

**А. О. Перов, А. А. Кириленко, С. Л. Сенкевич**

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины*

*12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина*

E-mail: [perov@ire.kharkov.ua](mailto:perov@ire.kharkov.ua)

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕТОК ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ БРУСЬЕВ ЧАСТЬ I. КЛАССИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА

Перфорированные металлические решетки переживают в настоящее время новую волну интереса к их резонансным свойствам, обусловленного исследованием, интерпретацией и возможным практическим использованием явления, названного «*enhanced transmission phenomena*». Целью работы является анализ свойств одномерно-периодических решеток на основе работ школы В. П. Шестопалова, т. е. изучение спектров собственных колебаний, принципов формирования этих спектров, определенных, в частности, структурой периода решетки, и затем анализ влияния таких спектров на резонансные характеристики. Рассмотрены закономерности, проявляющиеся при рассеянии *H*-поляризованной плоской волны на одномерно-периодической решетке из металлических брусьев. Особенности резонансного взаимодействия трактуются с позиций спектральной теории открытых периодических резонаторов. Введена классификация спектров классической и компаундной решеток. Изучен спектр низших собственных колебаний классической решетки как функция геометрии решетки, исследовано движение собственных частот по многолистной римановой поверхности при уменьшении толщины до нуля. Показано, что предельные точки частот несимметричных колебаний соответствуют точкам отсечки высших гармоник Флоке и чем больше вариаций поля собственного колебания, тем выше номер этой гармоники. Исследованы траектории собственных частот на высших листах и закономерности их выхода на вещественную ось, где происходят преобразования пакетов волн. Резонансное поведение решетки описано с единых позиций спектральной теории, что позволяет не только установить связь между различными резонансными явлениями, но и определить первопричину такого поведения, обусловленного возбуждением определенных собственных колебаний. Ил. 10. Библиогр.: 27 назв.

**Ключевые слова:** одномерно-периодические структуры, решетка из металлических брусьев, резонансное рассеяние, собственные колебания.

Перфорированные металлические экраны переживают в настоящее время новую волну интереса к их резонансным свойствам. После того как была обнаружена возможность «неожиданно высокого» в оптике [1] или «практически полного» в микроволновом диапазоне [2] прохождения электромагнитного поля через простейшую решетку с малыми круглыми отверстиями, появились сотни публикаций, посвященных исследованию, интерпретации и возможному практическому использованию этого явления, названного «*enhanced transmission phenomena*» [3, 4]. Подобное резонансное поведение было обнаружено и для ряда других структур – индуктивных и емкостных двумерно-периодических решеток с отверстиями различной формы [5, 6], для решеток с густой и не обязательно периодической сеткой малых отверстий [7, 8], при рассеянии на одиночных отверстиях в различных экранах с гофрированной поверхностью [9, 10].

Вновь рассматривались и одномерно-периодические решетки конечной толщины, где «малоразмерными» были узкие щели [11–13]. Вначале их попытались рассмотреть как более простую модель для объяснения резонансных свойств двумерно-периодических экранов. И хотя выяснилось, что в рамках такой модели все особенности поведения объяснить нельзя, одномерно-периодические структуры стали предметом отдельного исследования. Здесь следует заметить, что резонансную прозрачность таких решеток с узкими щелями можно считать «переоткрытой»

заново, так как такой эффект при возбуждении *H*-поляризованной волной был обнаружен еще в [11], то есть за 30 лет до того, как к ним вновь обратились [12, 13]. Более того, в 1960-е гг. для случая акустических экранов с густой сеткой тонких цилиндрических каналов было показано существование резонансов прохождения, когда длина этих каналов близка к целому числу полуволн [7].

Возвращаясь к современной волне публикаций, укажем на то, что природа таких резонансов интерпретировалась по-разному, в зависимости от диапазона. От резонансов «плазмон-поляритонных» волн, обязанных своим существованием конечной проводимости металла, в оптическом диапазоне [14], и до резонансов поверхностных электромагнитных волн вблизи периодической поверхности [15, 16], когда потребовалось объяснить «*enhanced transmission*» и в микроволновом диапазоне, где проводимость металла близка к идеальной и о «плазмон-поляритонах» речь идти уже не может [2]. Отметим в этом ряду и работу [17], где найдена оригинальная трактовка резонансов, наиболее близкая специалистам в области СВЧ-техники и базирующаяся на теории цепей.

В нашей предыдущей работе [18] было предложено наиболее широкое объяснение этого явления, основанное на анализе спектра собственных колебаний решетки как открытого двумерно-периодического резонатора [19]. В рамках такого «электродинамического» подхода новым оказалось то, что часть спектра собственных ко-

лебаний порождена впервые обнаруженными собственными колебаниями двумерно-периодической «решетки плоских апертур», образующейся на границе раздела «свободное пространство–перфорированный слой металла». Как и в [20], где описаны аналогичные резонансы в плоскопоперечных сочленениях волноводов и где сама неоднородность также не имеет явно выраженного «физического» объема, первопричиной является «двумерность» самих апертур и, соответственно, многокомпонентность поля вблизи них. В терминах теории цепей в характере таких нагрузок присутствуют и емкостная, и индуктивная составляющие, обеспечивающие возможность резонанса. Такие собственные колебания образуют особый класс, названный нами «апертурные» колебания.

Было продемонстрировано, в частности, что «*enhanced transmission phenomena*» есть что иное, как предельный случай хорошо известных в электродинамике резонансов решетки с «полуволновыми щелями». С уменьшением размеров щелей до минимальных частота низкочастотного (из двух) резонанса полного прохождения через решетку плавно смещается вверх к частоте отсечки первой высшей флюке-гармоники. Кроме того, стало ясно, что конечная проводимость металла играет в этом явлении скорее «деструктивную» роль, так как омические потери снижают коэффициент прохождения в резонансной точке, в принципе, равный единице для решетки из идеального металла.

Укажем на то, что упоминание о роли собственных колебаний в формировании резонансных свойств периодических структур имелось уже в работе [11] и ранее в [21], а наиболее детальный анализ такой связи дан в монографии [19]. Однако радикальное отличие случая двумерно-периодической решетки состоит в трехмерности рассматриваемой задачи, а значит, в векторном (6-компонентном) характере полей новых собственных колебаний «апертуры» или «периодической решетки апертур», исследованных в работах [18, 20]. В то же время в объектах, описываемых двумерными «скалярными» задачами (например, [11]), подобные колебания не могут существовать в принципе (соответствующее доказательство приведено в работе [19]).

Несмотря на отличия в свойствах двумерных и одномерных периодических структур и достаточно большой объем публикаций в предыдущие годы, посвященных последним, одномерно-периодические структуры в настоящее время также достаточно активно исследуются в контексте «*enhanced transmission phenomena*». Так, в работах [22–24] рассмотрены резонансные эффекты в одномерно-периодических структурах со сложной структурой периода («компаундных»). Здесь

наблюдаются не только максимумы прохождения, но и всплески отраженного сигнала вплоть до полного отражения, а также меняется количество резонансных всплесков в зависимости от заполнения и структуры периода. Причина такого поведения трактуется по-разному. Возбуждение поверхностных волн – плазмонов-поляритонов (в случае неидеального металла) [12], связь двух полупространств посредством *ТЕМ*-волн плоскопараллельного волновода в щелях (при обсуждении резонансов типа Фабри-Перо) [25], говорили об «аномалиях Вуда» для объяснения резонансов вблизи точек скольжения [26], исследовали «фазовые» резонансы в компаундных решетках для объяснения явлений полного отражения. В последнем случае речь шла о фазах *ТЕМ*-волн в соседних щелях, вызвавших интерференционное гашение (или усиление) полей, порождаемых за решеткой [22–24]. При этом не объяснялось, вследствие чего именно такие фазовые распределения появились. Сами резонансные явления «привязывали» к разным зонам геометрических параметров или к разным частотным диапазонам, потому и вызывающие их механизмы обычно трактовались как различные. Установить связь между ними или, например, ответить на конкретный вопрос о природе фаз и амплитуд волноводных мод, ведущих именно к «полному» отражению (прохождению), в рамках задач рассеяния достаточно сложно.

