

**Л. Г. Величко, А. А. Кривчикова, Ю. К. Сиренко**

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины*

*12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина*

E-mail: [lgv@ire.kharkov.ua](mailto:lgv@ire.kharkov.ua); [kryvchikova@ire.kharkov.ua](mailto:kryvchikova@ire.kharkov.ua); [yks@ire.kharkov.ua](mailto:yks@ire.kharkov.ua)

## ДВУМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ. ЧАСТЬ I. НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ТОЧНЫЕ ПОГЛОЩАЮЩИЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КАНАЛА ФЛОКЕ

Представлены аналитические результаты, составляющие теоретический фундамент для численного решения задач о рассеянии электромагнитных волн двумерно-периодическими структурами во временной области. Приведена математически строгая формулировка соответствующих начально-краевых задач, включающая, в частности, точные поглощающие условия на виртуальных границах в поперечном сечении прямоугольного канала Флоке. Использование этих условий позволяет свести исходную начально-краевую задачу с бесконечной областью анализа к эквивалентной закрытой задаче в ограниченной области, допускающей численное решение с помощью известных конечно-разностных алгоритмов. Ил. 1. Библиогр.: 13 назв.

**Ключевые слова:** начально-краевая задача, двумерно-периодическая решетка, точные поглощающие условия.

Строгие электродинамические модели одномерно-периодических решеток начали появляться в 1970-е гг., когда соответствующие теоретические задачи были рассмотрены с позиций классических математических дисциплин: математической физики, вычислительной математики, теории дифференциальных и интегральных уравнений. На этом этапе значительный вклад в развитие современной электромагнитной теории дифракционных решеток внесли ученые украинской и французской радиофизических школ (В. П. Шестопалов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб, А. А. Кириленко, R. Petit, D. Maystre, M. Neviere, P. Vincent, A. Roger, J. Chandezon и др.) [1–7]. Над обобщением и развитием результатов, полученных в те годы, и сейчас работают многие специалисты в разных странах – периодические структуры, как и раньше, в числе наиболее востребованных дисперсионных элементов, позволяющих вести эффективную поляризационную, частотную и пространственную селекцию сигналов. Новые знания о физике соответствующих волновых и колебательных процессов находят воплощение в принципиально новых узлах и устройствах гига-, терагерцевого и оптического диапазонов, в новых материалах с включениями, размеры которых измеряются в микро- и нанометрах, в новых схемах оперативного измерения параметров различных искусственных и природных материалов и сред.

Однако возможности классических двумерных моделей ограничены. И в теории, и на практике все чаще возникают задачи, требующие анализа трехмерных, векторных моделей периодических структур. Построение таких моделей, по нашему мнению, должно базироваться на представлениях временной области и быть ориентированным на реализацию сеточными методами [8, 9]. В этом нас убеждает опыт работы с двумерными моделями [6, 7], а также следующие хорошо известные факты:

– подходы временной области свободны от идеализаций, присущих методам частотной области;

– они более универсальны благодаря минимальным ограничениям, накладываемым на геометрические и материальные параметры исследуемых объектов;

– они позволяют использовать явные вычислительные схемы, не требующие обращения каких-либо операторов;

– результаты, полученные в рамках методов временной области, легко трансформируются в стандартный набор частотных характеристик.

Добавим, что в последние годы были построены и широко апробированы нелокальные и локальные точные поглощающие условия (см., например, [6]), позволяющие заменять открытые начально-краевые задачи электродинамической теории решеток эквивалентными закрытыми задачами, предложены и реализованы усовершенствованные конечно-разностные схемы с этими условиями на основе быстрого преобразования Фурье для исследования резонансных структур различного вида [10]. Это существенно снизило требования к ресурсам компьютеров, используемых в вычислительных экспериментах. Доступными для многих стали и быстрые многопроцессорные вычислительные комплексы, в частности, кластеры новой компьютерной сетевой технологии *Grid* Европейского центра ядерных исследований.

Очевидно, что наличия мощной вычислительной техники недостаточно для успешного решения даже простейших решеточных задач. Реализуемая на компьютере вычислительная схема должна быть устойчивой и сходящейся, погрешность счета – предсказуемой, а результаты счета – допускающими однозначное физическое толкование. Эти требования обеспечиваются теоретическим анализом, проводимым на всех этапах построения модели (постановка краевых и

начально-краевых задач, определение классов корректности этих задач, исследование качественных характеристик особенностей аналитического продолжения решений модельных краевых задач в область комплексных значений частотного параметра и т. д.; см., например, [6, 7]).

Данная работа посвящена изложению ряда аналитических результатов, составляющих теоретическую основу для численного решения начально-краевых задач теории двумерно-периодических структур. В разд. 1 и 2 размещены общие сведения, необходимые для постановки модельных задач электродинамической теории решеток, а разд. 3 и 4 работы посвящены проблемам корректного и эффективного ограничения пространства счета в задачах, описывающих пространственно-временные трансформации электромагнитных волн в трехмерных периодических структурах.

