_{\perp} \Gamma_{n_1}^{\nu}) \exp\left(i \frac{4\pi h_1}{l} \Gamma_{n_2}^{\nu}\right)};$$

$$\alpha_n^{\pm} = \Gamma_{n_2}^{\nu} \pm i(n + \nu) \mu_2 / \mu_1; \quad \Gamma_{n_1}^{\nu} = \sqrt{\kappa^2 - (n + \nu)^2};$$

$$\Gamma_{n_2}^{\nu} = \sqrt{\kappa^2 \varepsilon \mu_{\perp} - (n + \nu)^2}; \quad \Gamma_{n_3}^{\nu} = \sqrt{\kappa^2 \varepsilon_M \mu_M - (n + \nu)^2}.$$

Величины g_{n_0} можно представить следующим
 образом:

$$g_{n_0} = \frac{2i \mu_M \Gamma_{2n_0}^{\nu} (\beta_{n_0}^+ \gamma_{n_0}^- - \beta_{n_0}^- \gamma_{n_0}^+)}{\left(\mu_M + \mu_{\perp} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \mu_M \right) (\beta_{n_0}^+ + \beta_{n_0}^-)},$$

где $\beta_n^{\pm} = 0,5 \frac{\alpha_n^{\pm} \pm \mu_{\perp} \Gamma_{n_1}^{\nu}}{\Gamma_{n_2}^{\nu}} \exp\left(\mp i \frac{2\pi h_1}{l} \Gamma_{n_2}^{\nu}\right)$;

$$\gamma_{n_0}^{\pm} = \beta_{n_0}^{\pm} \frac{\alpha_{n_0}^{\pm} \mp \mu_{\perp} \Gamma_{n_0 1}^{\nu}}{\alpha_{n_0}^{\pm} \pm \mu_{\perp} \Gamma_{n_0 1}^{\nu}}.$$

Коэффициенты разложения функции $U(x, y)$ в
 ряды Фурье связаны с коэффициентами y_n соот-
 ношениями

$$d_n = \frac{y_{n+n_0}}{\delta_n^+ + \delta_n^-}, \quad a_n = \frac{y_{n+n_0}}{\beta_n^+ + \beta_n^-} - \frac{\gamma_0^+ + \gamma_0^-}{\beta_0^+ + \beta_0^-} \delta_{0n},$$

$$c_n^1 = \frac{\delta_n^+ y_{n+n_0}}{\delta_n^+ + \delta_n^-}, \quad c_n^2 = \frac{\delta_n^- y_{n+n_0}}{\delta_n^+ + \delta_n^-}, \quad (18)$$

$$b_n^1 = \beta_n^- a_n + \gamma_0^- \delta_{0n},$$

$$b_n^2 = \beta_n^+ a_n + \gamma_0^+ \delta_{0n}.$$

Здесь

$$\delta_n^{\pm} = 0,5 \left(1 \pm \mu_M \frac{\Gamma_{n_1}}{\Gamma_{n_3}} \right) \exp\left(\mp i \frac{2\pi h_2}{l} \Gamma_{n_3}\right),$$

$$\beta_n^{\pm} = 0,5 \left(1 \pm i \frac{\mu_2}{\mu_1 \Gamma_{n_2}} \pm \frac{\mu_{\perp} \Gamma_{n_1}}{\Gamma_{n_2}} \right) \exp\left(\mp i \frac{2\pi h_1}{l} \Gamma_{n_2}\right),$$

$$\gamma_0^{\pm} = 0,5 \frac{\alpha_0^{\pm} \mp \mu_{\perp} \Gamma_{01}}{\Gamma_{02}} \exp\left(\mp i \frac{2\pi h_1}{l} \Gamma_{02}\right).$$