Все это оказалось возможным, если описывать резонансные свойства объектов не применительно к конкретной геометрии или к той или иной области значений параметров решетки и частоты, а единообразно, используя общий подход, основанный на анализе спектра комплексных частот [18] и его аналитической связи с характеристиками рассеяния. Зная их, например, можно говорить о формировании определенных фазовых распределений в компаундных решетках исходя только из общих законов периодических структур и законов симметрии.

Целью данной работы является анализ свойств одномерно-периодических компаундных решеток на основе работ школы В. П. Шестопалова, т. е. изучение спектров собственных колебаний одномерно-периодических компаундных решеток, принципов формирования этих спектров, определяемых, в частности, структурой периода решетки, и затем анализ влияния таких спектров на резонансные характеристики. Здесь следует отметить, что уже в 1970-е гг. свойства подобных решеток были предметом исследований в советской литературе [27], да и на возможность полного резонансного отражения указывалось уже тогда.

На наш взгляд, для объяснения резонансного поведения компаундных решеток сущест-

венную роль должны играть соображения, связанные с симметрией возбуждаемых собственных колебаний и с видоизменением спектра собственных колебаний при введении регулярных сбоев в решетку. Ввиду изложенного авторы сочли важным вновь вернуться к этой теме на основе «спектрального» взгляда на одномерно-периодические решетки.

В работе, состоящей из двух частей, фундаментальные результаты, полученные в работах [11, 19], будут существенно дополнены и обобщены на металлические решетки с произвольным набором щелей на периоде. Часть 1 добавляет сведения о спектре «классической решетки», а часть 2 полностью посвящена «компаундной решетке», до сих пор в этом плане не изучавшейся.

**1. Метод исследования.** Рассмотрим металлический экран, который образован расположенными с периодом  $l$  группами идеально проводящих металлических брусьев, задаваемыми общей толщиной  $h$ , ширинами брусьев  $w_r$  и ширинами щелей между ними  $d_r$  ( $r = 1 \dots R$ ) (рис. 1). Обозначим координаты начала щелей по оси  $OX$  внутри периода как  $x_r$ .

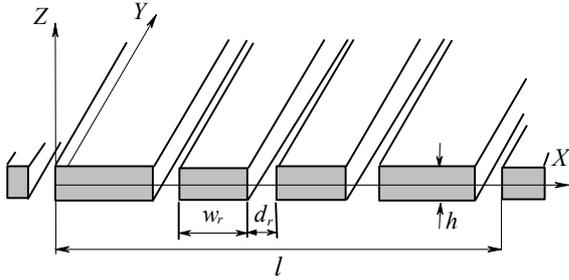


Рис. 1. Решетка из металлических брусьев с несколькими щелями на периоде

Следуя [19], рассмотрим такую решетку как открытый периодический резонатор, обладающий набором собственных колебаний с комплексными собственными частотами, а резонансные эффекты, возникающие в задачах рассеяния, будем интерпретировать как реакцию «резонатора» на возбуждение его плоской волной на реальных частотах  $f$ . Спектр собственных колебаний определяется нетривиальными решениями системы однородных уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{E}_j = ikW\vec{H}_j; \text{rot } \vec{H}_j = -i(k/W)\vec{E}_j \quad (1)$$

с граничными условиями  $[\mathbf{n} \times \vec{E}] = 0$  на поверхности брусьев и условием квазипериодичности  $\vec{E}, \vec{H}(x+l) = \vec{E}, \vec{H}(x)e^{i\Phi}$ . Здесь  $k = \omega c^{-1}$  – волновое число,  $W$  – импеданс среды, параметр  $\Phi$  определяет сдвиг фазы поля на периоде, зависи-

мость от времени предполагается в виде  $e^{-i\omega t}$ , где  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота.

Поскольку одномерно-периодическая структура рис. 1 однородна вдоль оси  $OY$ , то система (1) распадается на две независимые системы, определяющие собственные колебания  $TM$ - и  $TE$ -типа, имеющие соответственно единственные  $H_y$ - и  $E_y$ -компоненты поля или, иначе,  $H$ - и  $E$ -поляризованные. Мы рассмотрим только первые из них, так как нас будет интересовать реакция решетки на возбуждение именно  $H$ -поляризованной волной. Используемая далее математическая модель основана на методе частичных областей.

Учитывая условие периодичности поля вдоль оси  $OX$  с периодом  $l$ , а также граничные условия на металле внутри волноводных областей, представим поля в каждой из них в виде модовых разложений, соответствующих указанным условиям:

$$\begin{aligned} \vec{E}_j &= i \sum_p \gamma_{j,p}^{(TM)} A_{j,p}^{\pm(TM)} e^{\pm i \gamma_{j,p}^{(TM)} (z-z_j)} \vec{e}_{j,p}^{(TM)}, \\ \vec{H}_j &= \pm i \sum_p (k/W) A_{j,p}^{\pm(TM)} e^{\pm i \gamma_{j,p}^{(TM)} (z-z_j)} \vec{h}_{j,p}^{(TM)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\vec{e}_{j,p}^{(TM)}$  и  $\vec{h}_{j,p}^{(TM)}$  – электрические и магнитные базисные функции поперечного сечения;  $A_{j,p}^{\pm}$  – амплитуды волн Флоке, распространяющихся с постоянными распространения  $\gamma_{j,p}$  в положительном и отрицательном направлениях оси  $Z$  в каждой из подобластей с  $j=1,2$  для полупространств над и под решеткой и  $j=r+2$  для каждой  $r$ -й щели решетки ( $r=1 \dots R$ ).

Сшивая тангенциальные составляющие поля на границах частичных областей, получим систему матричных уравнений, связывающую векторы неизвестных амплитуд  $\vec{A}_1^- = (A_{1,p}^-)_p$  и  $\vec{A}_2^+ = (A_{2,p}^+)_p$  волн Флоке над и под решеткой с векторами амплитуд волн плоских волноводов  $C_r^\pm = (A_{r+2,q}^\pm)_q$  в щелях:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j (A_j^+ + A_j^-) &= \sum_r \mathbf{M}_{j,r} \mathbf{P}_r (C_r^+ + C_r^-), \\ \mathbf{Q}_r (C_r^+ - C_r^-) &= (\mathbf{M}_{j,r}^T)^* \mathbf{Q}_j (A_j^+ - A_j^-), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $j=1,2$ ;  $\mathbf{P}_j = (\gamma_{j,p}^{(TM)})_{p,p}$ ;  $\mathbf{Q}_j = (k/W)_{p,p}$  – диагональные матрицы;  $\mathbf{M}_{j,r} = \left( \langle \vec{e}_{r+2,m}, \vec{e}_{j,n}^* \rangle \Big|_{S_r} \right)_{m,n}$  – матрица коэффициентов связи базисов канала Флоке и волноводных областей.

При условии отсутствия волн, приходящих с бесконечности

$$A_{2,p}^- \equiv 0, \quad A_{1,p}^+ \equiv 0, \quad (4)$$

решения системы (4) будут определять все собственные колебания решетки.