### 1. Фундаментальные соотношения.

Краевые и начально-краевые задачи для системы дифференциальных уравнений Максвелла лежат в основе электромагнитной теории частотной и временной областей. Решения этих задач описывают физические процессы пространственно-частотных и пространственно-временных трансформаций электромагнитного поля в различных структурах: дифракционных решетках, волноводах, открытых резонаторах, излучающих элементах антенн и др. В настоящей работе мы будем исходить из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \eta_0 \operatorname{rot} \vec{H}(g, t) &= \\ &= \frac{\partial [\vec{E}(g, t) + \chi_\varepsilon(g, t) * \vec{E}(g, t)]}{\partial t} + \\ &+ \chi_\sigma(g, t) \times \vec{E}(g, t) + \vec{J}(g, t); \\ \operatorname{rot} \vec{E}(g, t) &= \\ &= -\eta_0 \frac{\partial [\vec{H}(g, t) + \chi_\mu(g, t) * \vec{H}(g, t)]}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

представляющей собой систему роторных уравнений Максвелла для электромагнитных волн, распространяющихся в стационарной, локально-неоднородной, изотропной и дисперсной среде [9, 11]. Здесь  $\vec{E}(g, t) = \{E_x, E_y, E_z\}$  и  $\vec{H}(g, t) = \{H_x, H_y, H_z\}$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей;  $\eta_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$  – импеданс свободного пространства;  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные вакуума;  $\vec{J}(g, t) = \eta_0 \vec{j}(g, t)$ ,  $\vec{j}(g, t)$  – плотность сторонних токов;  $\chi_\varepsilon(g, t)$ ,  $\chi_\mu(g, t)$  и  $\chi_\sigma(g, t)$  – электрическая, магнитная восприимчивости и восприимчи-

вость проводимости;  $g = \{x, y, z\}$  – это точка в пространстве  $R^3$ ;  $x, y$  и  $z$  – декартовы координаты. Через  $f_1(t) * f_2(t) = \int f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$  мы обозначаем операцию свертки. Для всех физических величин используется система единиц СИ. Отметим, что временная переменная  $t$  представляет собой произведение реального времени на скорость распространения света в вакууме и измеряется, соответственно, в метрах.

В случае, когда в некоторой области  $G \subset R^3$  частотная дисперсия отсутствует, для точек  $g \in G$  мы имеем:  $\chi_\varepsilon(g, t) = \delta(t)[\varepsilon(g) - 1]$ ,  $\chi_\mu(g, t) = \delta(t)[\mu(g) - 1]$ ,  $\chi_\sigma(g, t) = \delta(t)\sigma(g)$ , где  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака. Уравнения (1) и (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \eta_0 \operatorname{rot} \vec{H}(g, t) &= \\ &= \varepsilon(g) \frac{\partial \vec{E}(g, t)}{\partial t} + \sigma(g) \vec{E}(g, t) + \vec{J}(g, t); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(g, t) = -\eta_0 \mu(g) \frac{\partial \vec{H}(g, t)}{\partial t}, \quad (4)$$

где  $\sigma = \eta_0 \sigma_0$ ,  $\sigma_0(g)$  – удельная проводимость локально-неоднородной среды ( $\sigma_0(g) \geq 0$ ), а  $\varepsilon(g)$  и  $\mu(g)$  – ее относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости. В свободном пространстве (в вакууме)  $\varepsilon(g) = \mu(g) = 1$ , а  $\sigma(g) = 0$ , и мы можем рассматривать следующие векторные задачи [6], которые эквивалентны (1), (2):

$$\begin{aligned} \left[ \Delta - \operatorname{grad} \operatorname{div} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{E}(g, t) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{J}(g, t) \equiv \vec{F}_E(g, t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{H}(g, t) = -\eta_0^{-1} \operatorname{rot} \vec{E}(g, t)$$

и

$$\begin{aligned} \left[ \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{H}(g, t) &= \\ &= -\eta_0^{-1} \operatorname{rot} \vec{J}(g, t) \equiv \vec{F}_H(g, t), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(g, t) = \eta_0 \operatorname{rot} \vec{H}(g, t) - \vec{J}(g, t).$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа. Оператор  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{grad}(\rho_1 + \rho_2)$  (входящие в него функции  $\rho_1(g, t)$  и  $\rho_2(g, t)$  описывают объемную плотность индуцированных и сторонних электрических зарядов) в векторных уравнениях для поля  $\vec{E}$  может быть опущен, поскольку [6] в одно-

родной среде ( $\varepsilon = \text{const} \geq 1$  и  $\sigma = \text{const} \geq 0$ )  $\rho_1(g, t) = \rho_1(g, 0) \exp(-t\sigma/\varepsilon)$ , и если  $\rho_1(g, 0) = 0$ , то  $\rho_1(g, t) = 0$  для любого  $t > 0$ . Оставшееся слагаемое  $\text{grad} \rho_2$  можно перенести в правую часть волновых уравнений, определяющую токовые источники электрического поля.

