

Е. М. Ганапольский, Ю. В. Тарасов

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

E-mail: el.ganapolskii@mail.ru

МЕЖМОДОВОЕ РАССЕЙАНИЕ КАК ИСТОЧНИК КВАНТОВОГО ХАОСА В МИКРОВОЛНОВОМ РЕЗОНАТОРЕ С СИНГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Теоретически и экспериментально изучен частотный спектр цилиндрического микроволнового резонатора со вставленным в него тонким металлическим стержнем, играющим роль сингулярного возмущения. Выделено два типа рассеяния (внутри и межмодовое) и показано, что они играют принципиально разную роль в формировании хаотических свойств спектра. Статистический анализ, выполненный на основе оценки нормы оператора перемешивания мод, продемонстрировал, что межмодовое рассеяние, вызванное сингулярностью, приводит к существенной корреляции резонансных частот. Результаты проведенных измерений согласуются с выводами теории. В спектре резонатора с несимметрично вставленным в него металлическим стержнем обнаружены основные признаки квантового хаоса, а именно вигнеровское распределение межчастотных интервалов, корреляция спектральных линий и характерная кривая спектральной жесткости. Сопоставление теории и эксперимента позволило впервые однозначно установить, что именно межмодовое рассеяние является источником квантового хаоса в спектре волновых бильярдных систем, подвергаемых сингулярному возмущению. Ил. 5. Библиогр.: 12 назв.

Ключевые слова: квантовый хаос, квазиоптический объемный резонатор, распределение межчастотных интервалов, корреляция резонансных частот, сингулярное возмущение, функция Грина, норма оператора перемешивания мод.

Работа посвящена изучению квантового (волнового) хаоса (КХ) в линейных волновых системах, подобных классическому бильярду Синая. Эта проблема вызывает значительный интерес, о чем свидетельствуют многочисленные теоретические и экспериментальные исследования в этой области (например, [1] и использованную там литературу). КХ – понятие достаточно общее, охватывающее широкий круг задач, связанных с квантово-механическим описанием систем, обладающих хаотическими свойствами в классическом пределе. Согласно общепринятым представлениям КХ-система – это система, инвариантная относительно инверсии времени, динамика которой описывается квантовыми (волновыми) уравнениями и классический аналог которой обладает свойствами хаотичности. В соответствии с гипотезой Бохигаса, Джанони и Смита [2] статистические свойства спектра такой системы можно описывать с помощью теории случайных матриц [3]. Основные признаки КХ, вытекающие из этой теории, – это хаотический характер спектра и наличие корреляции между спектральными линиями, которая проявляется в своеобразном их «расталкивании» и в вигнеровском (или близком к нему) распределении межчастотных (МЧ) интервалов.

При исследовании КХ обычно используются рассеивающие волновые бильярды типа бильярдов Синая и Бунимовича, в которых признаки КХ были обнаружены экспериментально [1]. Эти признаки присущи и другим системам, таким как рассеивающие цилиндрические бильярды с шероховатой границей [4], объемные резонаторы, заполненные случайными неоднородностями [5, 6], цилиндрические бильярды с боковой границей,

обладающей малой гладкостью, в отдельных точках которой отсутствует вторая производная [7, 8]. Наличие признаков КХ теоретически предсказывалось и для систем, содержащих одну или несколько очень малых неоднородностей, каждую из которых можно трактовать как сингулярное возмущение [9, 10]. Однако, несмотря на плодотворность теоретического подхода, использованного в работах [9, 10], целый ряд вопросов не получил в них достаточного прояснения. В частности, неясным остался один из основополагающих вопросов: какова физическая причина того, что регулярная квантовая/волновая система под влиянием малого пространственного возмущения приобретает хорошо выраженные признаки КХ.

В настоящей работе нами теоретически и экспериментально исследован цилиндрический объемный квазиоптический резонатор (радиусом R) со вставленным в него металлическим стержнем малого диаметра $d \ll \lambda$, где λ – длина волны возбуждаемых колебаний. Ось стержня сдвинута относительно оси резонатора на расстояние r_0 (рис. 1).