Покажем, что система парных сумматор-
 ных уравнений (15)–(17) эквивалентна бесконеч-
 ной системе линейных алгебраических уравнений
 второго рода относительно коэффициентов
 y_n , $n = 0, \pm 1, \dots$. Прежде всего заметим, что при
 $\nu = \kappa \sin \beta - [\kappa \sin \beta] = 0$ система уравнений (15)–(17)
 аналогична ранее исследованной системе уравне-
 ний в работе [10], где предложен алгоритм регу-
 ляризации такого типа парных уравнений.
 Основным элементом этого алгоритма является
 построение в замкнутой форме решения «эталон-
 ных» уравнений. В нашем случае «эталонные»
 уравнения получаются из (15)–(17), если предпо-
 ложить, что коэффициенты f_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 являются известными величинами. Используя
 результаты, представленные в работе [11], полу-
 чим решение этих уравнений. Пусть y_n ,
 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – искомое решение. Введем функ-
 цию $Y(z)$ комплексного переменного z по фор-
 муле

$$Y(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} (n + \nu) y_n z^n, & |z| < 1; \\ - \sum_{n=-\infty}^{-1} (n + \nu) y_n z^n, & |z| > 1. \end{cases} \quad (19)$$

Функция $Y(z)$ является аналитической в ком-
 плексной плоскости с разрезом вдоль дуги L
 единичной окружности, которая соединяет точки
 $e^{-i\varphi_0}$ и $e^{i\varphi_0}$, проходящей через точку $z = 1$. Обо-
 значим через $Y^+(z)$ и $Y^-(z)$ предельные значе-
 ния этой функции на дуге L , соответственно, из-
 нутри и извне круга $|z| < 1$. Тогда из уравнения (15)
 имеем

$$Y^+(z) + bY^-(z) = F(z), \quad z \in L, \quad (20)$$

где $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n z^n$.

Таким образом, необходимо определить аналитическую функцию $Y(z)$, а следовательно, и коэффициенты $y_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ по условию (20). Это хорошо известная задача Римана-Гильберта теории аналитических функций [15]. Решение этой задачи в классе функций, допускающих интегрируемую особенность на концах дуги L и убывающих при $z \rightarrow \infty$, имеет следующий вид [15]:

$$Y(z) = G(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t) dt}{G^+(t)(t-z)} + C \right], \quad (21)$$

где $G(z) = (z - e^{i\varphi_0})^{-1/2 - i\eta} (z - e^{-i\varphi_0})^{-1/2 + i\eta}$ – каноническое решение однородной задачи, соответствующей (20) ($F(z) \equiv 0$), а параметр $\eta = \frac{\ln b}{2\pi}$,

$b = \frac{\mu_{\perp} + \mu_M(1 + \mu_2 / \mu_1)}{\mu_{\perp} + \mu_M(1 - \mu_2 / \mu_1)}$; C – произвольная постоянная величина; $G^+(t)$ – предельное значение на дуге L функции $G(z)$ изнутри круга $|z| < 1$.

С помощью (21) и результатов из работы [11] после ряда преобразований получаем выражение для коэффициентов $y_m (m = 0, \pm 1, \dots)$

$$y_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{mn} f_n, \quad (22)$$

где

$$R_{mn} = \begin{cases} \frac{P_{\sigma}}{1 + \nu P_{\sigma}} (\bar{V}_{0n} + \nu \bar{V}_n^{\sigma}) - \bar{V}_n^{\sigma}, & m = 0; \\ \bar{V}_{mn} - \frac{P_m(\eta, \varphi_0)}{1 + \nu P_{\sigma}} (\bar{V}_{0n} + \nu \bar{V}_n^{\sigma}), & m \neq 0. \end{cases} \quad (23)$$

Величины, входящие в (23), определяются следующим образом:

$$\bar{V}_{mn} = \begin{cases} \frac{e^{2\eta\varphi_0} (m+1)}{m-n} [P_m(\eta, \varphi_0) P_{n+1}(\eta, \varphi_0) - P_{m+1}(\eta, \varphi_0) P_n(\eta, \varphi_0)], & n \neq m, n \neq -1; \\ e^{2\eta\varphi_0} P_m(\eta, \theta) - P_{m+1}(\eta, \theta), & n = -1; \\ \sum_{q=0}^{n+1} R_{n+1-q}(\eta, \varphi_0) P_{q-n-1}(-\eta, \varphi_0), & m = n, n \geq 0; \\ - \sum_{q=0}^{-n-1} R_{-n-q-1}(-\eta, \varphi_0) P_{n+q+1}(\eta, \varphi_0), & m = n, n < 0. \end{cases}$$

