

А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

E-mail: melezhhik@ire.kharkov.ua

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Исследование дифракционных характеристик слоисто-неоднородных сред обусловлено их широким использованием. Однако на сегодняшний день в научной литературе известно лишь незначительное количество специальных зависимостей материальных параметров слоя от пространственных координат, когда удается получить аналитические решения, описывающие волновые процессы, происходящие в них. В основном эти решения строятся с помощью асимптотических или прямых численных методов. При построении решения спектральной задачи для неоднородного магнитоэлектрического слоя был применен так называемый метод Риккати. В итоге получен устойчивый в вычислительном отношении алгоритм решения спектральных задач, который позволил исследовать резонансные эффекты, сопровождающие процесс взаимодействия волн со слоисто-неоднородной средой, а также описать с помощью собственных частот и собственных колебаний хорошо известные понятия, как запрещенная зона в теории распространения волн в периодических структурах и резонанс в запрещенной зоне при нарушении периодичности материальных параметров среды. Результаты исследований позволяют проводить изучение волновых процессов в неоднородных магнитоэлектрических, неоднородных плазмоподобных и других такого типа слоях без существенных ограничений на их материальные параметры и могут быть использованы при решении обратных задач электродинамики, а также в голографии, томографии, радиолокации и др. Ил. 9. Библиогр.: 35 назв.

Ключевые слова: спектральная теория, собственные частоты, брэгговское рассеяние.

На протяжении многих десятилетий не ослабевает интерес исследователей к спектральным задачам теории дифракции монохроматических волн [1–12]. С формально-математической точки зрения эти задачи описывают особенности аналитического продолжения решений задач дифракции в область комплексных, иногда физически нереализуемых, значений параметров (частота, энергия и т. п.) [13–19].

При таком «аналитическом продолжении» краевой задачи дифракции в область комплексных значений параметров центральным является вопрос: какими условиями на бесконечной следует заменить классические условия излучения Зоммерфельда? Оказалось, что, например, в двумерном случае для ограниченных рассеивателей таким условием является условие излучения Рейхардта [1]. Так сформулированная задача дифракции при вещественных значениях частоты ω эквивалентна задаче с условием излучения Зоммерфельда. Она «аналитически продолжается» на соответствующую риманову поверхность R комплексных значений ω и имеет единственное решение всюду в R вне некоторого не более счетного дискретного множества $\{\omega_n\}$ с единственной точкой накопления на бесконечности (если материальные параметры рассеивателя не зависят от частоты). Значения ω_n – собственные значения рассматриваемой уже однородной задачи (отсутствуют источники), которым отвечают собственные функции (собственные колебания), причем значения ω_n одновременно являются полюсами конечной кратности аналитического продолжения резольвенты оператора исходной задачи дифракции [7, 15, 19]. Адекватным математи-

ческим аппаратом для получения всех этих результатов «спектральной теории открытых структур» сегодня является теория несамосопряженных операторов и мероморфных оператор-функций [11, 20–25]. Воспользовавшись ее методами удалось с помощью соответствующих процедур аналитической регуляризации краевых задач дифракции [6–9, 12]. Эти процедуры позволяют эквивалентно свести краевую задачу для комплексных частот к уравнению второго рода вида $x + A(\omega)x = b$, $x, b \in l_2$, $\omega \in R$,

где запись $A = A(\omega)$ подчеркивает зависимость оператор-функции $A(\omega)$ от ω .

Для многих исследованных классов задач дифракции (например, [12]) оператор $A(\omega)$ является компактным при каждом $\omega \in R$ (и даже ядерным), а оператор-функция $A(\omega)$ – мероморфной на R оператор-функцией ($\omega \neq 0, \infty$). При каждом вещественном значении ω , лежащем на «физическом» листе римановой поверхности R , оператор $A(\omega)$ совпадает с оператором, полученным в результате аналитической регуляризации задачи дифракции с условием излучения Зоммерфельда [9, 12].

Спектральная задача на собственные значения и собственные функции задачи с условием излучения Рейхардта сводится теперь, как можно показать [12], к спектральной задаче для оператор-функции $I + A(\omega)$ – задаче определения характеристических чисел ω_n и векторов x_n , при которых однородное уравнение

$$x_n + A(\omega)x_n = 0$$

имеет нетривиальное решение.

Описанный подход, основанный на применении подходящей процедуры регуляризации для решения спектральных задач электродинамики, был, по-видимому, впервые использован в работах [24, 25]. На этой основе получены ключевые результаты спектральной теории открытых резонаторов с диэлектрическими неоднородностями [26] и решеток [7, 12].

Как показано в многочисленных работах ([6–9, 12, 27–31] и библиографические списки в них), такой подход позволяет на качественно новом уровне изучать резонансные эффекты, сопровождающие процесс дифракции волн на разнообразных структурах (периодические решетки, открытые волноводы и резонаторы, неоднородности в волноводах и т. п.).

В данной работе этот подход применяется к спектральным задачам теории дифракции волн в слоисто-неоднородных средах, материальные параметры которых зависят от одной пространственной координаты. Как будет показано далее, идея «аналитического продолжения» позволила с единых позиций описать резонансные режимы рассеяния волн в таких средах.

1. Спектральная задача. Алгоритм построения решения. В качестве модели слоисто-неоднородной среды будем рассматривать плоский слой толщиной h . Пусть границы слоя совпадают с плоскостями $z = 0$ и $z = -h$, где x, y, z – декартовы координаты (рис. 1).

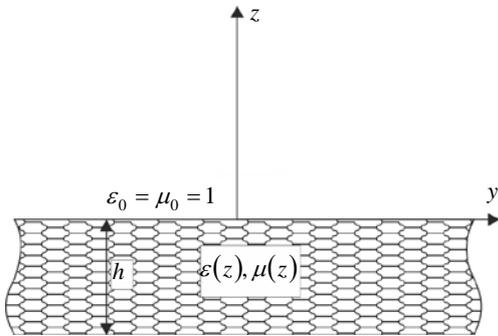


Рис. 1. Геометрия задачи

Будем предполагать, что относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости слоя зависят только от координаты z $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $\mu = \mu(z)$, а полупространства $z > 0$ и $z < -h$ заполнены однородной средой с относительными диэлектрическими и магнитными проницаемостями $\varepsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$.