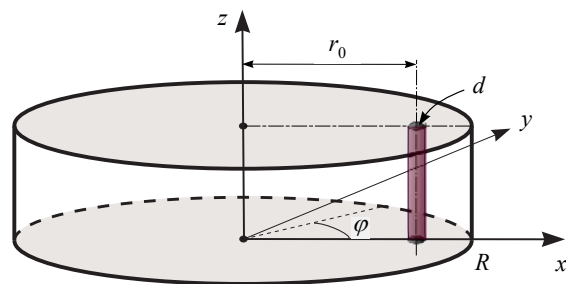


Рис. 1. Квазиоптический цилиндрический СВЧ-резонатор с металлическим стержнем, моделируемым сингулярным возмущающим потенциалом

При произвольном расположении стержня аксиальная симметрия резонатора исчезает, и система становится неинтегрируемой в смысле динамики классических частиц. С точки зрения волновой динамики в ней возникает межмодовое рассеяние колебаний, которое, как показано ниже, даже при очень малом диаметре стержня может оказывать весьма существенное влияние на статистические свойства спектра.

С позиций классической механики резонатор с тонким металлическим стержнем можно рассматривать как бильярд Синая, неустойчивость траекторий в котором связана с рассеянием частиц на поверхности стержня, имеющей большую по модулю отрицательную кривизну. Для систем же волновой природы принципиальный вопрос заключается в том, может ли рассеяние, вызванное пространственно сингулярным возмущением, привести к появлению явных признаков КХ: к случайному спектру, корреляции спектральных линий и вигнеровскому распределению МЧ-интервалов?

При теоретическом рассмотрении спектральной задачи мы моделируем резонатор со вставленным в него стержнем посредством введения в волновое уравнение эффективного потенциала (по аналогии с квантовой механикой), вид и величина которого выбираются на основе данных спектральных измерений. Спектр резонатора определяется из уравнения для функции Грина

$$\left[\Delta + k^2 - i/\tau_d - V(\vec{r}) \right] G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (1)$$

где Δ – трехмерный лапласиан; $k = \omega/c$; $1/\tau_d$ – частота диссипации, которую мы вводим феноменологически. Символом $V(\vec{r})$ обозначен эффективный потенциал, моделирующий присутствие в резонаторе металлического стержня.

Пусть в резонаторе возбуждаются колебания E -типа, электрическое поле которых направлено вдоль оси z . Потенциал в уравнении (1), с учетом его пространственной сингулярности, представим в виде

$$V(\vec{r}) = \Lambda(k, d) \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}_0), \quad (2)$$

где $\Lambda(k, d)$ – безразмерный параметр, зависящий от частоты колебаний и диаметра стержня; \vec{r}_\perp – перпендикулярная к оси z составляющая радиус-вектора; \vec{r}_0 – плоский вектор, задающий положение относительно этой оси возмущающего стержня.

После преобразования Фурье уравнения (1), выполненного с помощью полной системы собственных функций невозмущенного резонатора (мы используем для них принятые в квантовой механике обозначения в виде бра- и кетвекторов), это уравнение приобретает вид бесконеч-

ной системы связанных алгебраических уравнений относительно матричных элементов функции Грина

$$\left(k^2 - \kappa_{\vec{\mu}}^2 - i/\tau_d - V_{\vec{\mu}} \right) G_{\vec{\mu}\vec{\mu}'} - \sum_{\vec{v} \neq \vec{\mu}} U_{\vec{\mu}\vec{v}} G_{\vec{v}\vec{\mu}'} = \delta_{\vec{\mu}\vec{\mu}'}. \quad (3)$$

Здесь $\vec{\mu} = (l, n, q)$ – векторный модовый индекс, сопряженный координатному вектору $\vec{r} = (r, \varphi, z)$;

$\kappa_{\vec{\mu}}^2$ – взятое со знаком «–» собственное значение оператора Лапласа для $\vec{\mu}$ -й моды пустого резонатора, которое по аналогии с квантовомеханическими системами мы будем именовать невозмущенной модовой энергией; $U_{\vec{\mu}\vec{v}}$ и $V_{\vec{\mu}} \equiv U_{\vec{\mu}\vec{\mu}}$ – модовые матричные элементы потенциала (2), рассчитанные на собственных функциях невозмущенного резонатора:

$$U_{\vec{\mu}\vec{v}} = \int_{\Omega} d\vec{r} \langle \vec{r}; \vec{\mu} | V(\vec{r}) | \vec{r}; \vec{v} \rangle. \quad (4)$$

В работе [4] нами было показано, что систему уравнений (3) можно разрешить относительно всех матричных элементов функции Грина при помощи специальной операторной процедуры разделения мод. В рамках этой процедуры все недиагональные элементы матрицы $\mathbf{G} = \{G_{\vec{\mu}\vec{\mu}'}\}$

линейно выражаются через диагональные $G_{\vec{\mu}\vec{\mu}}$, уравнения для которых расцепляются и приводят к результату

$$G_{\vec{\mu}\vec{\mu}} = \left(k^2 - \kappa_{\vec{\mu}}^2 - i/\tau_d - V_{\vec{\mu}} - \hat{T}_{\vec{\mu}} \right)^{-1}. \quad (5)$$

В силу линейной связи между «косыми» и диагональными элементами гриновской матрицы полюса именно этих, диагональных модовых функций Грина, определяют весь частотный спектр резонатора.