Если из (3) исключить амплитуды волноводных волн  $C_r^\pm$  и учесть симметрию относительно плоскости решетки, то система (3), (4) может быть сведена к двум независимым системам уравнений, определяющим колебания, симметричные относительно плоскости  $XOY$  (магнитная стенка в плоскости симметрии  $z = 0$ )

$$u_p^{(m)} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_{pq} u_q^{(m)} = 0, \quad p = 0, \pm 1, \dots \quad (5)$$

и антисимметричные относительно этой плоскости (электрическая стенка в плоскости симметрии)

$$v_p^{(e)} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} D_{pq} v_q^{(e)} = 0, \quad p = 0, \pm 1, \dots, \quad (6)$$

где  $u_p^{(m)} = A_{2,p}^+ + A_{1,p}^-$  и  $v_p^{(e)} = A_{2,p}^+ - A_{1,p}^-$ .

Комплексные частоты, на которых определитель систем (5), (6) обращается в нуль, являются собственными частотами, составляющими спектр решетки. Этот спектр определен на многолистной римановой поверхности с разрезами, начинающимися в критических точках флореволн, где  $\gamma_{j,p}$  ( $j=1,2$ ) обращаются в нуль [19].

**2. Классификация колебаний. Общие свойства, обусловленные симметрией.** Предположим пока отсутствие фазового сдвига между соседними ячейками, т. е.  $\Phi = 0$ . Тогда при наличии симметрии в структуре самой ячейки собственные колебания могут быть разбиты на группы, характеризующиеся наличием идеальных «стенок» в той или иной плоскости симметрии объекта. Это будут «идеально магнитные стенки» ( $PMW$ ), на которых  $H_{tg}$  обращается в ноль, в случае симметричных колебаний или «идеально электрические» ( $PEW$ ), на которых  $E_{tg}$  обращается в ноль, – в случае антисимметричных колебаний.

Опираясь на то, что собственные частоты одномерно-периодических решеток с уменьшением их толщины движутся к точкам критических частот флореволн [19], можно осуществить классификацию собственных колебаний. С этой целью отметим далее символами вида  $(*, *)_{q(l)}$  семейства собственных колебаний решетки, имеющих магнитные или электрические ( $* \equiv m$  или  $* \equiv e$ ) стенки в плоскостях симметрии решетки, параллельных соответственно ( $YOZ$ ,  $XOY$ ). Нижний индекс  $q(l)$  определяет период  $l$  и ту гармонику Флоке, ниже критической частоты которой

расположены собственные частоты колебаний этой группы на первом (физическом) листе римановой поверхности. Вводя верхний индекс  $(n)$  как номер колебания в этом семействе  $(*, *)_{q(l)}^{(n)}$ , мы пронумеруем их в порядке «появления» соответствующих комплексных частот на первом листе с ростом толщины решетки. Как нами обнаружено, «высшие» колебания семейства «приходят» на основной лист с высших листов римановой поверхности, когда толщина решетки возрастает. При этом оказалось, что этот индекс можно связать и с количеством пучностей поля собственного колебания по глубине щели.

В итоге полное «имя» колебания будет выглядеть, например, как  $(e, m)_{\pm 1(l)}^{(2)}$ , что в данном случае обозначает имя второго колебания семейства с  $PEW$  в плоскости  $x = l/2$  и с  $PMW$  в плоскости  $z = 0$  из спектра собственных комплексных частот решетки с периодом  $l$ , которые при больших  $h$  расположены на основном листе до критической частоты  $\pm 1$  флореволн.

Существуют общие закономерности, которые следуют из условий симметрии внутренней структуры ячейки, трансляционной симметрии решетки в целом и закона сохранения энергии:

– наличие  $PEW(PMW)$ -стенки в центре «исходной» периодической ячейки любых размеров предопределяет наличие такой же стенки на ее границах;

– в силу симметрии поперечного сечения прямоугольных брусьев при нормальном падении в простейших решетках с  $N = 1$  и  $N = 2$ , а также при наличии симметрии внутри ячейки с  $N > 2$  радиационные потери (комплекснозначные частоты) существуют только у колебаний с тремя  $PEW$ -стенками;

– вследствие отсутствия радиационных потерь собственные частоты колебаний с тремя  $PMW$  при  $\Phi = 0$  в таких случаях располагаются на реальной оси;

– колебания (с тремя  $PMW$ ) могут возбуждаться только при наклонном падении или, например, при несимметрии ячейки с  $N > 2$ .

**3. Собственные колебания классической решетки с вертикальной  $PEW$ -стенкой.**

Остановимся далее на случае классической решетки с  $N = 1$  для того, чтобы опираться на эти данные при анализе спектра композитной решетки в Части 2. Симметрия периода и синфазность поля в периодических ячейках существенно разрежают спектр собственных колебаний и позволяют изучить некоторые дополнительные черты первого семейства колебаний, определяющие резонансное поведение решетки в одноволновом диапазоне.

Серия типичных графиков, представленных на рис. 2, позволяет проследить путь собственных частот первого семейства в комплексной плоскости при изменении толщины решетки. Толщина как параметр отмечена цифрами у кривых. Все кривые имеют схожий характер: у каждой существует минимум, соответствующий минимальной добротности соответствующего колебания, когда высота решетки близка к целому числу полуволн  $TEM$ -волны в щелях. С точностью до поправок на отражение от раскрывов щелей эти толщины соответствуют известным «интерференционным» резонансам полного прохождения через решетку. Здесь при максимальной связи верхнего и нижнего полупространств получаем и минимум добротностей собственных колебаний.

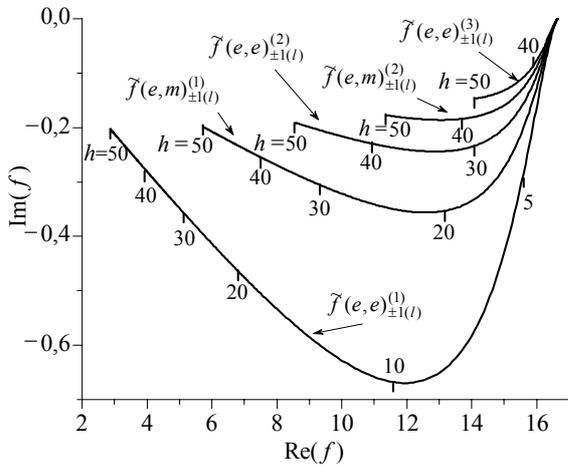


Рис. 2. Путь частот первого семейства  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(n)}$  в комплексной плоскости при изменении толщины решетки  $h$  на первом листе римановой поверхности;  $l = 18$  мм,  $x_1 = 8$  мм,  $d_1 = 2$  мм

Из рисунка видно, что путь первого колебания заканчивается на основном листе в точке  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$  на реальной оси, а частоты несимметричных колебаний  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(n)}$  с  $n = 2, 3$  пересекают реальную ось уже на первом высшем листе в точке  $f_{cut, \pm 1}^{floquet} + \Delta f = 16,6553$  ГГц при  $h = 18,91$  мм для  $n = 2$  и практически в той же частотной точке при  $h = 36,91$  мм для  $n = 3$ .

В целом все собственные частоты колебаний  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(n)}$  и  $(e, m)_{\pm 1(l)}^{(n)}$  с уменьшением  $h$  от больших величин к малым движутся сначала к точке отсечки первой высшей волны канала Флоке  $f < f_{cut, \pm 1}^{floquet} = 16,6551$  ГГц, но только первая из них, а именно  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  попадает непосред-

ственно в точку отсечки при уменьшении толщины решетки до нуля. Все остальные собственные частоты, поля которых имеют несколько вариаций поля вдоль щелей, подходят максимально близко к  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$  при некоторых конечных толщинах  $h$  и уходят затем через разрез на высший лист римановой поверхности (рис. 3).