**2. Область анализа, граничные и начальные условия.** Уравнения (1)–(6) – это уравнения гиперболического типа [12]. Начально-краевая задача для них должна включать начальное (при  $t = 0$ ) и граничные (на всех внешних и внутренних границах области анализа  $Q$ ) условия. В трехмерных векторных или скалярных задачах область анализа  $Q$  представляет собой часть пространства  $R^3$ , ограниченную поверхностями  $S$ , являющимися границами областей  $\text{int} S$ , заполненных идеальным проводником:  $Q = R^3 \setminus \overline{\text{int} S}$ . В так называемых открытых задачах область анализа  $Q$  может простирается до бесконечности вдоль одного или нескольких пространственных направлений.

Система граничных условий для начально-краевых задач формулируется следующим образом [11]:

- На поверхности идеального проводника  $S$  тангенциальная компонента вектора напряженности электрического поля равна нулю для всех времен наблюдения  $t$ :

$$E_{tg}(g, t)|_{g \in S} = 0, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Кроме того, на поверхности  $S$  нормальная компонента вектора напряженности магнитного поля равна нулю –  $H_{nr}(g, t)|_{g \in S} = 0$  – и функция  $H_{tg}(g, t)|_{g \in S}$  определяет так называемые поверхностные токи, порождаемые на  $S$  внешним электромагнитным полем  $\{\vec{E}(g, t), \vec{H}(g, t)\}$ .

- На поверхностях  $S^{\varepsilon, \mu, \sigma}$  разрывов материальных свойств среды, так же, как и во всей области  $Q$ , тангенциальные компоненты  $E_{tg}(g, t)$  и  $H_{tg}(g, t)$  векторов напряженности электрического и магнитного полей должны быть непрерывны.

- В окрестностях особых точек границ области  $Q$  (точек, в которых векторы нормали и касательной не определены) плотность энергии поля должна быть пространственно интегрируема.

- Если область  $Q$  неограниченна и поле  $\{\vec{E}(g, t), \vec{H}(g, t)\}$  порождается источниками, носители которых ограничены в  $Q$ , тогда для любого конечного временного интервала  $(0; T)$  можно

построить виртуальную границу  $M \subset Q$ , достаточно удаленную от источников, такую, что

$$\{\vec{E}(g, t), \vec{H}(g, t)\}|_{g \in M, t \in (0; T)} = 0. \quad (8)$$

Начальные условия (в момент времени  $t = 0$ ) задают исходное состояние системы, изменяющейся затем (при  $t > 0$ ) согласно дифференциальным уравнениям и граничным условиям. Начальные состояния  $\vec{E}(g, 0)$  и  $\vec{H}(g, 0)$  в системе (1), (2) или системе (3), (4) такие же, как и  $\vec{E}(g, 0)$  и  $[\partial \vec{E}(g, t)/\partial t]|_{t=0}$ , ( $\vec{H}(g, 0)$  и  $[\partial \vec{H}(g, t)/\partial t]|_{t=0}$ ) в дифференциальных формах второго порядка (относительно  $t$ ), к которым сводятся (1), (2) или (3), (4), если исключить вектор  $\vec{H}$  (вектор  $\vec{E}$ ) (см. (5), (6)). Таким образом, систему уравнений (5), например, следует дополнить начальными условиями вида

$$\vec{E}(g, 0) = \vec{\varphi}(g), \quad \frac{\partial \vec{E}(g, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \vec{\psi}(g), \quad g \in \bar{Q}. \quad (9)$$