В формуле (5) наряду со скалярным потенциалом $V_{\vec{\mu}}$, учитывающим влияние на спектр актов рассеяния, не изменяющих модовый индекс (внутримодовое рассеяние), фигурирует потенциал $\hat{T}_{\vec{\mu}}$, структура которого является операторной. Этот потенциал есть не что иное, как регуляризованная T -матрица, известная в квантовой теории рассеяния [11], которой учитывается межмодовое рассеяние на потенциале (2) и, таким образом, перемешивание модовых состояний. T -потенциал может быть представлен в виде

$$\hat{T}_{\vec{\mu}} = \hat{\mathbf{P}}_{\vec{\mu}} \hat{\mathbf{U}} \left(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{R}} \right)^{-1} \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{P}}_{\vec{\mu}}, \quad (6)$$

где $\hat{\mathbf{P}}_{\vec{\mu}}$ – проекционный оператор, действие которого сводится к присвоению ближайшему модовому индексу стоящего рядом с ним оператора (как справа, так и слева) фиксированного значения $\vec{\mu}$, $\hat{\mathbf{U}}$ – ноль-диагональная матрица, элемен-

тами которой являются межмодовые потенциалы $U_{\vec{\mu}\vec{\nu}}$ с $\vec{\mu} \neq \vec{\nu}$; $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{G}}^{(V)}\hat{\mathbf{U}}$ – оператор перемешивания мод, включающий в себя «затравочный» оператор Грина $\hat{\mathbf{G}}^{(V)}$ с диагональной модовой матрицей, элементами которой являются пробные функции Грина $G_{\vec{\mu}}^{(V)}$. Эти функции учитывают только внутримодовое рассеяние и представляют собой решение системы (3) с опущенными в ней межмодовыми потенциалами

$$G_{\vec{\mu}}^{(V)} = (k^2 - \kappa_{\vec{\mu}}^2 - V_{\vec{\mu}} - i/\tau_d)^{-1}. \quad (7)$$

Множество пропагаторов (5) (для $\forall \vec{\mu}$) полностью определяет спектр резонатора со вставленным в него возмущающим стержнем. Однако практическое использование формулы (6) для T -потенциала из-за его сложной функциональной структуры в общем случае затруднительно. Тем не менее, имея в руках точную формулу для потенциала, описывающего межмодовое рассеяние, мы можем проанализировать пре-

дельные случаи слабой и сильной корреляции мод, соответствующие малой и большой (по сравнению с единицей) норме перемешивающего оператора $\hat{\mathbf{R}}$. Рассчитать эту норму можно, если воспользоваться явным видом потенциалов (4). В модели (2) выражения для этих потенциалов имеют вид

$$V_{\vec{\mu}} = \frac{\Lambda(k, d)}{\pi R^2} C_{l_{\vec{\mu}} n_{\vec{\mu}}}^2 J_{|n_{\vec{\mu}}|}^2(\gamma_{l_{\vec{\mu}}}^{(n_{\vec{\mu}})}) r_0/R, \quad (8a)$$

$$U_{\vec{\mu}\vec{\nu}} = \delta_{q_{\vec{\nu}} q_{\vec{\mu}}} \frac{\Lambda(k, d)}{\pi R^2} C_{l_{\vec{\mu}} n_{\vec{\mu}}} C_{l_{\vec{\nu}} n_{\vec{\nu}}} \times \\ \times J_{|n_{\vec{\mu}}|}(\gamma_{l_{\vec{\mu}}}^{(n_{\vec{\mu}})}) r_0/R J_{|n_{\vec{\nu}}|}(\gamma_{l_{\vec{\nu}}}^{(n_{\vec{\nu}})}) r_0/R, \quad (8b)$$