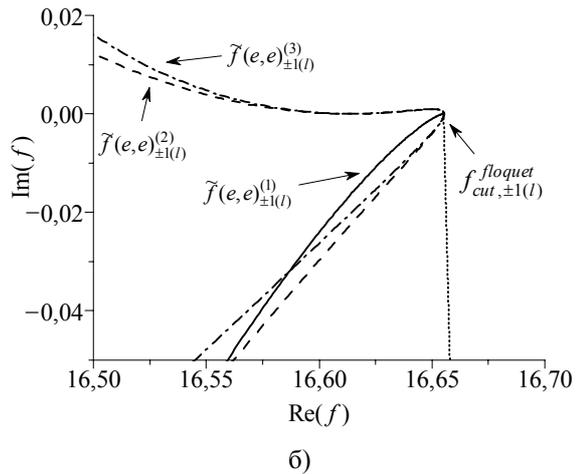
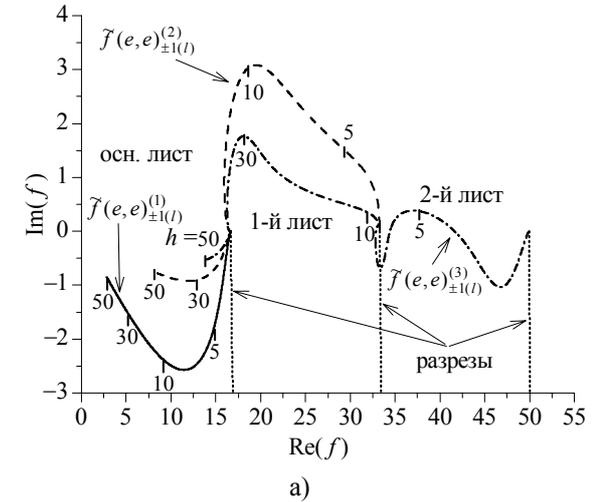


Рис. 3. Траектории спектральных точек  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(n)}$  первого семейства несимметричных (по  $OZ$ ) колебаний при изменении толщины решетки  $h$ : а) – на основном и высших листах; б) – переход комплексных собственных частот на 1-й высший лист римановой поверхности вблизи  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$ ;  $l = 18$  мм,  $x_1 = 5$  мм,  $d_1 = 8$  мм

Двигаясь далее, с уменьшением толщины решетки собственные частоты несимметричных колебаний  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(n)}$  с  $n > 1$  проходят некий путь в верхней полуплоскости соответствующего листа. При этом они либо заканчивают свой путь при нулевой толщине в соответствующей критической точке на реальной оси, либо опять проходят разрезы у критических частот  $f_{cut, |n| > 1}^{floquet}$ , переходя

затем с листа на лист, из верхней в нижнюю полуплоскость и наоборот (рис. 3) и т. д.

Подчеркнем, что предельными значениями при  $h=0$  для каждого из колебаний  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(n)}$ , т. е. там, где решетка вырождается в металлическую плоскость, являются точки  $f_{cut, \pm n}^{floquet}$  (рис. 3). Как видно, собственная частота  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(2)}$  второго колебания  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(2)}$  закончила свой путь в точке  $f_{cut, \pm 2}^{floquet} = 33,3102$  ГГц. Собственная частота третьего колебания  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(3)}$  в окрестности  $f_{cut, \pm 2}^{floquet}$ , двигаясь из верхней полуплоскости в нижнюю, пересекла вещественную ось в точке  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(3)} = 32,8636$  ГГц при толщине  $h = 10,115$  мм, после чего прошла через разрез при толщине  $h = 4,673$  мм со значением частоты  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(3)} = 32,243 - i \cdot 0,671$  ГГц. После этого она два раза пересекла вещественную ось и пришла в итоге при  $h=0$  в точку  $f_{cut, \pm 3}^{floquet}$ .

Собственные частоты симметричных (по OZ) колебаний  $(e, m)_{\pm 1(l)}^{(n)}$  ведут себя аналогичным образом (рис. 4).

Отличие состоит в том, что их «путь» не заканчивается в критических точках  $f_{cut, \pm n}^{floquet}$ , как на рис. 3, а они уходят при  $h \rightarrow 0$  на бесконечность в нижней или верхней полуплоскости соответственно при четном или нечетном  $n$ . Сама решетка вырождается здесь в плоскость, составленную из периодического набора чередующихся бесконечно тонких идеально-магнитных и идеально-электрических лент.

На рис. 5 для различных значений толщины решетки показаны распределения электрического поля колебания  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$ , позволяющие оценить изменение локализации электромагнитной энергии с изменением геометрии решетки. В случае глубокой решетки (рис. 5, а) или в случае глубины, соизмеримой с периодом (рис. 5, б), энергия колебания сосредоточена в щелях и поле только слегка проявляется в ближнем поле решетки (рис. 5, б). Возбуждение таких колебаний на частотах, близких к реальным частям соответствующих собственных частот, приводит к резонансам, называемым интерференционными или типа Фабри-Перо.

С уменьшением толщины экрана возрастает уровень ближнего поля решетки, и собственное поле сначала слегка «вытесняется» из щелей (рис. 5, в), а затем, при малых толщинах, оно полностью концентрируется у поверхности ре-

шетки (рис. 5, г). Собственная частота колебания начиная от решетки, изображенной на рис. 5, а, до решетки рис. 5, г движется к точке отсечки первой высшей волны канала Флоке. В задачах дифракции возбуждение колебаний вида рис. 5, в и особенно очень добротных – вида рис. 5, г – вблизи частоты отсечки вызывает добротные резонансы, именуемые обычно аномалиями Вуда-Рэлея.

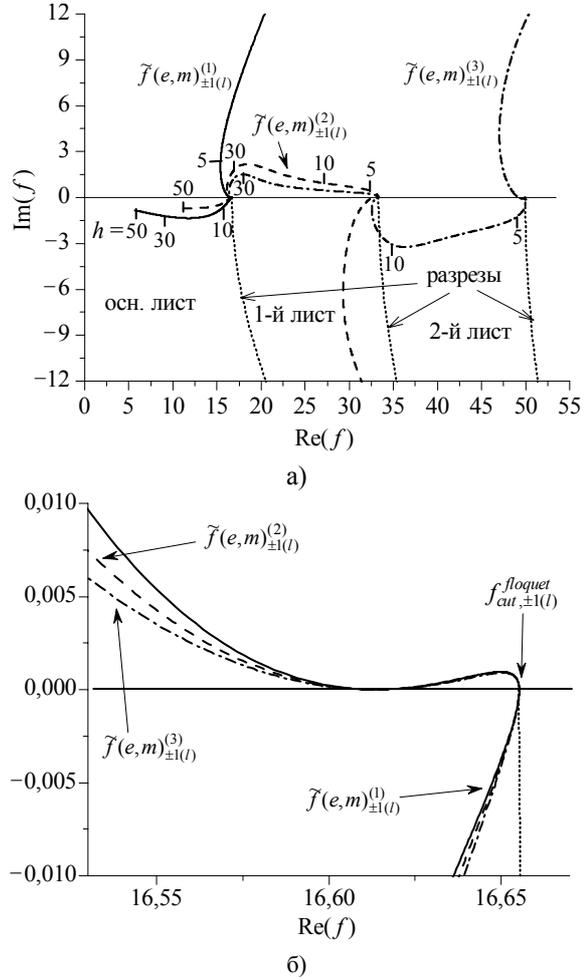


Рис. 4. Траектории спектральных точек  $\tilde{f}(e, m)_{\pm 1(l)}^{(n)}$  первого семейства симметричных (по OZ) колебаний: а) – на основном и высших листах; б) – переход комплексных собственных частот на 1-й высший лист римановой поверхности вблизи  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$ ;  $l = 18$  мм,  $x_1 = 5$  мм,  $d_1 = 8$  мм

Принадлежность одному спектральному семейству доказывает общность природы интерференционного резонанса типа Фабри-Перро в случае «толстых» решеток и аномалий Вуда-Рэлея, порожденных возбуждением того же собственного колебания. С уменьшением  $h$  это колебание поднялось вверх по частоте и приблизилось к предельной точке  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$  (см. кривую для  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  на рис. 2).