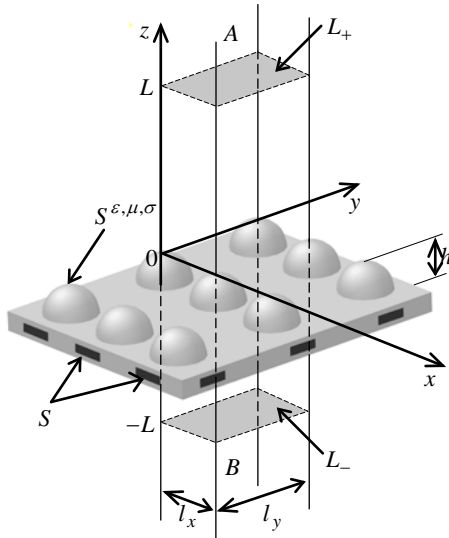
Функции  $\vec{\varphi}(g)$ ,  $\vec{\psi}(g)$  и  $\vec{F}_{E, H}(g, t)$  ( $t > 0$ ) (функции, описывающие мгновенные и токовые источники) обычно имеют ограниченный носитель в замыкании области  $Q$ . Токовые источники разделяют на жесткие и мягкие [9]: мягкие источники не имеют материальных носителей и поэтому не рассеивают электромагнитные волны. Мгновенные источники обычно используются, чтобы задать импульсную волну возбуждения  $\vec{U}^i(g, t)$ :  $\vec{\varphi}(g) = \vec{U}^i(g, 0)$  и  $\vec{\psi}(g) = [\partial \vec{U}^i(g, t)/\partial t]|_{t=0}$ . Сам импульсный сигнал  $\vec{U}^i(g, t)$  должен удовлетворять соответствующему волновому уравнению и принципу причинности. Следует также убедиться, что до момента времени  $t = 0$  импульсный сигнал не контактировал с рассеивающим объектом.

Последнее очевидно невозможно, если бесконечная структура (например, решетка) возбуждается плоской импульсной волной, распространяющейся в направлении, отличном от нормали, к какой-либо бесконечной границе. Такие волны «заметают» часть поверхности рассеивателя к любому моменту времени. В результате математически корректное моделирование становится невозможным: входные данные, необходимые для постановки начально-краевой задачи, определяются фактически решением этой задачи.

**3. Временная область: начально-краевые задачи.** Векторная задача, описывающая нестационарное поле вблизи решетки, геометрия которой представлена на рисунке, имеет вид

$$\begin{cases}
 \eta_0 \operatorname{rot} \vec{H}(g, t) = \\
 = \frac{\partial [\vec{E}(g, t) + \chi_\varepsilon(g, t) \times \vec{E}(g, t)]}{\partial t} + \\
 + \chi_\sigma(g, t) \times \vec{E}(g, t) + \vec{J}(g, t), \\
 \operatorname{rot} \vec{E}(g, t) = \\
 = -\eta_0 \frac{\partial [\vec{H}(g, t) + \chi_\mu(g, t) \times \vec{H}(g, t)]}{\partial t}, \\
 g = \{x, y, z\} \in Q, \quad t > 0, \\
 \vec{E}(g, 0) = \vec{\varphi}_E(g), \quad \vec{H}(g, 0) = \vec{\varphi}_H(g), \quad g \in \bar{Q}, \\
 E_{tg}(g, t)|_{g \in S} = 0, \quad H_{nr}(g, t)|_{g \in S} = 0, \quad t \geq 0.
 \end{cases} \quad (10)$$

Здесь  $\bar{Q}$  – замыкание области  $Q$ ;  $\chi_{\varepsilon, \mu, \sigma}(g, t)$  – кусочно-непрерывные функции. Предполагается, что поверхности  $S$  достаточно гладкие, а также (здесь и при рассмотрении других начально-краевых задач), что выполняются условия непрерывности для тангенциальных компонент векторов напряженности электромагнитного поля, если это необходимо. Область анализа  $Q = R^3 \setminus \operatorname{int} S$  занимает практически все пространство  $R^3$ .



Общая геометрия задач

Для такой области задача эффективно разрешима только в двух следующих случаях:

- Задача (10) вырождается в обычную задачу Коши ( $\operatorname{int} S = \emptyset$ , среда однородна, недисперсна, и носители функций  $\vec{J}(g, t)$  и  $\vec{\varphi}_{E(H)}(g)$  ограничены). С некоторыми несущественными ограничениями на функции источников классическое и обобщенное решение задачи Коши существует, единственно и описывается известной формулой Пуассона [12].

- Функции  $\vec{J}(g, t)$  и  $\vec{\varphi}_{E(H)}(g)$  имеют такую же симметрию смещения, как и периодическая структура. В этом случае область анализа можно сократить до  $Q^N = \{g \in Q: 0 < x < l_x; 0 < y < l_y\}$ , дополняя задачу (10) условиями периодичности [7] на боковых поверхностях прямоугольного канала Флоке  $R = \{g \in R^3: 0 < x < l_x; 0 < y < l_y\}$ .