где $C_{ln} = J_{|n|+1}^{-1}(\gamma_l^{(n)})$; $\gamma_l^{(n)}$ – нули функции Бесселя $J_{|n|}(u)$, пронумерованные натуральным индексом l в порядке их возрастания. С использованием потенциалов (8) выражение для квадрата нормы оператора $\hat{\mathbf{R}}$ приводится к виду

$$\|\hat{\mathbf{R}}\|^2 = \left[\frac{\Lambda(k, d)}{\pi R^2} \right]^2 \max_{\vec{\mu}} \left[\sum_{l_{\vec{\nu}}, n_{\vec{\nu}}} \delta_{q_{\vec{\nu}} q_{\vec{\mu}}} \frac{C_{l_{\vec{\nu}} n_{\vec{\nu}}} C_{l_{\vec{\mu}} n_{\vec{\mu}}}}{k^2 - \kappa_{\vec{\nu}}^2 - V_{\vec{\nu}} + i/\tau_d} J_{|n_{\vec{\nu}}|}(\gamma_{l_{\vec{\nu}}}^{(n_{\vec{\nu}})}) r_0/R J_{|n_{\vec{\mu}}|}(\gamma_{l_{\vec{\mu}}}^{(n_{\vec{\mu}})}) r_0/R \right] \times \\ \times \left[\sum_{l_{\vec{\nu}}, n_{\vec{\nu}}} \delta_{q_{\vec{\nu}} q_{\vec{\mu}}} \frac{C_{l_{\vec{\nu}} n_{\vec{\nu}}} C_{l_{\vec{\mu}} n_{\vec{\mu}}}}{k^2 - \kappa_{\vec{\nu}}^2 - V_{\vec{\nu}} + i/\tau_d} J_{|n_{\vec{\nu}}|}(\gamma_{l_{\vec{\nu}}}^{(n_{\vec{\nu}})}) r_0/R J_{|n_{\vec{\mu}}|}(\gamma_{l_{\vec{\mu}}}^{(n_{\vec{\mu}})}) r_0/R \right]. \quad (9)$$

С помощью этой формулы можно оценить $\|\hat{\mathbf{R}}\|$ в различных предельных случаях и таким способом установить степень перемешанности мод, которая определяет хаотические свойства спектра.

Прежде всего интерес для нас представляет случай, когда внутримодовое рассеяние является слабым и не оказывает заметного влияния на корреляцию различных мод. Формальным условием этого является выполнение неравенства

$$\Lambda(k, d) \ll (kR)^2, \quad (10)$$

где в правой части стоит величина, большая по сравнению с единицей. Если условие (10) выполнено, потенциалами (8a) в формуле (9) можно пренебречь, после чего для нормы оператора перемешивания получается следующая оценка:

$$\|\hat{\mathbf{R}}\|^2 \sim \Lambda^2(k, d). \quad (11)$$

Из нее следует, что при слабом внутримодовом рассеянии степень связывания резонаторных мод, а значит, и уровень хаотичности спектра могут быть существенно разными в зависимости от того, малой или большой по сравнению с единицей является константа связи в модельном потенциале (2). Если $\|\hat{\mathbf{R}}\| \ll 1$, моды коррелированы отно-

сительно слабо и фактически являются кластеризованными. Если же $\|\hat{\mathbf{R}}\| \gg 1$, частотный спектр резонатора коррелирован эргодично.

Поскольку точный вид модельного потенциала $V(\mathbf{r})$ *a priori* нам не известен, для оценки параметра связи в формуле (2) нами была проведена серия экспериментов с микроволновыми резонаторами, в которых сингулярный рассеиватель был представлен асимметрично расположенным тонким металлическим стержнем (см. рис. 1). В процессе экспериментов в резонаторе с диаметром 130 мм и высотой 15 мм дифракционной антенной возбуждались колебания миллиметрового диапазона в интервале частот 26–38 ГГц. Антенна представляла собой круглое отверстие диаметром 2 мм в тонкой (толщиной 0,1 мм) медной диафрагме, закрывающей выход из прямоугольного возбуждающего волновода. С помощью такой антенны в резонаторе можно было создавать колебания как H -, так и E -типа. Для регистрации спектра использовался широкополосный СВЧ-измеритель, с помощью которого определялась интенсивность прошедших через резонатор колебаний. Измеритель давал возможность за сравнительно короткое время

(≈ 40 с) не только зарегистрировать на компьютере спектр резонатора в нужном диапазоне частот, но определить также собственную частоту и ширину каждой из многочисленных (несколько сотен) спектральных линий. Использование калибратора, встроенного в специальную компьютерную программу, давало возможность обеспечить сравнительно высокую точность измерения характеристик спектральных линий. Относительная погрешность в определении частоты каждой спектральной линии и ее ширины составляла 10^{-5} и 10^{-3} соответственно. Была также предусмотрена возможность путем использования стержней различного диаметра менять уровень сингулярного возмущения и таким образом воздействовать на интенсивность межмодового рассеяния.