Здесь функции $P_n(\eta, \varphi_0)$ и $R_n(\eta, \varphi_0)$ легко вычисляются с помощью рекуррентных формул

$$\begin{aligned} P_0(\eta, \varphi_0) &= 1, \quad P_1(\eta, \varphi_0) = \cos \varphi_0 + 2\eta \sin \varphi_0, \\ P_n(\eta, \varphi_0) &= \left[\left(2 - \frac{1}{n} \right) \cos \varphi_0 + \frac{2}{n} \eta \sin \varphi_0 \right] P_{n-1}(\eta, \varphi_0) - \\ &- \left(1 - \frac{1}{n} \right) P_{n-2}(\eta, \varphi_0), \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_0(\eta, \varphi_0) &= 1, \quad R_1(\eta, \varphi_0) = -\cos \varphi_0 + 2\eta \sin \varphi_0, \\ R_n(\eta, \varphi_0) &= P_n(\eta, \varphi_0) - 2 \cos \varphi_0 P_{n-1}(\eta, \varphi_0) + \\ &+ P_{n-2}(\eta, \varphi_0), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Для отрицательных значений индекса $n < 0$ имеем

$$P_n(\eta, \varphi_0) = e^{-2\eta\varphi_0} P_{|n|-1}(-\eta, \varphi_0).$$

Величины \bar{V}_n^{σ} и P_{σ} можно представить в виде рядов

$$\bar{V}_n^{\sigma} = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m + \nu} \bar{V}_{mn},$$

$$P_{\sigma} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \nu} P_n(\eta, \varphi_0).$$

Таким образом, формула (22) дает решение «эталонных» уравнений в замкнутой форме. Для того чтобы получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $y_n, n = 0, \pm 1, \dots$, достаточно подставить в (22) вместо f_n их выражения через y_n . Тогда получаем

$$y_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{mn} y_n + h_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2. \quad (24)$$

Матричные элементы в (24) имеют вид

$$H_{mn} = R_{mn} \delta_n; \quad (25)$$

$$\delta_n = |n + \nu| b_n + \frac{i\mu_M \mu_{\perp}}{\mu_M \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \mu_{\perp}} K_n, \quad (26)$$

а правые части

$$h_m = -R_{mn_0} g_{n_0},$$

где выражение для g_{n_0} приведено выше.

Используя асимптотические оценки для функции $P_n(\eta, \varphi_0)$ при $n \rightarrow \infty$, полученные в работе [9], можно установить сходимость двойного ряда

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} |R_{mn}|^2 < \infty. \quad (27)$$

Далее непосредственными вычислениями можно показать, что

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{|n + \nu|}\right)$$

при $|n| \rightarrow \infty$. Тогда, используя результаты [16], получаем, что матрица $\|H_{mn}\|_{m,n=-\infty}^{+\infty}$ задает в пространстве $l_2 = \left\{ (y_n)_{n=-\infty}^{+\infty} : \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y_n|^2 < \infty \right\}$ ядерный

оператор. Кроме того, для последовательности $h_m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ выполняется неравенство

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h_m|^2 < \infty.$$

Таким образом, на основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений (24) является системой уравнений второго рода и следовательно, ее решение может быть получено с любой наперед заданной точностью методом усечения (замена бесконечной системы уравнений на конечную) [17].

На основе предложенного метода решения задачи (4)–(11) был разработан комплекс программ для расчета дифракционных характеристик (коэффициента отражения и прохождения, дифракционное поле). Анализ сходимости метода усечения для бесконечной системы (24) показал, что, например, для расчета модуля коэффициента отражения (прохождения) с относительной погрешностью менее 1%, достаточно выбрать порядок усечения N системы уравнений (24) следующим образом:

$$N = \max\left([\kappa \sin \beta \sqrt{|\varepsilon \mu_{\perp}|}] + P_1; [\kappa \sin \beta \sqrt{|\varepsilon_M \mu_M|}] + P_2; [\kappa \sin \beta] + P_3\right),$$

где $P_1, P_2, P_3 \geq 5$, а $[...]$ – целая часть числа.

2. Численные результаты: резонансы коэффициента отражения. Численный анализ характеристик электромагнитного поля, возникающего при дифракции плоской E -поляризованной волны на структуре ферритовый слой–леночная решетка–слой метаматериала, проводился при следующих значениях параметров. Размеры толщин слоев феррита и метаматериала были выбраны одинаковыми $h_1 = h_2 = 1$ мм.