Область анализа можно сократить до  $Q^N$  и в более общем случае, объекты анализа при этом не вполне физичны (комплексные источники и поля). Однако путем простых математических преобразований все результаты могут быть представлены в привычной, физически корректной форме. Существует ряд причин (одну из них мы указали в разд. 2), почему моделирование физически реализуемых ситуаций в электромагнитной теории решеток следует начать с анализа начально-краевых задач для образов  $f^N(g, t, \Phi_x, \Phi_y)$  функций  $f(g, t)$ , описывающих реальные источники:

$$\begin{aligned}
 f(g, t) &= \\
 &= \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f(z, t, \Phi_x, \Phi_y) \exp\left(2\pi i \Phi_x \frac{x}{l_x}\right) \times \\
 &\times \exp\left(2\pi i \Phi_y \frac{y}{l_y}\right) d\Phi_x d\Phi_y = \\
 &= \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f^N(g, t, \Phi_x, \Phi_y) d\Phi_x d\Phi_y.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) следует

$$\begin{aligned}
 f^N \left\{ \frac{\partial f^N}{\partial x} \right\} (x+l_x, y, z, t, \Phi_x, \Phi_y) &= \\
 = e^{2\pi i \Phi_x} f^N \left\{ \frac{\partial f^N}{\partial x} \right\} (x, y, z, t, \Phi_x, \Phi_y), \\
 f^N \left\{ \frac{\partial f^N}{\partial x} \right\} (x, y+l_y, z, t, \Phi_x, \Phi_y) &= \\
 = e^{2\pi i \Phi_y} f^N \left\{ \frac{\partial f^N}{\partial x} \right\} (x, y, z, t, \Phi_x, \Phi_y)
 \end{aligned}$$

или, в других обозначениях, –

$$\begin{aligned}
 D[f^N](x+l_x, y) &= e^{2\pi i \Phi_x} D[f^N](x, y), \\
 D[f^N](x, y+l_y) &= e^{2\pi i \Phi_y} D[f^N](x, y).
 \end{aligned}$$

Использование вышеупомянутых условий ограничивает область анализа до области  $Q^N$ , являющейся частью канала Флоке  $R$ , и это позволяет нам переписать задачу (10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{E}(g,t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}^N(g,t, \Phi_x, \Phi_y) d\Phi_x d\Phi_y; \\ \bar{H}(g,t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}(g,t, \Phi_x, \Phi_y) d\Phi_x d\Phi_y, \end{aligned} \quad (12)$$

и

$$\begin{cases} \eta_0 \text{rot} \bar{H}^N(g,t) = \\ = \frac{\partial [\bar{E}^N(g,t) + \chi_\varepsilon(g,t) * \bar{E}^N(g,t)]}{\partial t} + \\ + \chi_\sigma(g,t) * \bar{E}^N(g,t) + \bar{J}^N(g,t), \\ \text{rot} \bar{E}^N(g,t) = \\ = -\eta_0 \frac{\partial [\bar{H}^N(g,t) + \chi_\mu(g,t) * \bar{H}^N(g,t)]}{\partial t}, \\ g \in Q^N, \quad t > 0, \\ \bar{E}^N(g,0) = \bar{\varphi}_E^N(g), \quad \bar{H}^N(g,0) = \bar{\varphi}_H^N(g), \quad g \in \bar{Q}^N, \\ D[\bar{E}^N(\bar{H}^N)](l_x, y) = \\ = e^{2\pi i \Phi_x} D[\bar{E}^N(\bar{H}^N)](0, y), \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ D[\bar{E}^N(\bar{H}^N)](x, l_y) = \\ = e^{2\pi i \Phi_y} D[\bar{E}^N(\bar{H}^N)](x, 0), \quad 0 \leq x \leq l_x, \\ E_{ig}^N(g,t)|_{g \in S} = 0, \quad H_{nr}^N(g,t)|_{g \in S} = 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Известно [6–8], что начально-краевые задачи для уравнений, представленных ранее, можно сформулировать таким образом, что они будут однозначно разрешимы в пространстве Соболева  $W_2^1(Q^T)$  ( $Q^T = Q \times (0; T)$ ), где  $0 \leq t \leq T$  – интервал времени наблюдения. Исходя из этого факта, далее везде предположим, что задача (13) для всех  $t \in [0; T]$  имеет обобщенное решение из пространства  $W_2^1(Q^{N,T})$  и что в этом пространстве справедлива теорема единственности. Здесь  $(0; T)$  и  $[0; T]$  – открытые и закрытые интервалы,  $W_m^n(G)$  – множество всех элементов  $\bar{f}(g)$  из  $L_m(G)$ , имеющих обобщенные производные до порядка  $n$  включительно из пространства  $L_m(G)$ .  $L_m(G)$  – пространство функций  $\bar{f}(g) = \{f_x, f_y, f_z\}$  ( $g \in G$ ), для которого функции  $|f_{x,y,z}(g)|^m$  интегрируемы в  $G$ .