Качественный характер измеренных спектров как E -, так и H -колебаний исследуемого резонатора оказался одинаковым. Спектры обоих типов состоят из большого числа резонансных линий, по внешнему виду случайно распределенных на частотной оси (рис. 2). Добротности линий заметно различаются не только для колебаний различного типа, но и внутри каждого из измеренных спектров. В среднем добротности колебаний H -типа заметно превышали в экспериментах добротности E -колебаний. Для определения величины константы связи колебательных мод резонатора со вставленным в него стержнем

использовалась следующая методика. В спектре выбиралась характерная линия и для нее измерялось смещение по частоте при введении в резонатор возмущающего стержня. При этом предполагалось, что связь различных линий спектра с сингулярным возмущением с точностью до порядка величины одинакова.

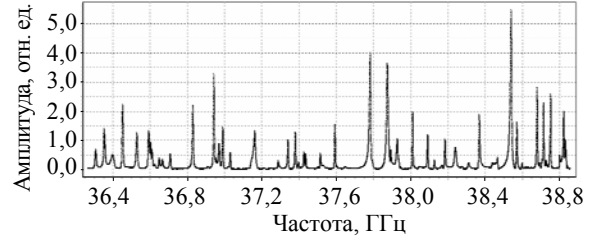


Рис. 2. Фрагмент измеренного частотного спектра резонатора, показанного на рис. 1

Результаты измерений продемонстрировали, что смещение резонансных частот, во-первых, пропорционально диаметру стержня, $\Delta\omega_{\bar{\mu}} \propto d$, а во-вторых, является относительно малым, $|\Delta\omega_{\bar{\mu}}|/\omega_{\bar{\mu}} \ll 1$. Для оценки константы связи Λ мы использовали асимптотическую формулу для поправки к модовой энергии, которая получается из T -потенциала (6) в пределе слабого межмодового рассеяния:

$$\Delta\kappa_{\bar{\mu}}^2 = \left[\frac{\Lambda(k, d)}{\pi R^2} \right]^2 \left[C_{l_{\bar{\mu}} n_{\bar{\mu}}} J_{|n_{\bar{\mu}}|}(\gamma_{l_{\bar{\mu}}}^{(n_{\bar{\mu}})}) r_0/R \right]^2 \sum_{\bar{\nu} \neq \bar{\mu}} \delta_{q_{\bar{\nu}} q_{\bar{\mu}}} \left[C_{l_{\bar{\nu}} n_{\bar{\nu}}} J_{|n_{\bar{\nu}}|}(\gamma_{l_{\bar{\nu}}}^{(n_{\bar{\nu}})}) r_0/R \right]^2 \frac{\kappa_{\bar{\mu}}^2 - \kappa_{\bar{\nu}}^2}{(\kappa_{\bar{\mu}}^2 - \kappa_{\bar{\nu}}^2)^2 + (1/\tau_d)^2}. \quad (12)$$

Согласно этой формуле, константа связи приближенно оценивается как $\Lambda \sim \sqrt{|\Delta\omega_{\bar{\mu}}|/\omega_{\bar{\mu}}} \ll 1$, что соответствует слабому перемешиванию мод.

Из полученного выражения видно, что сдвиг каждого резонансного пика (в данном случае – с конкретным модовым индексом $\bar{\mu}$) в существенной мере определяется частотами соседних с ним резонансов. Об этом свидетельствует наличие в формуле (12) суммы по $\bar{\nu} \neq \bar{\mu}$ и соответствующего резонансного множителя. Таким образом, благодаря межмодовому рассеянию, вызванному пространственно сингулярной неоднородностью, резонансные частоты оказываются существенно коррелированными, что, как известно, является одним из основных признаков КХ в распределении спектральных линий.

Для анализа статистических свойств спектра мы использовали гистограммы МЧ-интервалов для пустого резонатора и для резонаторов, содержащих различные возмущающие стержни. Для пустого резонатора гистограмма характери-

зуется практически пуассоновским распределением интервалов (рис. 3), как для E -, так и для H -колебаний, что свидетельствует о статистической независимости спектральных линий.