Характеристические частоты феррита и метаматериала (см (1) и (2)) соответствовали СВЧ-диапазону: феррита – $f_H = 14$ ГГц, $f_M = 13,4$ ГГц, $f_R = 0,016$ ГГц [18], мета-материала $f_{\varepsilon} = 18$ ГГц, $f_{\mu} = 15$ ГГц, $f_0 = 0$ ГГц [14]. Геометрические параметры ленточной решетки – период и ширина щелей были равны соответственно $l = 1,5$ мм и $d = 0,75$ мм ($d = 0,5l$). Предполагалось, что частота $f = \frac{\omega}{2\pi}$ возбуждающей волны удовлетворяет условию $lf/c < 1$ (c – скорость света в вакууме). В этом случае дифракционное поле в зонах отражения ($x > h_1$) и прохождения ($x < -h_2$) на

больших расстояниях ($xc/f \gg 1$) определяется единственной распространяющейся нулевой пространственной гармоникой. Остальные пространственные гармоники экспоненциально затухают с увеличением координаты x (см.(10)). Поэтому основными электродинамическими характеристиками, описывающими процесс взаимодействия плоской волны с рассматриваемой электродинамической структурой, являются коэффициенты отражения R и прохождения T (см. (14) $R = a_0, T = d_0$). При единичной амплитуде возбуждающей волны и в пренебрежении потерями в феррите и метаматериале эти коэффициенты связаны соотношением [19]

$$|R|^2 + |T|^2 = 1.$$

В дальнейшем ограничимся исследованием частотной зависимости модуля коэффициента отражения в диапазоне частот $0 < f < 30$ ГГц в котором расположены все характеристические частоты феррита и метаматериала. Видно, что для частот из этого диапазона выполняется неравенство $lf/c < 1$. На рис. 2 показаны частотные зависимос-

ти реальных частей диэлектрической ε_M и магнитной μ_M проницаемостей метаматериала и эффективной магнитной проницаемости μ_{\perp} феррита ($\mu_{\perp} = (\mu_1^2 - \mu_2^2) / \mu_1$) при $0 < f < 30$ ГГц. Как видно, в диапазоне частот, $0 < f < f_{\mu} < f_{\varepsilon}$ $\text{Re}(\varepsilon)$ и $\text{Re}(\mu)$ метаматериала принимают отрицательные значения, а $\text{Re}(\mu_{\perp})$ феррита является положительной величиной.

В диапазоне частот $\sqrt{f_H(f_H + f_M)} < f < f_H + f_M$ реальная часть эффективной магнитной проницаемости феррита становится отрицательной, а $\text{Re}(\varepsilon) > 0$ и $\text{Re}(\mu) > 0$. Ниже будет показано, что именно в этих диапазонах частот модуль коэффициента отражения резонансным образом зависит от частоты возбуждающей волны. Вне этих диапазонов частот наблюдается практически полное отражение падающей волны.

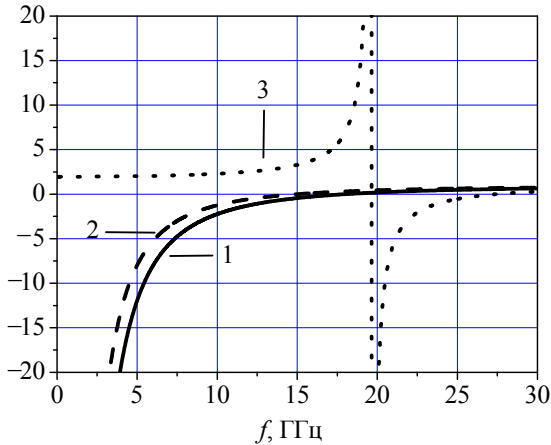


Рис. 2. Поведение $\text{Re}(\varepsilon_M)$ – 1, $\text{Re}(\mu_M)$ – 2, $\text{Re}(\mu_{\perp})$ – 3 при изменении частоты f возбуждающего поля

Рассмотрим поведение модуля коэффициента отражения $|R|$ в диапазоне частот $0 < f < f_{\mu}$. Как было отмечено выше, в этом диапазоне частот $\text{Re}(\varepsilon) < 0$, $\text{Re}(\mu) < 0$ и $\text{Re}(\mu_{\perp}) > 0$. На рис. 3 приведены результаты расчетов коэффициента отражения. Существует 3 значения частоты возбуждающей волны $f_1 = 7,464$ ГГц, $f_2 = 9,35$ ГГц и $f_3 = 10,606$ ГГц, в окрестности которых $|R|$ резонансным образом уменьшается и может достигать значений $|R| \approx 0,05$.