**4. Точные поглощающие условия для прямоугольного канала Флоке.** В этом разделе мы приведем ряд важных результатов по эффективному ограничению пространства счета в открытых трехмерных начально-краевых задачах электромагнитной теории решеток. В разд. 3 пу-

тем перехода к неким специальным преобразованиям для функций, описывающих физически реализуемые источники, мы свели такие задачи для бесконечных решеток к задачам рассеяния нестационарных волн компактными неоднородностями в прямоугольном канале Флоке  $R$  или, другими словами, в прямоугольном волноводе с граничными условиями квазипериодичности. Продолжим ограничение пространства счета и редуцируем область анализа  $Q^N$  до  $Q_L^N = \{g \in Q^N : |z| < L\}$  (предполагается, что все источники поля и неоднородности канала Флоке  $R$  лежат в этой области), а именно построим для виртуальных границ  $L_\pm$  ( $z = \pm L$ ) области  $Q_L^N$  такие условия, подключение которых к (13) не изменит класс корректности задачи и ее решение  $\bar{E}^N(g,t)$ ,  $\bar{H}^N(g,t)$ . Это так называемые точные поглощающие условия, теория которых подробно изложена в работах [6, 7, 10, 13].

Опустим верхний индекс  $N$  у всех величин из (13) и представим решение  $\bar{E}(g,t)$  этой задачи в замыкании областей  $A = \{g \in R : z > L\}$  и  $B = \{g \in R : z < -L\}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{E}(g,t) &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \bar{u}_{nm}^\pm(z,t) \mu_{nm}(x,y), \\ \{x,y\} &\in \bar{R}_z, \quad \begin{cases} z \geq L \\ z \leq -L \end{cases}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $R_z = (0 < x < l_x) \times (0 < y < l_y)$ ,  $\{\mu_{nm}(x,y)\}$  ( $n,m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) – полная в  $L_2(R_z)$ , ортонормированная система функций  $\mu_{nm}(x,y) = (l_x l_y)^{-1/2} \times \exp(i\alpha_n x) \exp(i\beta_m y)$ ;  $\alpha_n = 2\pi(\Phi_x + n)/l_x$ ;  $\beta_m = 2\pi(\Phi_y + m)/l_y$  и  $\lambda_{nm}^2 = \alpha_n^2 + \beta_m^2$ . Пространственно-временные амплитуды  $\bar{u}_{nm}^\pm(z,t)$  при  $z \geq L$  и  $z \leq -L$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda_{nm}^2 \right] \bar{u}_{nm}^\pm(z,t) = 0, \quad t > 0, \\ \bar{u}_{nm}^\pm(z,0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_{nm}^\pm(z,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) получаем, разделяя переменные в однородных краевых задачах для уравнения  $[\Delta - \partial^2/\partial t^2] \bar{E}(g,t) = 0$  (см. формулу (5)) – в областях  $A$  и  $B$   $\text{grad div} \bar{E}(g,t) = 0$  и  $\bar{F}_E(g,t) = 0$ ; предполагается также, что к моменту времени  $t = 0$  поле, порожденное токовыми и мгновенными источниками, которые сосредоточены в  $Q_L$ , не успевает дойти до границ  $L_\pm$ .

Для решений  $\bar{u}_{nm}^{\pm}(z, t)$  векторных задач (15), так же, как и в случае таких же скалярных задач [7], получаем

$$\bar{u}_{nm}^{\pm}(\pm L, t) = \mp \int_0^t J_0[\lambda_{nm}(t-\tau)] \bar{u}_{nm}^{\pm}(\pm L, \tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (16)$$

нелокальные точные поглощающие условия для пространственно-временных амплитуд поля  $\bar{E}(g, t)$  в поперечных сечениях  $z = \pm L$  канала Флоке  $R$ . Из (16) и (14) следуют уравнения

$$\bar{E}(x, y, \pm L, t) = \mp \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \mu_{nm}(x, y) \left\{ \int_0^t J_0[\lambda_{nm}(t-\tau)] \times \right. \\ \left. \times \left[ \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \frac{\partial \bar{E}(\tilde{x}, \tilde{y}, z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=\pm L} \mu_{nm}^*(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} \right] d\tau \right\}, \quad (17)$$

$$\{x, y\} \in \bar{R}_z, \quad t \geq 0$$

и

$$\bar{E}(x, y, \pm L, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \bar{W}_E(x, y, t, \varphi)}{\partial t} d\varphi, \quad \{x, y\} \in \bar{R}_z, \quad t \geq 0; \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sin^2 \varphi \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \bar{W}_E(x, y, t, \varphi) = \\ = \mp \frac{\partial \bar{E}(g, t)}{\partial z} \Big|_{z=\pm L}, \quad \{x, y\} \in R_z, \quad t > 0, \\ \bar{W}_E(x, y, t, \varphi) \Big|_{t=0} = \\ = \frac{\partial \bar{W}_E(x, y, t, \varphi)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \{x, y\} \in \bar{R}_z, \quad (18) \\ D[\bar{W}_E](l_x, y) = \\ = e^{2\pi i \Phi_x} D[\bar{W}_E](0, y), \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ D[\bar{W}_E](x, l_y) = \\ = e^{2\pi i \Phi_y} D[\bar{W}_E](x, 0), \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad t \geq 0.$$