Сформулируем спектральную задачу о собственных частотах и собственных колебаниях для такой слоисто-неоднородной среды. При этом ограничимся двумерным случаем, а именно предположим, что собственные колебания зависят от

координаты y по закону $e^{i\Phi y}$ (Φ – произвольное вещественное число) и не зависят от координаты x , а зависимость от времени примем в виде $e^{-i\omega t}$. Кроме того, введем безразмерные параметры

$$\bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \kappa = \frac{\omega h}{c}, \quad \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{h}, \quad (1)$$

где c – скорость света в вакууме. Тогда, учитывая сделанные предположения, спектральную задачу можно сформулировать следующим образом. Требуется определить значения частотного параметра $\kappa = \omega h/c$, при которых существуют нетривиальные решения (собственные колебания) однородных уравнений Максвелла:

– E -колебания

$$\frac{d\bar{E}_x}{d\bar{z}} = i\kappa\tilde{\mu}(\bar{z})\bar{H}_y, \quad \bar{\Phi}\bar{E}_x = -\kappa\tilde{\mu}(\bar{z})\bar{H}_z, \quad (2)$$

$$i\kappa\tilde{\varepsilon}(\bar{z})\bar{E}_x = \frac{d\bar{H}_y}{d\bar{z}} - i\bar{\Phi}\bar{H}_z;$$

– H -колебания

$$\frac{d\bar{H}_x}{d\bar{z}} = -i\kappa\tilde{\varepsilon}(\bar{z})\bar{E}_y, \quad \bar{\Phi}\bar{H}_x = \kappa\tilde{\varepsilon}(\bar{z})\bar{E}_z, \quad (3)$$

$$i\kappa\tilde{\mu}(\bar{z})\bar{H}_x = i\bar{\Phi}\bar{E}_z - \frac{d\bar{E}_y}{d\bar{z}}.$$

Функции $\bar{E}_x, \bar{E}_y, \bar{H}_x, \bar{H}_y$ должны удовлетворять условию непрерывности на границах слоя, т. е. при $\bar{z} = 0$ и $\bar{z} = -1$, а в полупространствах $\bar{z} > 0$ и $\bar{z} < -1$ удовлетворять условию излучения, а именно:

$$\bar{E}_x = \begin{cases} R_E e^{i\Gamma\bar{z}}, & \bar{z} > 0, \\ T_E e^{-i\Gamma(\bar{z}+1)}, & \bar{z} < -1; \end{cases} \quad (4)$$

$$\bar{H}_x = \begin{cases} R_H e^{i\Gamma\bar{z}}, & \bar{z} > 0, \\ T_H e^{-i\Gamma(\bar{z}+1)}, & \bar{z} < -1. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь

$$\tilde{\mu}(\bar{z}) = \begin{cases} 1, & \bar{z} > 0, \bar{z} < -1, \\ \mu(\bar{z}), & -1 < \bar{z} < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\varepsilon}(\bar{z}) = \begin{cases} 1, & \bar{z} > 0, \bar{z} < -1, \\ \varepsilon(\bar{z}), & -1 < \bar{z} < 0, \end{cases}$$

а величина $\Gamma = \sqrt{\kappa^2 - \bar{\Phi}^2}$ рассматривается как функция спектрального параметра κ , принадлежащего двулистной римановой поверхности с двумя точками ветвления $\kappa_{\pm} = \pm\bar{\Phi}$. Листы римановой поверхности представляют собой комплексные плоскости, разрезанные вдоль линий $(\text{Re } \kappa)^2 - (\text{Im } \kappa)^2 - \bar{\Phi}^2 = 0$, $\text{Im } \kappa \leq 0$, выходящих из точек κ_+ и κ_- (рис. 2). На первом листе функция

$\Gamma = \sqrt{\kappa^2 - \bar{\Phi}^2} = \text{Re } \Gamma + i \text{Im } \Gamma$ задана следующим образом: при $0 < \arg \kappa < \pi$ $\text{Im } \Gamma > 0$, а $\text{Re } \Gamma \geq 0$ в

области $0 \leq \arg \kappa \leq \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{Re} \Gamma \leq 0$ в области $\frac{\pi}{2} < \arg \kappa < \pi$. Для значений κ с $\frac{3\pi}{2} \leq \arg \kappa < 2\pi$, удовлетворяющих неравенству $(\operatorname{Re} \kappa)^2 - (\operatorname{Im} \kappa)^2 - \bar{\Phi}^2 > 0$, значения функции Γ определяются условиями $\operatorname{Re} \Gamma > 0$ и $\operatorname{Im} \Gamma < 0$, а при выполнении противоположного неравенства – $\operatorname{Re} \Gamma < 0$ и $\operatorname{Im} \Gamma > 0$. В области $\pi \leq \arg \kappa \leq \frac{3\pi}{2}$ ситуация аналогична предыдущей с точностью до перемены знака перед $\operatorname{Re} \Gamma$. На втором листе римановой поверхности значения функции $\Gamma = -\operatorname{Re} \Gamma - i \operatorname{Im} \Gamma$.

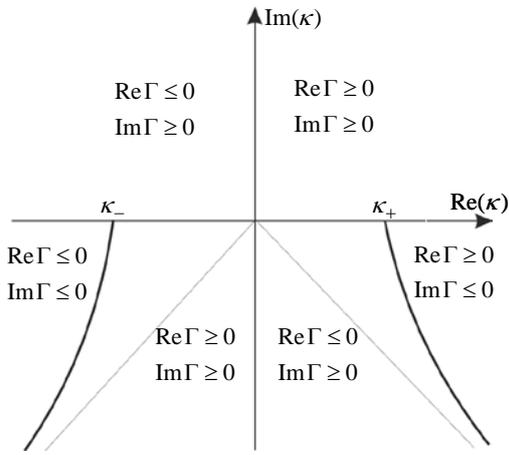


Рис. 2. Схема первого листа римановой поверхности для спектральной задачи о собственных колебаниях

Отметим, что условия излучения (4), (5) при вещественных значениях спектрального параметра κ ($\operatorname{Im} \kappa = 0$) согласуются с физически очевидным условием – отсутствие волн, которые приходят из бесконечности к границе слоисто-неоднородной среды и являются «аналитическим продолжением» этого условия в область комплексных значений κ ($\operatorname{Im} \kappa \neq 0$).