Можно показать, что эти частоты зависят только от характеристических частот феррита и метаматериала и являются корнями следующих уравнений:

$$\frac{\mu_{\perp}}{\mu_M} + \frac{\mu_2}{\mu_1} + 1 = 0; \quad (28)$$

$$\frac{\mu_{\perp}}{\mu_M} - \frac{\mu_2}{\mu_1} + 1 = 0; \quad (29)$$

$$\mu_M + 1 = 0. \quad (30)$$

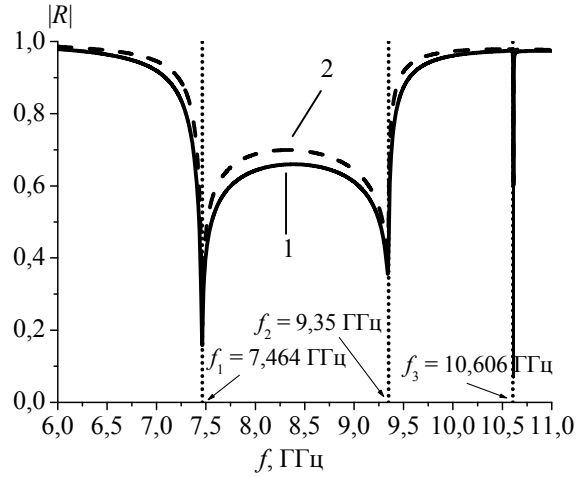


Рис. 3. Зависимость модуля коэффициента отражения $|R|$ от частоты при нормальном $\beta = 0^\circ$ (кривая 1) и наклонном $\beta = 45^\circ$ (кривая 2) падении плоской электромагнитной волны на исследуемую структуру

Частоты f_1 и f_2 удовлетворяют соответственно уравнениям (28) и (29), а частота f_3 – уравнению (30). Как известно [20], структура, образованная слоем феррита и диэлектрика (в частности, метаматериала), обладает спектром поверхностных волн. Характерной особенностью дисперсионных зависимостей этих поверхностных волн является наличие частот «отсечки» – частот, при которых фазовые скорости поверхностных волн обращаются в нуль. Эти частоты «отсечки» удовлетворяют уравнениям (28)–(30), следовательно, совпадают с указанными выше частотами. При этом частоты f_1 и f_2 связаны с поверхностными волнами, распространяющимися вдоль границы раздела феррит–метаматериал ($x = 0$), а частота f_3 – с поверхностной волной, распространяющейся вдоль границы метаматериал–вакуум ($x = -h_2$).

Косвенным подтверждением этого является распределение линий равных значений модуля E_z -компоненты поля дифракции, полученных для частот возбуждающей волны, при которых $|R|$ принимает минимальные значения (рис. 4). Как можно видеть, при частотах, близких к f_1 и f_2 , поле дифракции локализовано на щелях решетки (в окрестности границы раздела феррит–метаматериал) (рис. 4, а, б), а при частотах, близких к f_3 , – в окрестности границы раздела метаматериал–вакуум (рис. 4, в).