Это точные нелокальные и локальные поглощающие условия для поля  $\bar{E}(g, t)$  на виртуальных границах  $L_{\pm}$  области  $Q_L$ . Здесь  $J_m(x)$  – цилиндрические функции Бесселя,  $\bar{u}_{nm}^{\pm}(\pm L, \tau) = \partial \bar{u}_{nm}^{\pm}(z, \tau) / \partial z \Big|_{z=\pm L}$ , символ \* означает комплексное сопряжение,  $\bar{W}_E(x, y, t, \varphi)$  – некая вспомогательная функция, а  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  – числовой параметр.

Очевидно, что таким же условиям на границах  $L_{\pm}$  удовлетворяет и поле  $\bar{H}(g, t)$  уходящих в области  $A$  и  $B$  импульсных волн  $\bar{U}(g, t) = \{\bar{E}(g, t), \bar{H}(g, t)\}$ . Вместе условия для поля

$\bar{E}(g, t)$  и для поля  $\bar{H}(g, t)$  (пары нелокальных или локальных условий) сокращают область анализа (пространство счета) задачи (13) до части  $Q_L$  канала Флоке  $R$ , содержащей все его неоднородности и источники, возмущающие периодическую структуру.

Предположим теперь, что к источникам  $\bar{J}(g, t)$ ,  $\bar{\varphi}_E(g)$  и  $\bar{\varphi}_H(g)$  задачи (13) добавляются источники  $\bar{J}^A(g, t)$ ,  $\bar{\varphi}_E^A(g)$  и  $\bar{\varphi}_H^A(g)$ , расположенные в области  $A$  и порождающие здесь импульсную волну  $\bar{U}^i(g, t) = \{\bar{E}^i(g, t), \bar{H}^i(g, t)\}$ , набегающую в моменты времени  $t > 0$  на виртуальную границу  $L_+$ . Считаем, что поле волны  $\bar{U}^i(g, t)$  отлично от нуля только в области  $A$ . Поскольку условия (17), (18) остаются в силе для любых импульсных волн, уходящих через границы  $L_{\pm}$  в направлениях  $z = \pm \infty$  [7], то определение полного поля  $\{\bar{E}(g, t), \bar{H}(g, t)\}$ , формируемого решеткой, сводится к решению начально-краевой задачи (13) в области  $Q_L$ , на границе  $L_-$  которой ставятся те же условия (17) или (18), а на границе  $L_+$  – условие

$$\bar{E}^s(x, y, L, t) = - \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \mu_{nm}(x, y) \left\{ \int_0^t J_0[\lambda_{nm}(t-\tau)] \times \right. \\ \left. \left[ \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \frac{\partial \bar{E}(\tilde{x}, \tilde{y}, z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=\pm L} \mu_{nm}^*(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} \right] d\tau \right\}, \quad (19) \\ \{x, y\} \in \bar{R}_z, \quad t \geq 0$$

или условие

$$\bar{E}^s(x, y, L, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \bar{W}_E(x, y, t, \varphi)}{\partial t} d\varphi, \quad \{x, y\} \in \bar{R}_z, \quad t \geq 0; \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sin^2 \varphi \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \bar{W}_E(x, y, t, \varphi) = \\ = \frac{\partial \bar{E}^s(g, t)}{\partial z} \Big|_{z=L}, \quad \{x, y\} \in R_z, \quad t > 0, \\ \bar{W}_E(x, y, t, \varphi) \Big|_{t=0} = \\ = \frac{\partial \bar{W}_E(x, y, t, \varphi)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \{x, y\} \in R_z, \quad (20) \\ D[\bar{W}_E](l_x, y) = \\ = e^{2\pi i \Phi_x} D[\bar{W}_E](0, y), \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ D[\bar{W}_E](x, l_y) = \\ = e^{2\pi i \Phi_y} D[\bar{W}_E](x, 0), \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad t \geq 0.$$

Здесь  $\vec{U}^s(g, t) = \{\vec{E}^s(g, t), \vec{H}^s(g, t)\} = \vec{U}(g, t) - \vec{U}^i(g, t)$  ( $g \in A$ ,  $t > 0$ ) – импульсная волна, уходящая в направлении  $z = +\infty$ . Она порождается падающей волной  $\vec{U}^i(g, t)$  («отражение» от мнимой границы  $L_+$ ) и источниками  $\vec{J}(g, t)$ ,  $\vec{\varphi}_E(g)$  и  $\vec{\varphi}_H(g)$ .