Можно показать, что спектральная задача (2)–(5) эквивалентна следующей задаче. С этой целью введем обозначения $u_E = \bar{E}_x$, $u_H = \bar{H}_x$. Тогда из (2) и (3) следует, что функции u_E и u_H должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d}{d\bar{z}} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}(\bar{z})} \frac{du_E}{d\bar{z}} \right) + \left(\kappa^2 \tilde{\varepsilon}(\bar{z}) - \frac{\bar{\Phi}^2}{\tilde{\mu}(\bar{z})} \right) u_E = 0; \quad (6)$$

$$\frac{d}{d\bar{z}} \left(\frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\bar{z})} \frac{du_H}{d\bar{z}} \right) + \left(\kappa^2 \tilde{\mu}(\bar{z}) - \frac{\bar{\Phi}^2}{\tilde{\varepsilon}(\bar{z})} \right) u_H = 0 \quad (7)$$

и граничным условиям

$$[u_E]_{\bar{z}=0,-1} = 0, \quad [u_H]_{\bar{z}=0,-1} = 0; \quad (8)$$

$$\left[\frac{1}{\tilde{\mu}(\bar{z})} \frac{du_E}{d\bar{z}} \right]_{\bar{z}=0,-1} = 0, \quad \left[\frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\bar{z})} \frac{du_H}{d\bar{z}} \right]_{\bar{z}=0,-1} = 0, \quad (9)$$

где $[u]_{\bar{z}=a} = u(a+0) - u(a-0)$ – обозначает разность предельных значений функции u в точке $\bar{z} = a$. Кроме того, функции u_E и u_H должны удовлетворять условиям излучения (4) и (5). Как следует из (2) и (3), компоненты электрического и магнитного полей собственных колебаний выражаются через функции u_E и u_H следующим образом:

– E -колебания

$$E_x = u_E e^{i\bar{\Phi}\bar{y}}, \quad H_y = \frac{1}{i\kappa \tilde{\mu}(\bar{z})} \frac{du_E}{d\bar{z}} e^{i\bar{\Phi}\bar{y}},$$

$$H_z = -\frac{\bar{\Phi}}{\tilde{\mu}(\bar{z})} u_E e^{i\bar{\Phi}\bar{y}};$$

– H -колебания

$$H_x = u_H e^{i\bar{\Phi}\bar{y}}, \quad E_y = -\frac{1}{i\kappa \tilde{\varepsilon}(\bar{z})} \frac{du_H}{d\bar{z}} e^{i\bar{\Phi}\bar{y}},$$

$$E_z = \frac{\bar{\Phi}}{\tilde{\varepsilon}(\bar{z})} u_H e^{i\bar{\Phi}\bar{y}}.$$

В дальнейшем ограничимся случаем E -колебаний (см. уравнение (6)). Случай H -колебаний может быть рассмотрен по аналогичной схеме.

Таким образом, исходная спектральная задача сведена к построению решения уравнения (6), удовлетворяющего условиям (8), (9) и условию излучения (4), в полупространствах $\bar{z} > 0$ и $\bar{z} < -1$ функция u_E может быть представлена в виде

$$u_E = \begin{cases} R_E e^{i\bar{\Gamma}\bar{z}}, & \bar{z} > 0, \\ T_E e^{-\bar{\Gamma}(\bar{z}+1)}, & \bar{z} < -1. \end{cases} \quad (10)$$

В области $-1 < \bar{z} < 0$ эта функция должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{d\bar{z}} \left(\frac{1}{\mu(\bar{z})} \frac{du_E}{d\bar{z}} \right) + \left(\kappa^2 \varepsilon(\bar{z}) - \frac{\bar{\Phi}^2}{\mu(\bar{z})} \right) u_E = 0. \quad (11)$$

Общее решение этого уравнения является суперпозицией двух линейно независимых решений. Предположим, что построены решения уравнения (11), удовлетворяющие следующим условиям при $\bar{z} = -1$:

$$u_{\pm}(-1) = 1, \quad \frac{du_{\pm}(-1)}{d\bar{z}} = \pm iq, \quad (12)$$

где $q = \mu(-1) \sqrt{\kappa^2 - \bar{\Phi}^2}$.

Очевидно, что функции u_{\pm} линейно независимы, если $\mu(-1) \neq 0$ и $\kappa \neq \pm \bar{\Phi}$. Тогда, предполагая, что последние условия выполнены, общее решение уравнения (11) можно представить в виде

$$u_E = A_+ u_+ + A_- u_-, \quad (13)$$

где A_{\pm} – произвольные постоянные величины.

Подставляя (13) в граничные условия слоисто-неоднородной среды (8), (9) на нижней границе ($\bar{z} = -1$) и учитывая (10), легко показать, что $A_+ = 0$, $A_- = T_E$. Если теперь воспользоваться граничным условием на верхней границе слоисто-неоднородной среды ($\bar{z} = 0$), то получим

$$\begin{aligned} R_E - T_E u_-(0) &= 0, \\ i\Gamma \mu(0) R_E - T_E \frac{du_-(0)}{d\bar{z}} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Условием существования нетривиального решения системы линейных уравнений (14) является обращение в нуль определителя матрицы этой системы уравнений. Тогда из (14) имеем

$$\frac{du_-(0)}{d\bar{z}} - i\Gamma \mu(0) u_-(0) = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) является дисперсионным уравнением относительно спектрального параметра κ (собственных частот). Те значения κ , которые удовлетворяют этому уравнению, связаны с искомыми собственными частотами по формуле $\omega = \kappa c/h$.

Таким образом, как следует из вышеизложенного, ключевым моментом в построении решения исходной спектральной задачи является нахождение решения уравнения (6), удовлетворяющего условиям (12).

Ниже предлагается численный алгоритм построения решения уравнения (6). Итак, требуется построить решение следующей задачи:

$$\frac{d}{d\bar{z}} \left(\frac{1}{\mu(\bar{z})} \frac{du_-}{d\bar{z}} \right) + \left(\kappa^2 \varepsilon(\bar{z}) - \frac{\bar{\Phi}^2}{\mu(\bar{z})} \right) u_- = 0; \quad (16)$$

$$u_-(-1) = 1, \quad \frac{du_-(-1)}{d\bar{z}} = -iq, \quad (17)$$

где $q = \mu(-1)\sqrt{\kappa^2 - \bar{\Phi}^2}$.