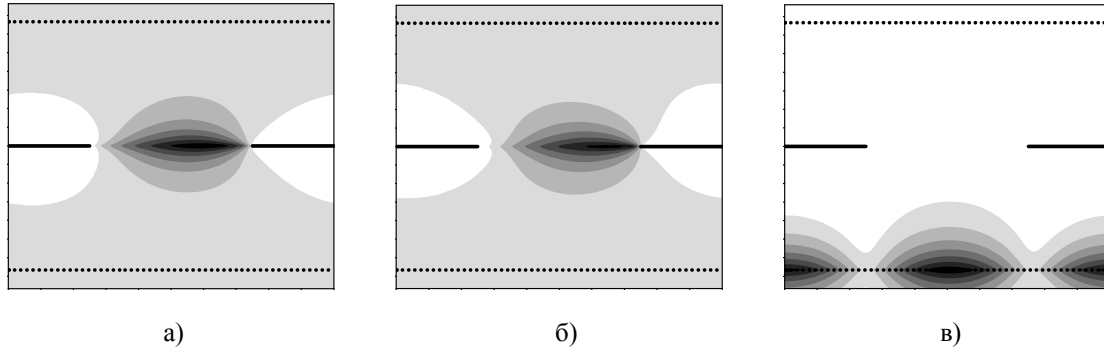


Рис. 4. Распределение значений линий равных амплитуд $|E_z| = \text{const}$ на резонансных частотах: а) $-f = 7,463$ ГГц; б) $-f = 9,341$ ГГц; в) $-f = 10,612$ ГГц

Интересно отметить, что в случае наклонного падения плоской волны частотная зависимость коэффициента отражения практически не изменяется (см. рис. 3, пунктирная линия).

Таким образом, резонансное поведение коэффициента отражения обусловлено возбуждением в исследуемой структуре колебаний, локализованных у границ раздела сред.

Проанализируем теперь поведение коэффициента отражения в частотном диапазоне $\sqrt{f_H(f_H + f_M)} < f < f_H + f_M$. В этом случае $\text{Re}(\mu_{\perp}) < 0$ и $\text{Re}(\varepsilon) > 0$, $\text{Re}(\mu) > 0$. На рис. 5 представлена типичная частотная зависимость модуля коэффициента отражения при нормальном падении на структуру возбуждающей плоской волны.

Как видно, и в этом частотном диапазоне существует две характерные частоты $f_4 = 20,756$ ГГц, $f_5 = 22,642$ ГГц, в окрестности которых наблюдается резкое уменьшение коэффициента отражения ($|R| \rightarrow 0$). При этом частота f_5 удовлетворяет уравнению (28), а частота f_4 — уравнению

$$\mu_{\perp} + \frac{\mu_2}{\mu_1} + 1 = 0. \quad (31)$$

Как следует из (31), частота f_4 зависит только от параметров феррита и является частотой «отсечки» поверхностной волны, локализованной у гра-

ницы раздела феррит–вакуум ($x = h_1$). Частота f_5 зависит как от параметров феррита, так и от параметров метаматериала, и соответствующая ей поверхностная волна локализована у границы раздела феррит–метаматериал ($x = 0$).

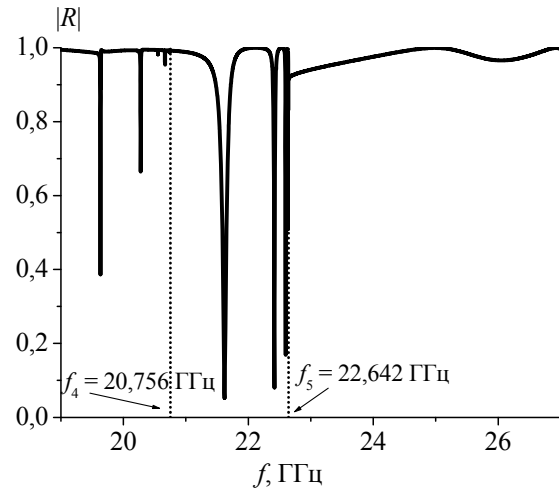


Рис. 5. Зависимость модуля коэффициента отражения $|R|$ при дифракции плоской волны на структуре ферритовый слой–периодическая решетка–слой метаматериала

На рис. 6 представлены результаты расчета ближних полей (распределение модуля E_z -компоненты) при частотах, для которых коэффициент отражения принимает минимальные значения.