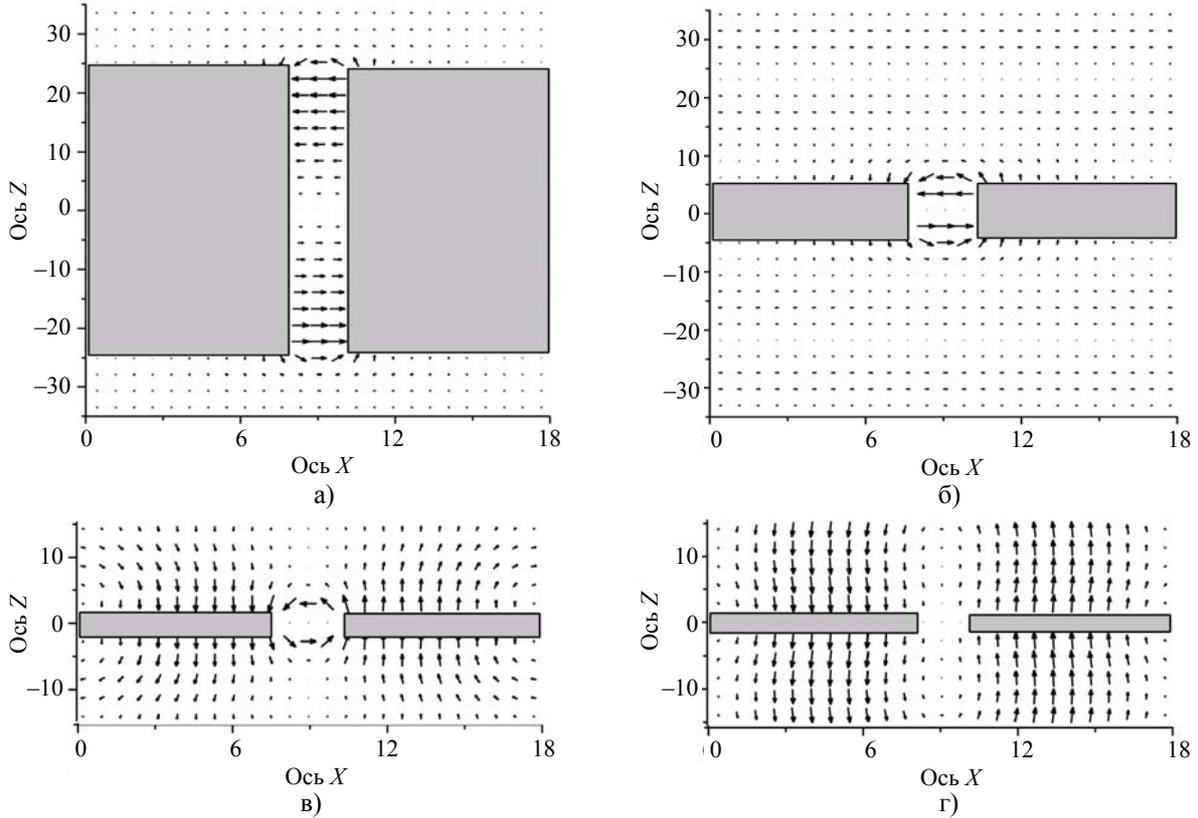


Рис. 5. Электрическое поле первого собственного колебания  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  в фазе  $\text{Re } \omega t = 0$  для решеток разной толщины: а)  $h = 50$  мм; б)  $h = 10$  мм; в)  $h = 5$  мм; г)  $h = 1$  мм;  $l = 18$  мм,  $x_1 = 8$  мм,  $d_1 = 2$  мм. Собственная частота колебания: а)  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)} = 2,8641 - i0,202$  ГГц; б)  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)} = 11,76 - i0,669$  ГГц; в)  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)} = 15,97 - i0,169$  ГГц; г)  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)} = 16,64 - i5,12 \cdot 10^{-4}$  ГГц

Здесь следует отметить одну особенность структуры собственных колебаний открытых резонансных структур, в отличие от собственных колебаний обычных закрытых объемных резонаторов. Структура электромагнитного поля в последних не изменяет свою «топологию»: электрическое поле в каждой точке синхронно уменьшается до нуля, энергия переходит в магнитное поле, растущее до максимума и т. д., но конфигурация поля или, другими словами, распределение энергии поля по объему остается фиксированным. В случае открытых систем в течение периода колебаний (затухающих) происходит изменение конфигурации поля.

На рис. 6 изображена структура электрического поля колебания  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  в той его фазе, когда  $\text{Re } \omega t = \pi/2$ . Если в начальный момент времени (см. рис. 5, б) электрическое поле сосредоточено в щелях и только слегка проявляется в ближнем поле решетки (рис. 6), то изменяясь дальше во времени, оно совершает обратное движение, и опять становится наиболее сильным в щелях (с обратным знаком) и т. д.

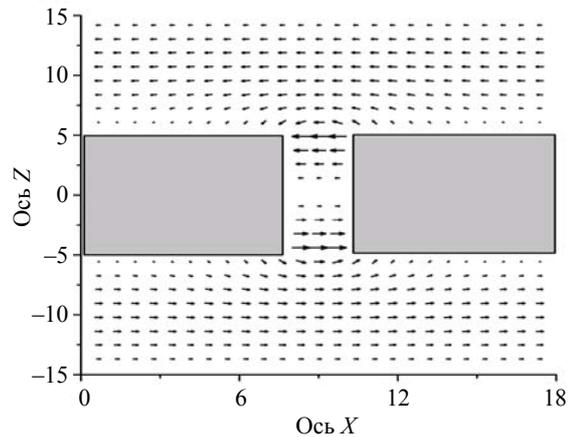


Рис. 6. Электрическое поле собственного колебания  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  в фазе  $\text{Re } \omega t = \pi/2$  (изменение в структуре поля по сравнению с рис. 5, б, где  $\text{Re } \omega t = 0$ )

**4. Особенности спектров собственных колебаний вблизи критических частот волн Флоке.** Рассмотрим более подробно поведение собственных частот в окрестности критических частот  $f_{cut, \pm n}^{floquet}$ . Как мы уже показали выше

(рис. 3, 4), каждая собственная частота  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(n)}$  при уменьшении толщины решетки движется в область больших частот, при этом, оказываясь в окрестности какой-либо  $f_{cut, \pm m}^{floquet}$ , она начинает к ней «притягиваться» (добротность колебания растет), траектория собственной частоты пересекает разрез, а затем и вещественную ось, уходя в другую полуплоскость. Отличное от других поведение наблюдалось только у собственной частоты колебания  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$ , которая всегда заканчивала свой путь при  $h \rightarrow 0$  на основном листе римановой поверхности, стремясь к  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$  (рис. 2, 3). Подчеркнем, что такое поведение  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  характерно для решеток с достаточно узкими щелями.

С увеличением размера щелей и частота первого колебания  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  начинает описывать характерную для других собственных частот траекторию (рис. 7). Чем шире щели между брусками решетки, тем раньше (при больших  $h$ ) собственная частота (реальная часть) приходит в окрестность критической частоты  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$ , имея при этом существенно малую мнимую часть, т. е. малую добротность. И уже для щелей  $d_1 > 10$  мм при  $h \rightarrow 0$   $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  заканчивает свой путь в  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$  не на основном листе, а пересекая сначала разрез и уходя на другой лист.