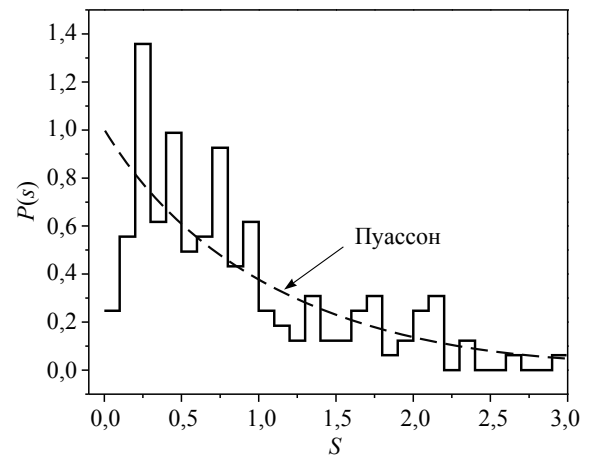


Рис. 3. Гистограмма МЧ-интервалов для резонатора без возмущения, s – нормированная длина МЧ-интервала. Пунктирной кривой для сравнения показано распределение Пуассона

На рис. 4 приведены гистограммы для резонаторов со вставленными в них стержнями различного диаметра. Видно, что сингулярное возмущение оказывает заметное влияние на статистические свойства спектра, делая их зависящими от уровня межмодового рассеяния.

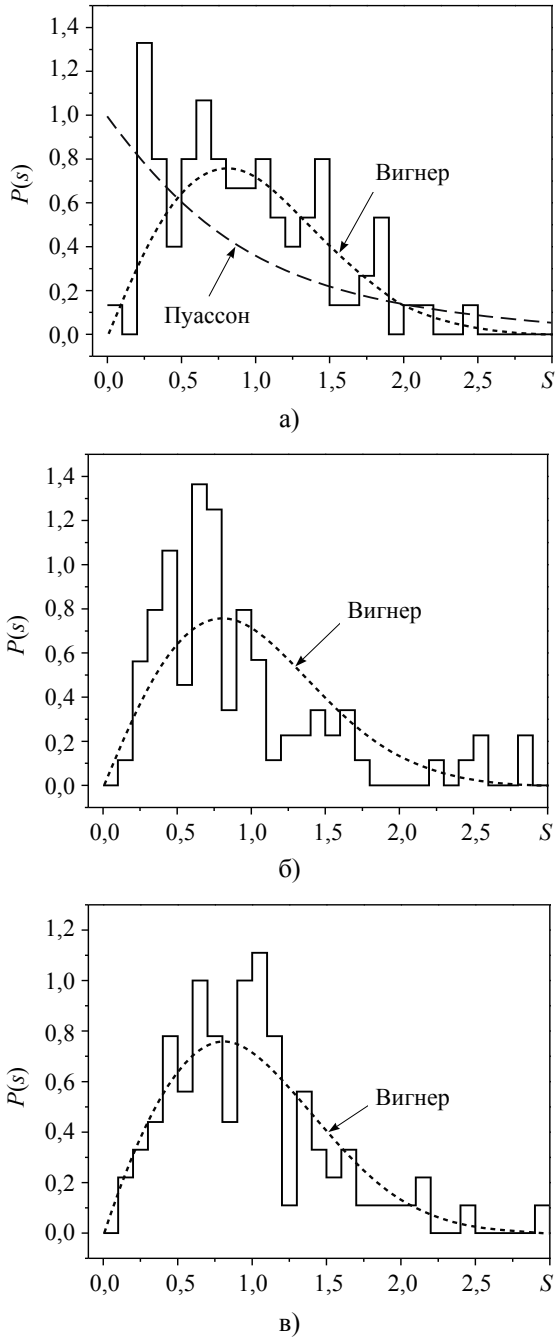


Рис. 4. Гистограммы МЧ-интервалов в спектре резонаторов, возмущаемых стержнями различного диаметра: а) – $d = 0,37$ мм; б) – $d = 0,7$ мм; в) – $d = 1,5$ мм. Во всех трех случаях $r_0 = 38$ мм

При увеличении диаметра стержня константа связи в потенциале (2) растет, а это, в свою очередь, ведет к ощутимому перераспределению

резонансных частот и к постепенной вигнеризации спектра МЧ-интервалов.

Даже при весьма малом диаметре стержня ($d \approx 0,4$ мм) гистограмма для колебаний E -типа (рис. 4, а) демонстрирует весьма сильное отличие распределения МЧ-интервалов от пуассоновского. Полученное нами в эксперименте распределение является промежуточным между пуассоновским и вигнеровским. С ростом диаметра стержня (при $d > 0,6$ мм) распределение МЧ-интервалов приближается к вигнеровскому, что свидетельствует о появлении в резонаторе с относительно сильным, хотя все еще и пространственно сингулярным возмущением ($d \ll \lambda$), явных признаков КХ. Свидетельством возникновения КХ служат также и результаты измерений спектральной жесткости, приведенные на рис. 5, которые были выполнены по методике, описанной в работе [12].