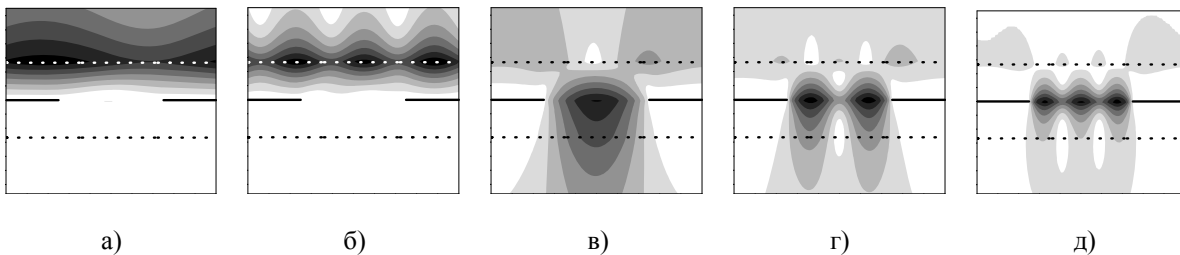


Рис. 6. Распределение значений линий равных амплитуд $|E_z| = \text{const}$ на резонансных частотах: а) $-f = 20,278$ ГГц; б) $-f = 20,667$ ГГц; в) $-f = 21,619$ ГГц; г) $-f = 22,417$ ГГц; д) $-f = 22,697$ ГГц

Как видно, для частот в окрестности f_4 дифракционное поле сосредоточено у верхней границы слоя феррита, а для частот в окрестности f_5 – на щели ленточной решетки (граница раздела феррит–метаматериал). Следовательно, и в этом случае резонансы коэффициента отражения также связаны с возбуждением поверхностных колебаний. Любопытно отметить, что в этом частотном диапазоне ленточная решетка (слой феррита и метаматериала отсутствуют) практически полностью ($|R| \approx 0,9$) отражает E -поляризованную волну [19].

Выводы. Таким образом, разработан метод аналитической регуляризации для решения задач дифракции плоских E -поляризованных волн на периодической структуре слой феррита–ленточная решетка–слой метаматериала. Этот метод сводит исходную задачу дифракции к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода, допускающей эффективное численное решение методом усечения. С помощью этого метода исследована частотная зависимость коэффициента отражения. Установлено, что в частотных диапазонах $0 < f < f_\mu < f_\varepsilon$ и $\sqrt{f_H(f_H + f_M)} < f < f_H + f_M$ существуют характерные частоты, в окрестности которых коэффициент отражения резонансным образом уменьшается практически до нуля ($|R| \rightarrow 0$). Вне указанных диапазонов модуль коэффициента отражения близок к единице ($|R| \approx 1$). Такое поведение коэффициента отражения обусловлено возбуждением колебаний, локализованных у границ раздела сред.

1. *Третьяков О. А.* Дифракция электромагнитных волн на плоской металлической решетке, лежащей на диэлектрическом слое / О. А. Третьяков, В. П. Шестопапов // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. – 1963. – 6, № 2. – С. 353–366.
2. *Адоина А. И.* Дифракция электромагнитных волн при косом падении на плоской металлической решетке с экраном и магнитодиэлектриком / А. И. Адоина, В. В. Шербак // Журн. техн. физики. – 1964. – 34, вып. 1. – С. 168–173.
3. *Барегамян В. А.* Дифракция электромагнитных волн на плоской металлической решетке с анизотропным диэлектриком / В. А. Барегамян // Радиотехника: науч.-техн. сб. / Харьков. гос. ун-т. – X., 1965. – Вып. 1. – С. 108–115.
4. *Хорошун В. В.* Дифракция плоских электромагнитных волн на металлической решетке с гиромангнитной средой / В. В. Хорошун // Радиотехника: науч.-техн. сб. / Харьков. гос. ун-т. – X., 1967. – Вып. 4. – С. 20–25.
5. *Хорошун В. В.* Дифракция плоских электромагнитных волн на экранированной решетке с поперечно намагниченным реальным ферритом / В. В. Хорошун // Радиотехника: науч.-техн. сб. / Харьков. гос. ун-т. – X., 1968. – Вып. 7. – С. 32–37.
6. *Бровенко А. В.* Дифракция плоской электромагнитной волны на металлической решетке с магнитоактивной плазмой / А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. – 2004. – 47, № 8. – С. 638–649.
7. *Surface resonances of metal stripe Grating on the Plane boundary of metamaterial / A. Brovenko, P. Melezhhik, A. Poyedynchuk et al. // Progress in Electromagnetic Research. – 2006. – 63. – P. 209–222.*