Определим новую неизвестную функцию $V(\bar{z})$:

$$u_-(z) = \exp \left(\int_{-1}^{\bar{z}} \mu(\tau) V(\tau) d\tau \right). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (16) и учитывая, что $\frac{du_-}{d\bar{z}} = \mu u_- V$, сводим задачу (16), (17) к задаче Коши для уравнения Риккати

$$\frac{dV(\bar{z})}{d\bar{z}} + \mu(\bar{z}) V^2(\bar{z}) + \kappa^2 \varepsilon(\bar{z}) - \frac{\bar{\Phi}^2}{\mu(\bar{z})} = 0, \quad (19)$$

$$V(-1) = -i\sqrt{\kappa^2 - \bar{\Phi}^2}.$$

Как следует из (15), дисперсионное уравнение с помощью функции $V(\bar{z})$ можно представить в виде

$$V(0) - i\sqrt{\kappa^2 - \bar{\Phi}^2} = 0. \quad (20)$$

Для построения приближенного решения задачи Коши (19) предлагается следующий алгоритм. Аппроксимируем интервал $-1 < \bar{z} < 0$ конечным числом точек $\bar{z}_n = -1 + \delta(n-1)$,

$$n = 1, 2, \dots, N, \quad \delta = \frac{1}{N-1}, \quad N - \text{натуральное число.}$$

Обозначим значения искомой функции $V_n = V(\bar{z}_n)$. Задача состоит в построении алгоритма вычисления этих значений $(V_n)_{n=1}^N$. С этой целью проинтегрируем уравнение (19) в пределах от \bar{z}_n до \bar{z}_{n+1} , тогда получим

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n + \int_{\bar{z}_n}^{\bar{z}_{n+1}} \mu(\tau) V^2(\tau) d\tau + \int_{\bar{z}_n}^{\bar{z}_{n+1}} p(\tau) d\tau &= 0, \\ n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{где } p(\tau) = \kappa^2 \varepsilon(\tau) - \frac{\bar{\Phi}^2}{\mu(\tau)}.$$

Выбирая N достаточно большим числом и аппроксимируя интегралы в (21) квадратурной суммой двухточечной формулы трапеции [32], имеем

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n + \frac{\delta}{2} (\mu_{n+1} V_{n+1}^2 + \mu_n V_n^2) + \\ + \frac{\delta}{2} (p_{n+1} + p_n) &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\mu_n = \mu(\bar{z}_n)$, $p_n = p(\bar{z}_n)$, $n = 1, 2, \dots, N-1$.

Из (22) после ряда преобразований получаем

$$V_{n+1} = \frac{-2F_n}{1 + \sqrt{1 - 2\delta\mu_{n+1}F_n}}, \quad (23)$$

где $F_n = -V_n + \frac{\delta}{2} (\mu_n V_n^2 + p_{n+1} + p_n)$.

Формула (23) позволяет последовательно вычислять значения V_n . Можно показать (например, [32]), что погрешность формулы (22), а следовательно, и формулы (23), будет величиной порядка δ^2 . Определяя по этой формуле значение V_N , получим следующее дисперсионное уравнение для нахождения собственных частот:

$$V_N - i\sqrt{\kappa^2 - \bar{\Phi}^2} = 0. \quad (24)$$

Левую часть в (24) следует рассматривать как функцию спектрального параметра κ , изменяющегося на введенной выше двулистной римановой поверхности функции $\Gamma = \sqrt{\kappa^2 - \bar{\Phi}^2}$. Итак, исходная спектральная задача сведена к определению комплексных корней уравнения (24).

Исследование аналогичного численного алгоритма и его сходимости для задач дифракции приведено в работе [33].

Замечание. Наряду со спектральной задачей (2)–(5) о собственных колебаниях, в которой в качестве спектрального параметра выступает частота $\omega = \kappa c/h$, используя предложенный подход, можно рассмотреть и спектральную задачу о собственных волнах, экспоненциально зависящих от координаты y ($e^{i\Phi y}$). В этом случае спектральным параметром является постоянная распространения собственных волн $\bar{\Phi} = \Phi/h$ вдоль координаты y , а частотный параметр κ считается известной величиной. Легко показать, что дисперсионное уравнение для определения постоянных распространения $\bar{\Phi}$ собственных волн формально совпадает с уравнением (24). Однако теперь функцию $\Gamma = \sqrt{\kappa^2 - \bar{\Phi}^2}$ следует рассматривать как функцию переменной $\bar{\Phi}$, изменяющейся на двулистной римановой поверхности с двумя точками ветвления $\bar{\Phi}_{\pm} = \pm\kappa$. Листы этой римановой поверхности образованы комплексными плоскостями с разрезами, выходящими из точек $\bar{\Phi}_{\pm} = \pm\kappa$. На рис. 3 показаны расположения этих разрезов и указаны значения $\text{Re}\Gamma$ и $\text{Im}\Gamma$ – реальной и мнимой частей корня $\Gamma = \sqrt{\kappa^2 - \bar{\Phi}^2}$ для первого листа (для второго листа следует положить $\Gamma = -\text{Re}\Gamma - i\text{Im}\Gamma$).

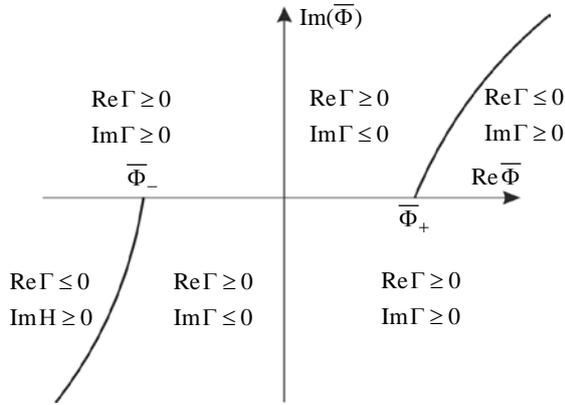


Рис. 3. Схема первого листа римановой поверхности для спектральной задачи о собственных волнах

Таким образом, дисперсионное уравнение (24) позволяет рассчитать как собственные частоты колебаний, так и постоянные распространения собственных волн для рассматриваемой слоисто-неоднородной среды.

2. Анализ численных результатов.