Нами также были проведены измерения коэффициентов корреляции МЧ-интервалов при разных уровнях сингулярного возмущения. Результаты качественно согласуются с данными, основанными на представленных выше гистограммах. Для пустого резонатора коэффициент корреляции ближайших уровней очень мал, $C(1) = 0,003$, что соответствует независимости спектральных линий резонатора, не содержащего возмущений. Для резонатора со стержнем диаметра $d = 1,5$ мм, для которого гистограммы демонстрируют уже существенные признаки КХ, коэффициент корреляции $C(1) = -0,268$. Это хорошо согласуется с теоретическими оценками указанного коэффициента для системы, принадлежащей гауссовскому ортогональному ансамблю (ГОА) [13].

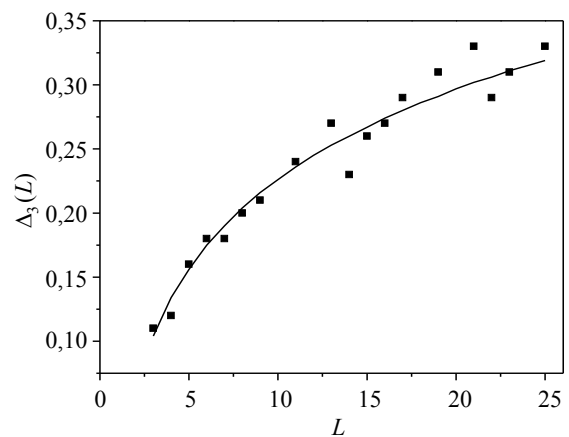


Рис. 5. Экспериментальные и теоретические данные по спектральной жесткости сингулярно возмущенного резонатора при $d = 1,5$ мм; L – нормированная длина последовательности измеренных резонансных частот. Сплошная кривая соответствует ГОА

Таким образом, на основании сопоставления данных спектральных экспериментов с ре-

зультатами построенной нами теории, основанной на операторном методе разделения мод, установлено, что в спектре микроволнового резонатора с пространственно сингулярным возмущением проявляются основные признаки КХ:

- подобное вигнеровскому распределение МЧ-интервалов спектра;
- существенная коррелированность спектральных линий;
- характерная кривая спектральной жесткости.

Возмущение в виде тонкого стержня, помещаемого в резонатор несимметричным образом, вызывает внутри- и межмодовое рассеяние колебаний, которые оказывают на спектр существенно разное влияние. Внутримодовое рассеяние проявляется в некоррелированном смещении отдельных спектральных линий, тогда как межмодовое рассеяние ведет к своеобразному «перепутыванию» мод, обеспечивая их взаимную корреляцию. Проведенный анализ дает все основания считать, что именно межмодовое рассеяние является источником КХ в спектре волновых систем бильярдного типа, подвергаемых сингулярному возмущению.

Библиографический список

1. Штокман Х.-Ю. Квантовый хаос: введение / Х.-Ю. Штокман. – М.: Физматлит, 2004. – 376 с.
2. Bohigas O. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws / O. Bohigas, M. J. Giannoni, C. Schmit // *Phys. Rev. Lett.* – 1984. – 52, N 1. – P. 1–4.
3. Gühr T. Random-matrix theories in quantum physics: common concepts / T. Gühr, A. Müller-Groeling, H. Weidenmüller // *Phys. Rep.* – 1998. – 299, N 4–6. – P. 189–425.
4. Ganapolskii E. M. Influence of random bulk inhomogeneities on quasioptical cavity resonator spectrum / E. M. Ganapolskii, Z. E. Eremenko, Yu. V. Tarasov // *Phys. Rev. E.* – 2007. – 75, N 2. – 026212 (13 p.).
5. Ganapolskii E. M. Effect of random surface inhomogeneities on spectral properties of dielectric-disk microresonators: Theory and modeling at millimeter wave range / E. M. Ganapolskii, Z. E. Eremenko, Yu. V. Tarasov // *Phys. Rev. E.* – 2009. – 79, N 4. – 041136 (14 p.).
6. Ganapolskii E. M. Spectral properties of cylindrical quasioptical cavity resonator with random inhomogeneous side boundary / E. M. Ganapolskii, Yu. V. Tarasov, L. D. Shostenko // *Phys. Rev. E.* – 2011. – 84, N 2. – 026209 (13 p.).
7. Гуревич Б. М. Эргодическая теория / Б. М. Гуревич // *Физическая энциклопедия: в 5 т. Т. 5; под ред. А. М. Прохорова.* – М.: Большая рос. энцикл., 1998. – 760 с.
8. Ганапольский Е. М. О признаках квантового хаоса в рассеивающей бильярдной К-системе с изломами боковой границы / Е. М. Ганапольский // *Письма в журн. эксперим. и теорет. физики.* – 2012. – 96, вып. 7. – С. 504–508.
9. Shigehara T. Conditions for the appearance of wave chaos in quantum singular systems with a pointlike scatterer / T. Shigehara // *Phys. Rev. E.* – 1994. – 50, N 6. – P. 4357–4370.
10. Shigehara T. Wave chaos in quantum billiards with a small but finite-size scatterer / T. Shigehara, T. Cheon // *Phys. Rev. E.* – 54, N 2. – P. 1321–1331.
11. Тэйлор Дж. Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений / Дж. Тэйлор; пер. с англ. под ред. А. М. Бродского. – М.: Мир, 1975. – 565 с.
12. Reichl L. E. The Transition to chaos: Conservative classical systems and quantum manifestations / L. E. Reichl. – N. Y.: Springer-Verlag, 2004. – 675 p.