**Выводы.** Таким образом, дана строгая математическая формулировка начально-краевых задач о рассеянии электромагнитных волн двумерно-периодическими структурами. Сформулированы точные локальные и нелокальные поглощающие условия для пространственно-временных амплитуд электромагнитного поля на виртуальных границах в поперечном сечении канала Флоке. Включение этих условий в начально-краевую задачу позволяет сократить бесконечную область анализа до ограниченной части канала Флоке, которая включает все источники и неоднородности. Тем самым открытая задача для бесконечной области может быть сведена к эквивалентной закрытой задаче, которая, в свою очередь, может быть эффективно решена численно с помощью метода конечных разностей.

#### Библиографический список

1. Шестопапов В. П. Дифракция волн на решетках / В. П. Шестопапов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб. – Х.: Изд-во Харьков. ун-та, 1973. – 288 с.
2. Petit R. Electromagnetic theory of gratings / R. Petit (ed.). – Berlin, N. Y.: Springer-Verlag, 1980. – 284 p.
3. Резонансное рассеяние волн. В 2-х т. Т. 1. Дифракционные решетки / В. П. Шестопапов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Ю. К. Сиренко. – К.: Наук. думка, 1986. – 232 с.
4. Шестопапов В. П. Динамическая теория решеток / В. П. Шестопапов, Ю. К. Сиренко. – К.: Наук. думка, 1989. – 216 с.
5. Neviere M. Light Propagation in Periodic Media: Differential Theory and Design / M. Neviere, E. Popov. – N. Y.: Marcel Dekker, 2003. – 410 p.
6. Sirenko Y. K. Modeling and analysis of transient processes in open resonant structures. New methods and techniques / Y. K. Sirenko, S. Strom, N. P. Yashina. – N. Y.: Springer, 2007. – 362 p.
7. Sirenko Y. K. Modern theory of gratings. Resonant scattering: analysis techniques and phenomena / Y. K. Sirenko, S. Strom (eds). – N. Y.: Springer, 2010. – 390 p.
8. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
9. Taflove A. Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method / A. Taflove, S. C. Hagness. – Boston: Artech House, 2000. – 1038 p.
10. An FFT-accelerated FDTD scheme with exact absorbing conditions for characterizing axially symmetric resonant structures / K. Sirenko, V. Pazynin, Y. Sirenko et al. // Progress in Electromagnetics Research. – 2011. – 111. – P. 331–364.
11. Rothwell E. J. Electromagnetics / E. J. Rothwell, M. J. Cloud. – Boca Raton: CRC Press, 2001. – 540 p.
12. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
13. Сиренко К. Ю. Точные «поглощающие» условия в начально-краевых задачах теории открытых волноводных резонаторов / К. Ю. Сиренко, Ю. К. Сиренко // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2005. – 45, № 3. – С. 509–525.

Рукопись поступила 10.11.2011.

L. G. Velychko, A. A. Kryvchikova, Yu. K. Sirenko

#### TWO-DIMENSIONALLY PERIODIC GRATINGS. PART I. INITIAL BOUNDARY-VALUE PROBLEMS AND EXACT ABSORBING CONDITIONS FOR THE RECTANGULAR FLOQUET CHANNEL

The paper presents the analytical results forming a theoretical basis for numerical solution of the problem on the electromagnetic wave scattering by two-dimensionally periodic structures in the time domain. The mathematically rigorous formulation of the corresponding initial boundary-value problems, which involves, particularly, the exact absorbing conditions on virtual boundaries in the cross-section of the rectangular Floquet channel is given. The use of these conditions allows one to reduce the original initial boundary-value problem with an infinite domain of analysis to the equivalent closed problem, whose domain of analysis is bounded and which can be solved numerically by the well-known finite-difference algorithms.

**Key words:** initial boundary-value problem, two-dimensionally periodic diffraction grating, exact absorbing conditions.

Л. Г. Величко, Г. О. Кривчикова, Ю. К. Сиренко

#### ДВОВИМІРНО-ПЕРІОДИЧНІ ҐРАТКИ. ЧАСТИНА І. ПОЧАТКОВО-КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТА ТОЧНІ ПОГЛИНАЮЧІ УМОВИ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОГО КАНАЛУ ФЛОКЕ

Наведено аналітичні результати, що складають теоретичний фундамент для числового розв'язання задач про розсіяння електромагнітних хвиль двовимірно-періодичними структурами в часовій області. Подано математично строге формулювання відповідних початково-крайових задач, яке містить, зокрема, точні поглинаючі умови на віртуальних межах у поперечному перерізі прямокутного каналу Флоке. Використання цих умов дозволяє звести вихідну початково-крайову задачу з нескінченною областю аналізу до еквівалентної закритої задачі в обмеженій області, яка допускає числове розв'язання за допомогою відомих скінченно-різницьових алгоритмів.

**Ключові слова:** початково-крайова задача, двовимірно-періодична дифракційна ґратка, точні поглинаючі умови.