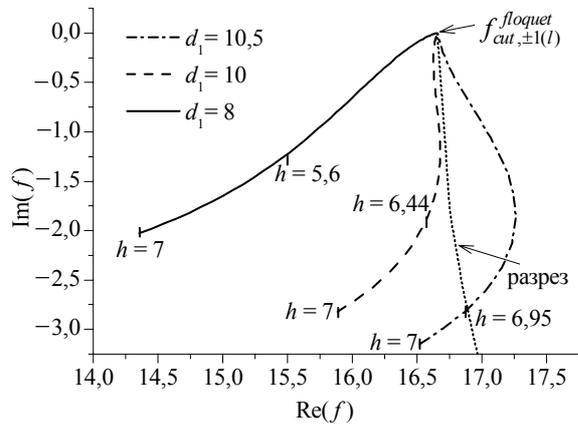


Рис. 7. Траектории спектральных точек колебания  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  в окрестности критической частоты  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$  для различных щелей  $d_1$

Более того, оказывается, что перед тем как подойти к  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$  на первом листе римановой поверхности собственная частота  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  вначале уходит в верхнюю полуплоскость, пересекая вещественную ось, и уже оттуда при доста-

точно малых  $h$  начинает двигаться к  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$  (рис. 8).

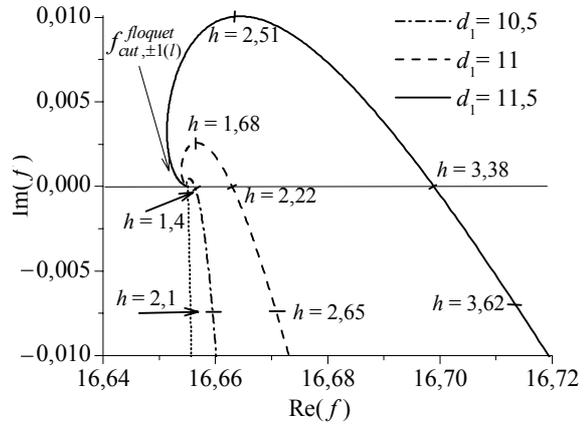


Рис. 8. Траектории  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  спектральных точек колебания  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  при приближении к критической частоте  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$  для различных щелей  $d_1$

При этом чем шире щель, тем более крутую траекторию описывает  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$ , выходя в верхнюю полуплоскость при относительно больших значениях  $h$ . Так, при  $d_1 = 11$  мм собственная частота  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  пересекла вещественную ось со значением  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)} = 16,6628$  ГГц при  $h = 2,22$  мм, а при  $d_1 = 11,5$  мм – со значением  $\tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)} = 16,699$  ГГц при  $h = 3,38$  мм.

**5. Интерференционные резонансы и особенности рассеяния на решетке вблизи критических частот.** Рассмотрим, как такое поведение собственных частот отражается на характеристиках рассеяния решетки (рис. 9). Решетка резонансно взаимодействует с полем падающей волны, когда частота возбуждения близка к вещественной части какой-либо собственной частоты. В нашем случае это проявляется резонансами полного прохождения  $T_{00} = 1$  (рис. 9, а, б), которые с уменьшением толщины решетки приближаются к окрестности  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$ , становясь при этом более добротными.

Растут и коэффициенты преобразования в высшие волны  $T_{\pm 10}, R_{\pm 10}$  (рис. 9, а, б). Такое поведение объясняется тем, что при приближении к  $f_{cut, \pm 1}^{floquet}$  в структуре колебания  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  начинают играть существенную роль  $\pm 1$ -е гармоники (см. рис. 5, г). Такое поведение характерно для решеток с неширокими щелями  $d_1 \leq 8$  мм. Когда же размер щелей уже  $d_1 \geq 10$  мм, то характеристики рассеяния несколько изменяются (рис. 9, в, г).

Уход собственной частоты колебания  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  с основного листа приводит к уменьшению вклада  $\pm 1$ -х гармоник в рассеянное поле (коэффициенты преобразования в высшие волны  $T_{\pm 10}$ ,  $R_{\pm 10}$  существенно меньше, чем на рис. 9, а, б), а также к изменению формы резонансного пика

коэффициента  $T_{00}$ . Его высокочастотный фронт становится более крутым. Резонанс как будто уходит в разрез. Вначале он становится более добротным, на его вершине наблюдается излом, а с дальнейшим уменьшением толщины решетки он начинает исчезать (рис. 9, г).

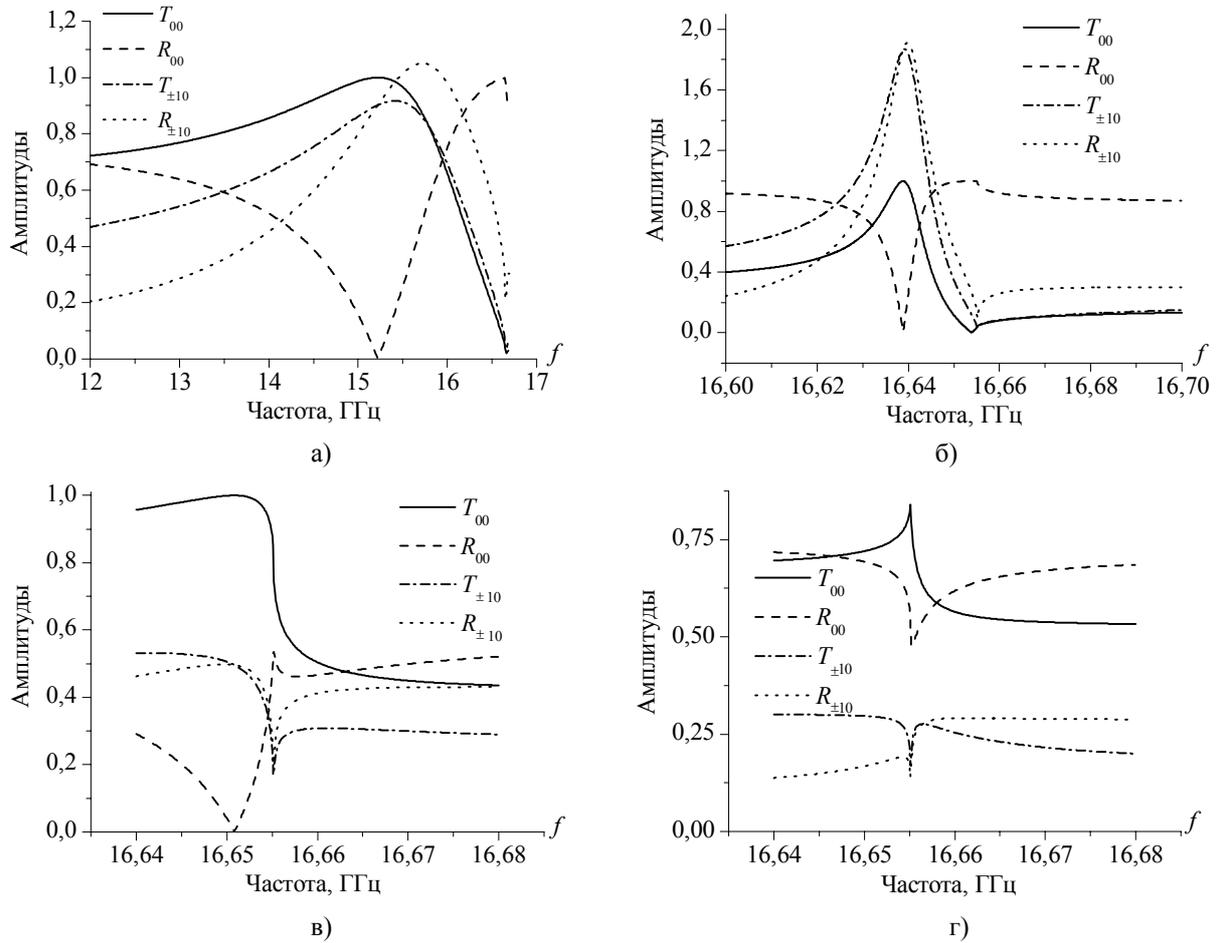


Рис. 9. Амплитуды нулевой и первой гармоник прошедшей и отраженных волн для решетки из брусьев в окрестности критической частоты  $f_{cut, \pm 1}^{Floquet}$  при различных параметрах решетки: а) –  $d_1 = 8$  мм,  $h = 2,5$  мм; б) –  $d_1 = 8$  мм,  $h = 1$  мм; в) –  $d_1 = 11$  мм,  $h = 2,228$  мм; г) –  $d_1 = 11$  мм,  $h = 1$  мм

Следует отдельно рассмотреть ситуацию, в которой собственная частота колебания  $(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)}$  выходит на вещественную ось, например, сразу за критической частотой первых высших волн.