На основе предложенного подхода для исследования собственных колебаний и волн слоисто-неоднородной среды были разработаны алгоритмы расчета комплексных собственных частот и постоянных распространения. Ниже с помощью этих алгоритмов анализируются две спектраль-

ные задачи о собственных колебаниях. Решение одной из них может быть получено в замкнутой форме, когда параметр $\bar{\Phi} = 0$ (собственные колебания не зависят от координаты y). Это задача о собственных частотах и колебаниях плоского однородного магнитоэлектрического слоя. Легко показать, что в этом случае решение задачи Коши для уравнения Риккати (19) можно представить в аналитическом виде:

$$V(\bar{z}) = \frac{i\Gamma_1 (\Gamma_1 - \mu\Gamma) e^{i\Gamma_1(\bar{z}+1)} - (\Gamma_1 + \mu\Gamma) e^{-i\Gamma_1(\bar{z}+1)}}{\mu (\Gamma_1 - \mu\Gamma) e^{i\Gamma_1(\bar{z}+1)} + (\Gamma_1 + \mu\Gamma) e^{-i\Gamma_1(\bar{z}+1)}}, \quad (25)$$

где $\Gamma = \sqrt{\kappa^2 - \bar{\Phi}^2}$, $\Gamma_1 = \sqrt{\kappa^2 \varepsilon \mu - \bar{\Phi}^2}$, а ε, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости слоя.

Далее, будем полагать, что $\varepsilon \geq 1, \mu \geq 1$ (потери в слое пренебрежимо малы). Подставляя в (20) значение $V(0)$, получаем дисперсионное уравнение

$$e^{i2\Gamma_1} (\Gamma_1 - \mu\Gamma)^2 - (\Gamma_1 + \mu\Gamma)^2 = 0. \quad (26)$$

Если параметр $\bar{\Phi} = 0$, то решение этого уравнения может быть получено в замкнутой форме. Действительно, полагая в (26) $\bar{\Phi} = 0$ после ряда преобразований имеем

$$e^{i\kappa\sqrt{\varepsilon\mu}} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\mu}}. \quad (27)$$

Из (27) легко находим значения спектрального параметра κ :

$$\kappa_n = \frac{\pi n}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - \frac{i}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \ln \left| \frac{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\mu}} \right|, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (28)$$

Как следует из (28), собственные частоты $\omega_n = \kappa_n c/h$ являются комплексными числами с отрицательными мнимыми частями, а следовательно, соответствующие им собственные колебания экспоненциально затухают во времени. Расстояние между соседними собственными частотами $\kappa_{n+1} - \kappa_n = \pi/\sqrt{\varepsilon\mu}$ не зависит от индекса n , т. е. множество собственных частот однородного магнитоэлектрического слоя является эквидистантным спектром с точкой накопления на бесконечности (при $|n| \rightarrow \infty$ $|\kappa_n| \rightarrow \infty$).

Проанализируем, как проявляются собственные частоты при дифракции плоской E -поляризованной волны, нормально падающей на плоский магнитоэлектрический слой. На рис. 4 показаны результаты расчетов зависимости модуля коэффициента отражения от частотного параметра κ . Как видно, эта зависимость имеет ярко выраженный осциллирующий характер, причем период этих осцилляций совпадает с расстоянием между соседними собственными частотами.

тами $-\pi/\sqrt{\varepsilon\mu}$. При этом, значения частотного параметра, при которых коэффициент отражения обращается в нуль, совпадают с реальными частями комплексных собственных частот. Следует отметить, что это справедливо только в том случае, когда потери в магнитоэлектрическом слое пренебрежимо малы.

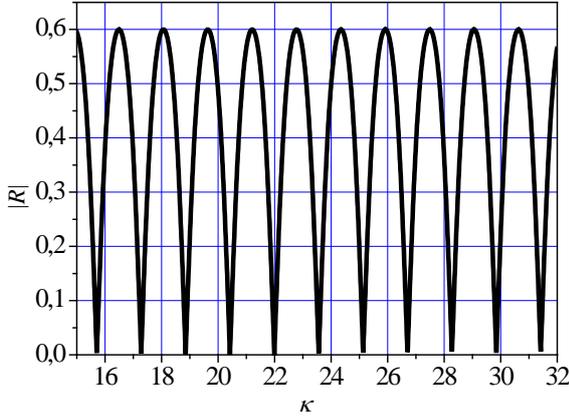


Рис. 4. Зависимости модуля коэффициента отражения от частотного параметра: $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$

Рассмотрим теперь спектральную задачу для слоисто-неоднородной среды, диэлектрическая проницаемость которой является кусочно-постоянной периодической функцией переменной z , а магнитная проницаемость $\mu = 1$. Пусть неоднородная среда занимает слой $-h < z < 0$, а период диэлектрической проницаемости равен h/P , где P – натуральное число $P \gg 1$. Зададим диэлектрическую проницаемость по формуле

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & -\frac{(n+0,5)h}{P} < z < -\frac{nh}{P}, \\ \varepsilon_2, & -\frac{(n+1)h}{P} < z < -\frac{(n+0,5)h}{P}, \\ n = 0, 1, 2, \dots, P-1. \end{cases} \quad (29)$$

Очевидно, что при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ имеем однородный слой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и толщиной h , собственные частоты которого определяются согласно формуле (28). На рис. 5 показана эволюция реальных и мнимых частей собственных частот неоднородного слоя при изменении диэлектрической проницаемости ε_2 от значения ε_1 (однородный слой) до значения $\varepsilon_2 = 1$ (неоднородный слой). Как видно, эквидистантный спектр собственных частот однородного слоя непрерывно трансформируется в спектр собственных частот неоднородного слоя, диэлектрическая постоянная которого является периодической кусочно-постоянной функцией переменной z (см. (29)).

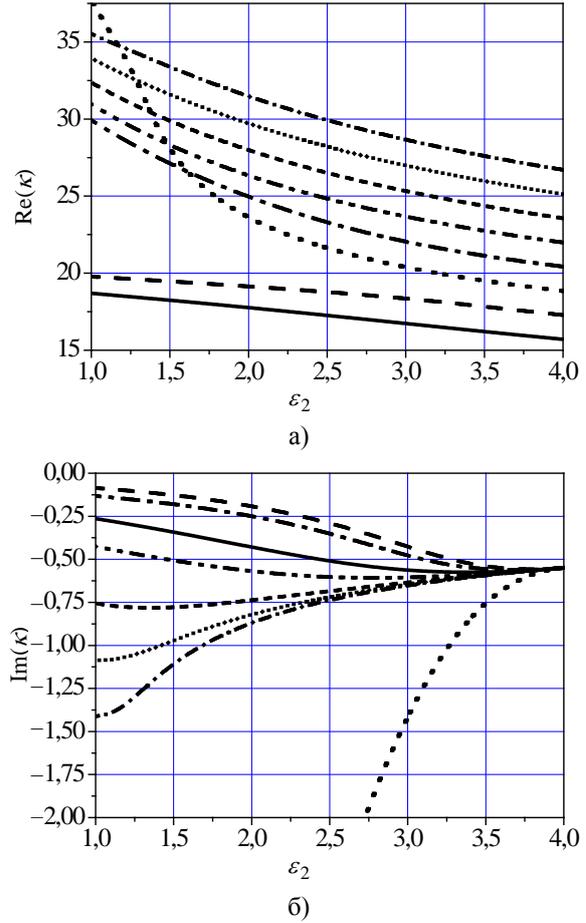


Рис. 5. Зависимости реальных (а) и мнимых (б) частей собственных частот неоднородного слоя от диэлектрической проницаемости ε_2 : $P = 12$, $\varepsilon_1 = 4$