8. *Resonant Scattering in Electromagnetics Research / A. Brovenko, P. Melezhhik, A. Poyedynchuk et al. // Progress in Electromagnetic Research B. – 2009. – 15. – P. 423–441.*
9. *Аналитическая регуляризация задач дифракции волн на ленточных решетках, расположенных на границе ферромагнитной среды / А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук, А. С. Трошило // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2009. – 14, № 9. – С. 19–30.*
10. *Resonance wave Scattering by strip grating adjusted to ferromagnetic medium / A. Brovenko, E. Vinogradova, P. Melezhhik et al. // Progress in Electromagnetics Research B. – 2010. – 23. – P. 109–129.*
11. *Метод аналитической регуляризации в решении задач дифракции электромагнитных волн на границе гиротропной среды с ленточной решеткой / А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук, А. С. Трошило // Докл. НАН Украины. – 2010. – № 3. – С. 77–84.*
12. *Modern theory of Gratings. Resonant Scattering: Analysis Techniques and Phenomena / J. Chandezon, G. Granet, P. Melezhhik et al. – N. Y., 2010. – 390 p.*
13. *Гуревич А. Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах / А. Г. Гуревич. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 408 с.
14. *Engheta N.* Metamaterials: Physics and Engineering Explorations / N. Engheta, R. W. Ziolkowski (eds.). – IEEE Press, Wiley Interscience, 2006. – 402 p.
15. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Физматгиз, 1962. – 599 с.
16. *Садовничий В. А.* Теория операторов / В. А. Садовничий. – М.: Изд-во Москов. ун-та, 1986. – 368 с.
17. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
18. *Елисеева С. В.* Спектр собственных электромагнитных волн периодической структуры ферромагнетик–полупроводник / С. В. Елисеева, Д. И. Семенов // Журн. техн. физики. – 2005. – 75, вып. 7. – С. 106–111.
19. *Дифракция волн на решетках / В. П. Шестопапов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб. – X.: Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1973. – 278 с.*
20. *Вашковский А. В.* Обратные поверхностные электромагнитные волны в композитных структурах, использующих ферриты / А. В. Вашковский, Э. Г. Локк // Радиотехника и электрон. – 2003. – 48, № 2. – С. 169–176.

A. V. Brovenko, P. N. Melezhhik,
A. E. Poyedynchuk

RESONANT SCATTERING OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE BY FERRITE–STRIP GRATING–METAMATERIAL STRUCTURE

Boundary value problem for plane electromagnetic wave diffraction by the ferrite–strip grating–metamaterial structure was reduced to Riemann–Hilbert problem with conjugation coefficient depending upon frequency of excitation wave and constitutive parameters of ferrite and metamaterial. Analytical regularization method was proposed to reduce this problem to infinite system of algebraic equations of the second kind with kernel matrix operator. Numerical analysis of frequency dependence of the reflection coefficient for the periodic structure was carried out. The frequency bands where the reflection coefficient exhibited pronounced resonant behaviour were determined. Excitation of the oscillations localized in the vicinity of media interfaces explains such resonant behaviour of the reflection coefficient.

Key words: diffraction, ferrite layer, strip periodic grating, metamaterial layer, system of dual series equations, analytical regularization method, reflection coefficient, diffracted fields.

А. В. Бровенко, П. М. Мележик,
А. Ю. Поєдинчук

РЕЗОНАНСНЕ РОЗСІЯННЯ ПЛОСКОЇ
ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ НА СТРУКТУРІ
ФЕРИТ–СТРІЧКОВА ГРАТКА–МЕТАМАТЕРІАЛ

Крайова задача дифракції плоскої електромагнітної хвилі на шарі ферит–стрічкова гратка–шар метаматеріалу зведена до задачі Рімана–Гільберта з коефіцієнтом сполучення, що залежить від частоти падаючої хвилі, матеріальних параметрів ферита та метаматеріалу. Запропоновано метод аналітичної регуляризації, за допомогою якого ця задача зведена до системи

лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду з ядерним оператором. Проведено числовий аналіз частотної залежності коефіцієнта відбиття для досліджуваної періодичної структури. Встановлено діапазони частот, де коефіцієнт відбиття має яскраво виражений резонансний характер. Така поведінка коефіцієнта відбиття обумовлена збудженням коливань, локалізованих біля меж розділу середовищ.

Ключові слова: дифракція, феритовий шар, стрічкова періодична гратка, шар метаматеріалу, система парних суматорних рівнянь, метод аналітичної регуляризації, коефіцієнт відбиття, дифракційні поля.

Рукопись поступила 30.06.11 г.