Переход комплексной точки через разрез римановой поверхности на высший лист означает смену знака у одного из квадратных корней, определяющих постоянные распространения высших флоче-волн (здесь у  $\gamma_{1, \pm 1}$ ), или, другими словами, переход в другую «волновую» ситуацию. В спектре флоче-волн такого собственного колеба-

ния, найденном из решения однородной задачи на соответствующей собственной частоте, такие волны (здесь это уже распространяющиеся  $\pm 1$ -е пространственные гармоники) оказываются «падающими» на решетку, в отличие от «физического» листа, где реальные части всех постоянных распространения соответствуют «уходящим» волнам.

Ясно, что обсуждаемая спектральная точка, лежащая на вещественной оси высшего листа, описывает решение некоторой реальной задачи рассеяния на этой частоте. Здесь на решетку сверху и снизу одновременно падают че-

тыре  $\pm 1$ -х волны (или на гребенку – пара  $\pm 1$ -х волн), а уходят (в рассматриваемом случае по нормали) от решетки или гребенки только волны с нулевым индексом. Исходя из соображений взаимности находим, что при рассеянии плоской волны в этой частотной точке будет происходить полное преобразование падающей 0-й гармоники на гребенку (рис. 10) или пакета из двух волн, нормально падающих на решетку сверху и снизу в  $\pm 1$ -е флюке-волны [19].

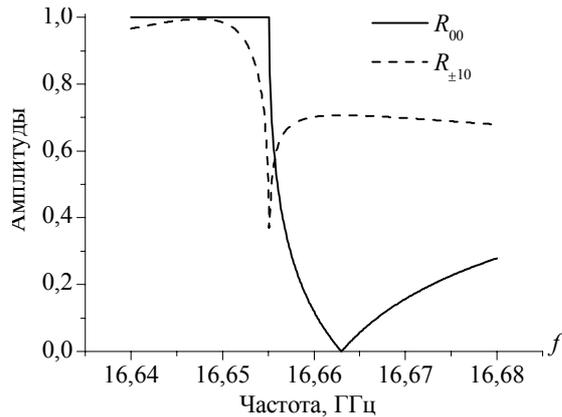


Рис. 10. Амплитуды нулевой и первой гармоник для отражающей гребенки с вещественной собственной частотой в окрестности критической частоты  $f_{\text{Floquet}}^{\pm 1}$   $d_1 = 11$  мм,  $h = 2,228/2$  мм

При обычном «одностороннем» возбуждении решетки здесь наблюдается равенство коэффициентов прохождения  $T_{00}$  и отражения  $R_{00}$  по амплитуде (рис. 9, в), а также их полная противоположность по фазе ( $\arg R_{00} - \arg T_{00} = 180^\circ$ ) на частоте  $f = \tilde{f}(e, e)_{\pm 1(l)}^{(1)} = 16,6628$  ГГц.

**Выводы.** Исследовано поведение пакета собственных колебаний классической решетки из прямоугольных металлических брусьев. Область поиска собственных частот явились и высшие листы римановой поверхности, на которые уходит часть спектра с уменьшением толщины решетки.

В случае *PEW* в центральной плоскости решетки предельными точками спектральных кривых являются критические частоты флюке-волн, причем чем выше номер колебания внутри одного семейства (большее число вариаций поля вдоль щели), тем выше номер волны, к критической частоте которой стремится спектральная точка на высших листах при уменьшении толщины решетки.

В случае *PMW* в центральной плоскости решетки предельные точки спектральных кривых уходят на бесконечность, стремясь к ней поочередно то в верхней полуплоскости, то в нижней.

Показано, что собственные колебания являются динамическими объектами, которые из-

меняют свою структуру как при пространственном изменении параметров решетки, так и во времени. Наблюдается связь между положением собственной частоты на римановой поверхности и волновой структурой колебания.

Рассмотрены закономерности поведения собственных частот в окрестности критических частот канала Флюке и обнаружено, что собственные частоты в окрестности разрезов имеют характерные траектории движения, пересекающие вещественную ось. Это может быть использовано для поиска параметров и возможности реализации режимов преобразования одних волновых пакетов в другие.

Резонансное поведение решетки описано с единых позиций спектральной теории, что позволяет не только установить связь между различными резонансными явлениями – резонансами типа Фабри-Перро, аномалиями Вуда, Рэлея, но и определить первопричину такого поведения, обусловленного возбуждением определенных собственных колебаний.

#### Библиографический список

1. *Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays* / T. W. Ebbesen, H. J. Lezec, H. F. Ghaemi et al. // *Nature*. – 1998. – 391, N 6668. – P. 667–669.
2. *Enhanced millimeter wave transmission through subwavelength hole arrays* / M. Beruete, M. Sorolla, I. Campillo et al. // *Opt. Lett.* – 2004. – 29, N 21. – P. 2500–2502.
3. *Light passing through subwavelength apertures* / F. J. Garcia-Vidal, L. Martin-Moreno, T. W. Ebbesen, L. Kuipers // *Rev. Modern Physics*. – 2010. – 82, iss. 1. – P. 729–780.
4. *Resonant optical transmission through hole-arrays in metal films: physics and applications* / R. Gordon, A. G. Brolo, D. Sinton, K. L. Kavanagh // *Laser & Photon. Rev.* – 2010. – 4, iss. 2. – P. 311–335.
5. *Baida F. I. Light transmission by subwavelength annular aperture arrays in metallic films* / F. I. Baida, D. Van Labeke // *Opt. Commun.* – 2002. – 209, iss. 1–3. – P. 17–22.
6. *Lu Xinchao. Resonant terahertz reflection of periodic arrays of subwavelength metallic rectangles* / Xinchao Lu, Jianguang Han, Weili Zhang // *Appl. Phys. Lett.* – 2008. – 92, iss. 12. – 121103 (3 p.)
7. *Хрусьлов Е. Я. О резонансных явлениях в одной задаче дифракции* // *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*. – 1968. – 6. – С. 111–129.
8. *Transmission resonances through aperiodic arrays of subwavelength apertures* / T. Matsui, A. Agrawal, A. Nahata, Z. V. Vardeny // *Nature*. – 2007. – 446, N 7135. – P. 517–521.
9. *Enhanced microwave transmission through a single subwavelength aperture surrounded by concentric grooves* / M. J. Lockyear, A. P. Hibbins, J. R. Sambles, C. R. Lawrence // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* – 2005. – 7, N 2. – P. 152–158.
10. *Lezec H. J. Diffracted evanescent wave model for enhanced and suppressed optical transmission through subwavelength hole arrays* / H. J. Lezec, T. Thio // *Optics Express*. – 2004. – 12, N 16. – P. 3629–3651.
11. *Sologub V. G. Diffraction of electromagnetic waves on the grating with narrow slits* / V. G. Sologub, V. P. Schestopalov, G. G. Polovnikov // *J. Techn. Phys.* – 1967. – 37, N 4. – P. 667–679.
12. *Porto J. A. Transmission resonances on metallic gratings with very narrow slits* / J. A. Porto, F. J. Garcia-Vidal, J. B. Pendry // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – 83, N 14. – P. 2845–2848.
13. *Pendry J. B. Mimicking Surface Plasmons with Structured Surfaces* / J. B. Pendry, L. Martin-Moreno, F. J. Garcia-Vidal // *Science*. – 2004. – 305, iss. 5685. – P. 847–848.