13. Елютин П. В. Проблема квантового хаоса / П. В. Елютин // *Успехи физ. наук.* – 1988. – 155, вып. 3. – С. 397–442.

Рукопись поступила 08.07.2013 г.

E. M. Ganapolskii, Yu. V. Tarasov

THE INTERMODE SCATTERING AS A SOURCE OF QUANTUM CHAOS IN A MICROWAVE RESONATOR SUBJECTED TO SINGULAR PERTURBATION

The spectra of a microwave cylindrical resonator with the embedded thin metal rod playing the role of a singular perturbation are studied both theoretically and experimentally. The intra- and inter-mode scattering caused by the perturbation are clearly distinguished and recognized to play essentially different parts in the appearance of spectrum chaotic properties. Statistical analysis based on the mode-mixing operator norm shows that the singularity-induced inter-mode scattering results in the essential correlation of resonance frequencies. The results we have obtained in the experiment are in good conformity with our theory. Clear manifestations of quantum chaos are revealed for the resonator with the asymmetrically inserted rod, namely, the Wigner-type distribution of the inter-frequency intervals, the apparent correlation between spectral lines, and the characteristic curve of the spectral rigidity. By comparing the theory and the experiment we succeeded in establishing unequivocally and for the first time that it is just the inter-mode scattering that gives rise to quantum chaos in the spectrum of wave-billiard systems subject to singular perturbation.

Key words: quantum chaos, quasi-optical cavity resonator, inter-frequency interval distribution, correlation of resonance frequencies, singular perturbation, Green function, mode-mixing operator norm.

Є. М. Ганапольський, Ю. В. Тарасов

МІЖМОДОВЕ РОЗСІЯННЯ ЯК ДЖЕРЕЛО КВАНТОВОГО ХАОСУ В МІКРОХВИЛЬОВОМУ РЕЗОНАТОРІ З СИНГУЛЯРНИМ ЗБУРЕННЯМ

Теоретично й експериментально вивчено частотний спектр циліндрового мікрохвильового резонатора зі вставленим в нього тонким металевим стрижнем, що грає роль сингулярного збурення. Виділено два типи розсіяння (внутрішнього та міжмодового) і показано, що вони відіграють принципово різну роль у формуванні хаотичних властивостей спектру. Статистичний аналіз, виконаний на основі оцінки норми оператора перемішування мод, продемонстрував, що міжмодове розсіяння, викликане сингулярністю, призводить до суттєвої кореляції резонансних частот. Результати проведених вимірювань узгоджуються з висновками теорії. У спектрі резонатора з несиметрично вставленим у нього металевим стрижнем виявлено основні ознаки квантового хаосу, а саме вигнерівський розподіл міжчастотних інтервалів, кореляцію спектральних ліній і характерну криву спектральної жорсткості. Зіставлення теорії й експерименту дозволило вперше однозначно встановити, що саме міжмодове розсіяння є джерелом квантового хаосу в спектрі хвильових бильярдних систем, що піддаються сингулярному збуренню.

Ключові слова: квантовий хаос, квазіоптичний об'ємний резонатор, розподіл міжчастотних інтервалів, кореляція резонансних частот, сингулярне збурення, функція Гріна, норма оператора змішування мод.