Характерной особенностью спектра собственных частот неоднородного слоя является наличие лакуны – интервалов действительной оси частотного параметра κ , где отсутствуют реальные части собственных частот и вне которых реальные части собственных частот распределены практически эквидистантно (рис. 5, а). Как показали численные расчеты, одна из основных причин образования лакуны – это наличие в спектре собственных частот с большой мнимой частью ($\text{Im}\kappa \gg 1$). Рис. 5, б иллюстрирует уход на бесконечность одной из собственных частот неоднородного слоя (пунктирная линия) при его непрерывном преобразовании в слоисто-неоднородную среду с периодическим изменением диэлектрической проницаемости. Интересно, что размеры и расположение этих лакуны приблизительно совпадают с так называемыми запрещенными зонами соответствующими неограниченной периодической среде [34]. Распространяющаяся в такой среде волна с частотой, лежащей в запрещенной зоне, будет испытывать многократные отражения (брэгговское отражение) и не может распространяться вдали от своего источника.

Рассмотрим, как проявляется наличие лакун в спектре собственных частот при дифракции волн на слое с диэлектрической проницаемостью, периодически зависящей от z (см. (29)). На рис. 6 показана типичная зависимость коэффициента отражения от частотного параметра κ .

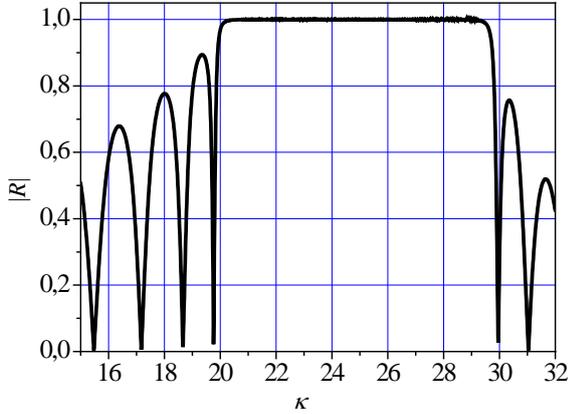


Рис. 6. Зависимость от частотного параметра модуля коэффициента отражения плоской E -поляризованной волны от слоя с периодически изменяющейся диэлектрической проницаемостью: $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 4$, $P = 12$

Хорошо виден диапазон частот, размер и расположение которого совпадает с соответствующей лакуной в спектре собственных частот (см. рис. 5, а), где модуль коэффициента отражения практически равен единице. Вне этого диапазона частот зависимость модуля коэффициента отражения является осциллирующей функцией частотного параметра. При этом, как и в случае однородного слоя, значения частотного параметра, при которых коэффициент отражения практически равен нулю, совпадают с действительными частями комплексных собственных частот, а близость его к нулю определяется величиной их мнимой части: чем она меньше, тем ближе к нулю модуль коэффициента отражения.

Исследуем теперь, как изменяется спектр собственных частот неоднородного слоя при нарушении периодической зависимости диэлектрической проницаемости. Пусть зависимость от переменной z диэлектрической проницаемости слоя задается формулой (29). Далее для определенности будем считать, что $\varepsilon_1 = 4$, $P = 12$. Выбираем в середине слоя интервал изменения переменной z : $-\frac{7h}{12} < z < -\frac{h}{2}$. Как следует из (29), диэлектрическая проницаемость в этом интервале изменения z принимает значения

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & -\frac{11h}{24} < z < -\frac{h}{2}, \\ \varepsilon_2 = 1, & -\frac{7h}{12} < z < -\frac{11h}{24}. \end{cases} \quad (30)$$

Рассмотрим, как трансформируется спектр собственных частот при непрерывном изменении диэлектрической проницаемости ε_1 (так мы моделируем нарушение периодичности диэлектрической проницаемости). На рис. 7 представлены результаты расчетов реальных и мнимых частей собственных частот, как функций от диэлектрической проницаемости ε_1 .

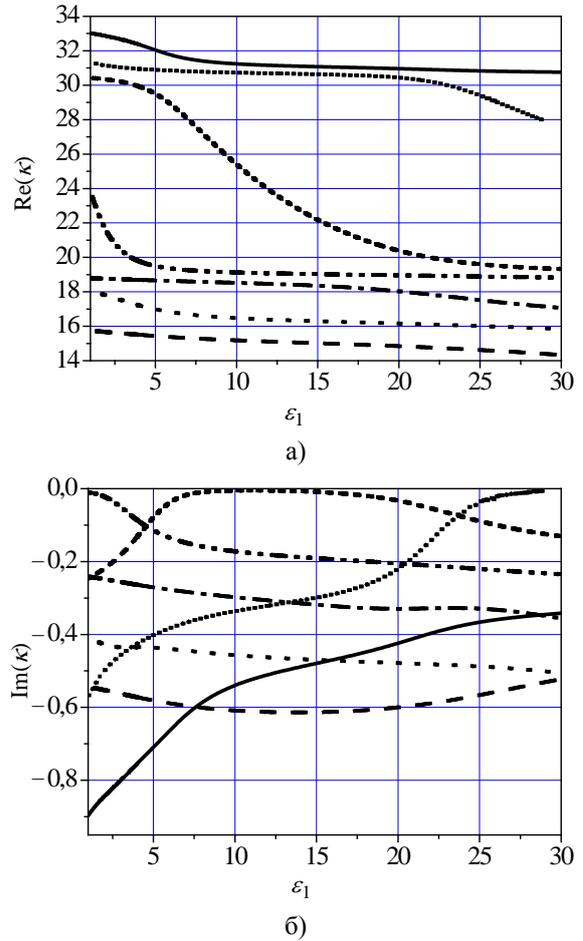


Рис. 7 Зависимости реальных (а) и мнимых (б) частей собственных частот от диэлектрической проницаемости ε_1

Как видно, при $\varepsilon_1 = 4$ (периодический слой) в спектре собственных частот присутствует лакуна. При нарушении периодичности $\varepsilon_1 \neq 4$ некоторые реальные части собственных частот с изменением ε_1 начинают «проникать» в лакуну (рис. 7, а). При этом их мнимые части резко уменьшаются (рис. 7, б).