14. *Surface plasmons enhance optical transmission through sub-wavelength holes* / H. F. Ghaemi, T. Thio, D. E. Grupp et al. // *Phys. Rev. B.* – 1998. – 58, N 11. – P. 6779–6782.
15. *Oliner A. A. Leaky surface-plasmon theory for dramatically enhanced transmission through a subwavelength aperture. Pt. I: Basic features* / A. A. Oliner, D. R. Jackson // *Proc. IEEE AP-S Symp. Radio Science Meeting.* – Columbus, OH, 2003. – Vol. 2. – P. 1091–1094.
16. *Sarrazin M. Bounded modes to the rescue of optical transmission* / M. Sarrazin, J.-P. Vigneron // *Europhysics News.* – 2007. – 38, N 3. – P. 27–31.
17. *Medina F. Extraordinary Transmission Through Arrays of Slits: A Circuit Theory Model* / F. Medina, F. Mesa, D. C. Skigin // *IEEE Trans. On Micr. Theory and Techn.* – 2010. – 58, N 1. – P. 105–115.
18. *Kirilenko A. A. On the common nature of the enhanced and resonance transmission through the periodical set of holes* / A. A. Kirilenko, A. O. Perov // *IEEE Trans. on Antennas and Propagat.* – 2008. – 56, N 10. – P. 3210–3216.
19. *Шестопалов В. П. Динамическая теория решеток* / В. П. Шестопалов, Ю. К. Сиренко. – К.: Наук. думка, 1989. – 216 с.
20. *Don N. G. New type of eigenoscillations and total-transmission resonance through an iris with below-cutoff hole in a rectangular waveguide* / N. G. Don, A. A. Kirilenko, S. L. Senkevich // *Radiophysics and Quantum Electronics.* – 2008. – 51, N 2. – P. 101–108.
21. *Hessel A. A new theory of Wood's anomalies on optical gratings* / A. Hessel, A. A. Oliner // *Appl. Opt.* – 1965. – 4, N 10. – P. 1275–1297.
22. *Skigin D. C. Transmission resonances of metallic compound gratings with subwavelength slits* / D. C. Skigin, R. Depine // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – 95, iss. 21. – 217402 (4 p.).
23. *Microwave transmission of a compound metal grating* / A. P. Hibbins, I. R. Hooper, M. J. Lockyear, J. R. Sambles // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – 96, iss. 25. – 257402 (4 p.).
24. *Microwave transmission modes in compound metallic gratings* / Y. G. Ma, X. S. Rao, G. F. Zhang, C. K. Ong // *Phys. Rev. B.* – 2007. – 76, iss. 8. – 085413 (5 p.).
25. *Bo Hou. Transmission resonances of electromagnetic wave through metallic gratings: phase and field characterizations* / Bo Hou, Weijia Wen // *Optics Express.* – 2008. – 21, N 16. – P. 17098–17106.
26. *Sarrazin M. Role of Wood anomalies in optical properties of thin metallic films with a bidimensional array of subwavelength holes* / M. Sarrazin, J.-P. Vigneron, J.-M. Vigoureux // *Phys. Rev. B.* – 2003. – 67, N 8. – 085415 (8 p.).
27. *Масалов С. А. Резонансные явления при дифракции электромагнитных волн на периодических решетках волнового типа* / С. А. Масалов, Ю. К. Сиренко // *Укр. физ. журн.* – 1978. – 23, № 9. – С. 1439–1446.

*Рукопись поступила 28.11.11*

A. O. Perov, A. A. Kirilenko, S. L. Senkevich

EIGENOSCILLATIONS AND RESONANCE  
PROPERTIES OF ONE-DIMENSIONAL METAL  
BAR GRATINGS  
PART I. CLASSICAL GRATING

At present the resonant properties of perforated metal gratings are of interest caused by the study, interpretation and possible practical use of the «enhanced transmission phenomena». The goal

of this work is the analysis of the one-dimensional periodic grating properties based on the V. P. Shestopalov school works, i.e. the study the oscillation spectra, the spectra formation principles defined in particular by the structure of the grating period and then the analysis of the spectra impact on the resonance characteristics. *H*-wave scattering peculiarities on one 1-*D* metal bar grating are considered. Resonant behavior treatment is based on open periodical resonator spectral theory. Spectrum classification is introduced for classical and compound gratings. Low eigenoscillations spectrum of classical grating as function of geometrical parameters is investigated, and eigenfrequency movement on multi sheet Riemann surface depending on grating thickness is analyzed. It is shown that limit positions of antisymmetrical eigenfrequencies are Floquet mode grazing points and the more field variation of the eigenoscillation is, the higher Floquet mode number is. Eigenfrequency paths on high Riemann sheets and the peculiarities of crossing real axis are studied. Resonance behavior of grating is described from a unified standpoint of spectral theory, which allows not only to determine the relationship between different resonant phenomena, but also to determine the root cause of such behavior caused by the excitation of certain oscillations.

**Key words:** one-dimensional periodical structures, metal bar grating, resonance scattering, eigenoscillations.

A. O. Перов, А. А. Кириленко, С. Л. Сенкевич

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ТА РЕЗОНАНСНІ  
ВЛАСТИВОСТІ ОДНОВИМІРНИХ  
ПЕРІОДИЧНИХ ҐРАТОК  
З МЕТАЛІЧНИХ БРУСІВ  
ЧАСТИНА I. КЛАСИЧНА ҐРАТКА

Перфоровані металеві ґратки переживають сьогодні нову хвилю інтересу до їх резонансних властивостей, зумовленого дослідженням, інтерпретацією і можливим практичним використанням явища, названого «*enhanced transmission phenomena*». Метою роботи є аналіз властивостей одновимірно-періодичних ґраток на основі робіт школи В. П. Шестопалова, тобто вивчення спектрів власних коливань, принципів формування цих спектрів, що визначаються, зокрема, структурою періоду ґратки, і потім аналіз впливу таких спектрів на резонансні властивості. Розглянуто закономірності, що виникають при розсіянні *H*-поляризованої плоскої хвилі на одновимірній періодичній ґратці з металічних брусів. Особливості резонансної взаємодії трактується з позицій спектральної теорії відкритих періодичних резонаторів. Введено класифікацію спектрів класичної та композитної ґраток. Вивчено спектр нижчих власних коливань класичної ґратки як функції геометрії ґратки, досліджено рух власних частот по багатолінійній рімановій поверхні при зменшенні товщини до нуля. Показано, що межові точки частот несиметричних коливань відповідають частотам відсічення вищих гармонік Флоке і чим більше варіацій поля власного коливання, тим більше номер тієї гармоніки. Досліджено траєкторії власних частот на високих листах і закономірності їх виходу на дійсну вісь, де відбувається перетворення пакетів хвиль. Резонансну поведінку ґратки описано з єдиних позицій спектральної теорії, що дозволяє не тільки встановити зв'язок між різними резонансними явищами, але й визначити причину такої поведінки, зумовленої збудженням певних власних коливань.

**Ключові слова:** одновимірні періодичні структури, ґратка з металічних брусів, резонансне відбиття, власні коливання.