Обратимся к рис. 8, где показана зависимость модуля коэффициента отражения плоской E -поляризованной волны, нормально падающей на слой неоднородной среды. В интервале частот, соответствующем лакуне в спектре собственных частот для периодического слоя, при нарушении периодичности наблюдается резкое уменьшение

коэффициента отражения при некоторых значениях частотного параметра. Как показал анализ проведенных расчетов, эти значения частотного параметра совпадают с реальными частями собственных частот, которые попали в лауну, при нарушении периодичности в зависимости диэлектрической проницаемости.

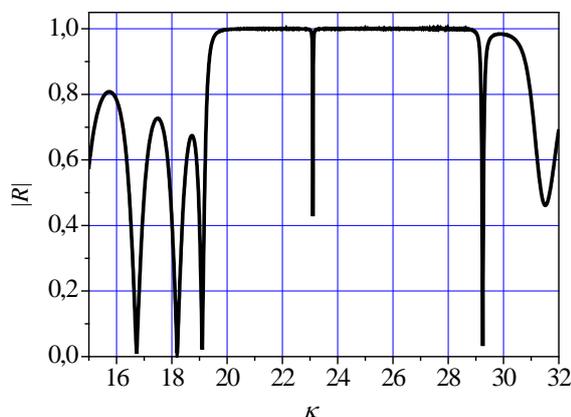


Рис. 8. Зависимость модуля коэффициента отражения от частотного параметра для слоя с нарушением периодичности $\epsilon_1 = 1,3$

На рис. 9 показано распределение по толщине неоднородного диэлектрического слоя амплитуды электрического поля при резонансных значениях частотного параметра.

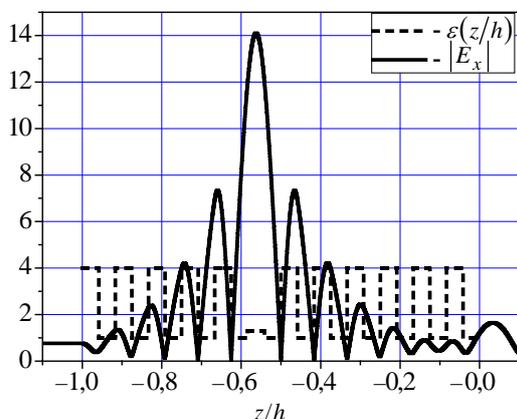


Рис. 9. Распределение по толщине неоднородного слоя амплитуды электрического поля на резонансной частоте $\kappa = 23$ и $\epsilon_1 = 1,3$ (сплошная линия) и распределение диэлектрической проницаемости $\epsilon(z/h)$ (пунктирная линия)

Как видно, в области нарушения периодичности наблюдается многократное увеличение амплитуды поля.

Выводы. Таким образом, предложенный подход, основанный на решении спектральных задач, позволяет не только количественно и качественно описывать резонансные эффекты, сопровождающие процесс взаимодействия волн со слоисто-

неоднородной средой, но и наполнить новым содержанием такие хорошо известные понятия, как запрещенная зона в теории распространения волн в периодических структурах [34, 35] и резонанс в запрещенной зоне при нарушении периодичности материальных параметров среды.

Библиографический список

1. Reichardt H. Ausstrahlungsbedingungen für Wellengleichung / H. Reichardt // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar Universität. – Hamburg, 1960. – Bd. 24. – S. 41–53.
2. Бабич В. М. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн / В. М. Бабич, В. С. Булдырев. – М.: Наука, 1972. – 456 с.
3. Вайнберг Б. Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики / Б. Р. Вайнберг. – М.: Изд-во Москов. ун-та, 1982. – 246 с.
4. Дифракция волн на решетках / В. П. Шестопалов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб. – Х.: Изд-во Харьков. ун-та, 1973. – 278 с.
5. Дольф Л. Современное развитие несамосопряженных задач математической физики / Л. Дольф // Периодический сборник переводов иностранных статей. Математика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – Т. 1. – С. 79–136.
6. Шестопалов В. П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур / В. П. Шестопалов. – К.: Наук. думка, 1987. – 252 с.
7. Шестопалов В. П. Динамическая теория решеток / В. П. Шестопалов, Ю. К. Сиренко. – К.: Наук. думка, 1989. – 214 с.
8. Шестопалов В. П. Морсовские критические точки дисперсионных уравнений / В. П. Шестопалов. – К.: Наук. думка, 1992. – 236 с.
9. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. Аналитическая регуляризация краевых задач электродинамики / В. П. Шестопалов, Ю. А. Тучкин, А. Е. Поединчук, Ю. К. Сиренко. – Х.: Основа, 1997. – 285 с.
10. Войтович Н. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции / Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов. – М.: Наука, 1977. – 426 с.
11. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний / Э. Санчес-Паленсия; пер. с англ. под ред. О. А. Олейник. – М.: Мир, 1984. – 472 с.
12. Modern Theory of gratings. Resonant scattering: analysis techniques and phenomena / I. Candezon, G. Granet, P. N. Melezchik et al. – N. Y., Dordrecht, Heidelberg, L.: Springer, 2010. – 390 p.
13. Бабич В. М. Об аналитическом продолжении резольвенты внешних задач для оператора Лапласа на второй лист / В. М. Бабич // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Х.: Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1966. – Вып. 3. – С. 151–157.
14. Дюженкова Л. И. Аналитическое продолжение резольвенты самосопряженного оператора через непрерывный спектр / Л. И. Дюженкова, Л. П. Нижняк // Укр. мат. журн. – 1968. – 20, № 6. – С. 759–765.
15. Вайнберг Б. Р. О собственных функциях оператора, отвечающих полюсам аналитического продолжения резольвенты через непрерывный спектр / Б. Р. Вайнберг // Мат. сб. – 1972. – 87, № 2. – С. 293–308.
16. Муравей Л. А. Аналитическое продолжение по параметру функций Грина внешних краевых задач для двумерного уравнения Гельмгольца / Л. А. Муравей // Мат. сб. – 1978. – 165(147), № 1. – С. 63–108.
17. Арсеньев А. А. О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода / А. А. Арсеньев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1976. – 16, № 3. – С. 718–724.

18. Сиренко Ю. К. Аналитическое продолжение задач дифракции и пороговые явления в электродинамике / Ю. К. Сиренко // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 2. – С. 65–68.
19. Поединчук А. Е. О регуляризации спектральных задач волнового рассеяния на незамкнутых экранах / А. Е. Поединчук, Ю. А. Тучкин, В. П. Шестопапов // Докл. АН СССР. – 1987. – 295, № 6. – С. 1358–1362.
20. Гохберг И. И. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. И. Гохберг, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
21. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов / М. В. Келдыш // Успехи мат. наук. – 1971. – 26, № 4. – С. 15–41.
22. Гохберг И. И. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше / И. И. Гохберг, Е. И. Сигал // Мат. сб. – 1971. – 84, № 4. – С. 607–629.
23. Рид М. Методы современной математической физики: в 4 т. / М. Рид, Б. Саймон; пер. с англ. – М.: Мир, 1977–1982. – Т. 1. – 358 с.; Т. 2. – 305 с.; Т. 3. – 444 с.; Т. 4. – 428 с.
24. Шестопапов Ю. В. Об обосновании спектрального метода расчета собственных волн микрополосковых линий / Ю. В. Шестопапов // Дифференциальные уравнения. – 1980. – 16, № 8. – С. 1504–1512.
25. Шестопапов Ю. В. Свойства спектра одного класса несамосопряженных краевых задач для системы уравнений Гельмгольца // Докл. АН СССР. – 1980. – 252, № 5. – С. 1108–1111.
26. Спектральная теория двумерных резонаторов с диэлектрическими включениями / В. Н. Кошпаренко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук, В. П. Шестопапов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1985. – 25, № 4. – С. 621–637.
27. Баум К. Э. Новые методы нестационарного (широкополосного) анализа и синтеза антенн и рассеивателей / К. Э. Баум // Тр. Ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектрон. – 1976. – 64, № 11. – С. 53–74.
28. Резонансное рассеяние волн: в 2 т. Т. 1. Дифракционные решетки / В. П. Шестопапов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Ю. К. Сиренко. – К.: Наук. думка, 1986. – 232 с.
29. Шестопапов В. П. Резонансное рассеяние волн: в 2 т. Т. 2. Волноводные неоднородности / В. П. Шестопапов, А. А. Кириленко, Л. А. Рудь. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
30. Об аналитической природе явления междутиповой связи собственных колебаний / П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук, Ю. А. Тучкин, В. П. Шестопапов // Докл. АН СССР. – 1988. – 300, № 6. – С. 1356–1359.
31. Спектральный метод анализа эффектов полного преобразования волн открытыми периодическими и волноводными резонаторами / Л. А. Рудь, Ю. К. Сиренко, В. В. Яцик, Н. П. Яшина // Изв. вузов. Радиофизика. – 1988. – 31, № 10. – С. 1246–1252.
32. Крылов В. Н. Вычислительные методы: в 2 т. Т. 1 / В. Н. Крылов. – М.: Наука, 1976. – 302 с.
33. Численно-аналитический метод решения задач дифракции на слоисто-неоднородных средах / А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, С. Б. Панин, А. Е. Поединчук // Физические основы приборостроения. – 2013. – 2, № 1. – С. 34–47.
34. Элаши Ш. Волны в активных и пассивных периодических структурах / Ш. Элаши // Тр. Ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектрон. – 1976. – 64, № 12. – С. 22–59.
35. Yablonovitch E. Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics / E. Yablonovitch // Phys. Rev. Lett. – 1987. – 58, № 20. – P. 2059–2062.

Рукопись поступила 29.01.2013 г.

A. V. Brovenko, P. N. Melezhik, A. E. Poedinchuk

SPECTRAL PROBLEMS IN THE THEORY OF DIFFRACTION OF WAVES ON LAYERED MEDIA

Investigation of diffraction characteristics of layered media is due to their widespread use. However, so far in the scientific literature there is a small amount of special dependences of the layer material parameters on the spatial coordinates, when it is possible to obtain analytical solutions describing wave processes occurring in them. Most of these solutions are built with the help of asymptotic and direct numerical methods. In this paper the so-called Riccati method was applied to construct the solutions of the spectral problem for the inhomogeneous magnetodielectric layer. As a result a computationally stable algorithm for solving eigenvalue problems was obtained. The algorithm allowed to investigate resonance effects accompanying the interaction of waves with layered media, and to describe by the natural frequencies and natural vibrations the well-known concepts as the band gap in the theory of wave propagation in periodic structures and resonance in the gap in violation of the periodicity of the tangible medium parameters. The results of the research allow to study wave propagation in inhomogeneous magnetodielectric, heterogeneous Plasma and other layers of this type without significant restrictions on their physical parameters and can be used in solving inverse problems of electrodynamics, as well as in holography, tomography, radar, etc.

Key words: spectral theory, natural frequencies, Bragg scattering.

A. V. Бровенко, П. М. Мележик, А. Ю. Поединчук

СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ У ТЕОРІЇ ДИФРАКЦІЇ ХВИЛЬ НА ШАРУВАТО-НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Дослідження дифракційних характеристик шарувато-неоднорідних середовищ обумовлено їх широким використанням. Однак на сьогоднішній день в науковій літературі відомо лише незначна кількість спеціальних залежностей матеріальних параметрів шару від просторових координат, коли вдається отримати аналітичні рішення, що описують хвильові процеси, які відбуваються в них. В основному ці рішення будуються за допомогою асимптотичних або прямих чисельних методів. При побудові розв'язання спектральної задачі для неоднорідного магнітодіелектричного шару був застосований так званий метод Ріккати. В результаті отримано стійкий в обчислювальному відношенні алгоритм розв'язання спектральних задач, який дозволив досліджувати резонансні ефекти, що супроводжують процес взаємодії хвиль із шарувато-неоднорідним середовищем, а також описати за допомогою власних частот і власних коливань добре відомі поняття, як заборонена зона в теорії розповсюдження хвиль в періодичних структурах і резонанс в забороненій зоні при порушенні періодичності матеріальних параметрів середовища. Результати досліджень дозволять проводити вивчення хвильових процесів в неоднорідних магнітодіелектричних, неоднорідних плазموподібних та інших такого типу шарах без істотних обмежень на їх матеріальні параметри і можуть бути використані при вирішенні зворотних задач електродинаміки, а також в голографії, томографії, радіолокації і ін.

Ключові слова: спектральна теорія, власні частоти, бреггівське розсіювання.