УДК 520-274

Л. Е. Копилович
Институт радиофизики и электроники им А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: kopil@ire.kharkov.ua

БЕЗЫЗБЫТОЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ НА КВАДРАТНЫХ И ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ РЕШЕТКАХ БОЛЬШИХ РАЗМЕРОВ

В оптической и радиоастрономии для получения высокого разрешения используются интерферометры, элементы которых образуют безызбыточную конфигурацию (БК). При заданном числе элементов интерферометр такого типа позволяет измерять максимальное число пространственных частот, а также использовать методы, исключающие фазовые флуктуации, вызванные неоднородностью среды. При разработке математической модели интерферометра такого типа с двумерной апертурой, с возрастанием числа элементов (сопровождающимся необходимостью увеличения размера апертуры) резко возрастает объем вычислений. Обычно применяемые статистические методы в этом случае являются недостаточно эффективными. В настоящей работе для построения математических моделей двумерной апертуры – целочисленных решеток с БК элементов – применяется регулярный метод, основанный на использовании специальных комбинаторных конструкций – планарных разностных множеств. Дается краткое описание свойств этих множеств и способ их применения для решения поставленных задач. В работе построены БК с максимизированным числом элементов на квадратных и гексагональных решетках, а также БК, обеспечивающие полное покрытие центральной области пространственных частот. Получены оценки максимального числа элементов БК на решетках этих типов. Предложенный метод позволяет строить БК с максимизированным числом элементов на двумерных решетках большого размера. С его помощью возможно решать оптимизационные задачи построения интерферометрических систем, предназначенных для астрономических исследований. Он эффективнее статистических методов по объему вычислений и затрачиваемого на них времени. Ил. 8. Библиогр.: 18 назв.

Ключевые слова: интерферометры, безызбыточные конфигурации, планарные разностные множества, квадратные решетки, гексагональные решетки.

В последние десятилетия в Институте радиофизики и электроники НАН Украины проводились работы по построению многоэлементных безызбыточных конфигураций (БК) на квадратных и гексагональных решетках. Такие конструкции можно рассматривать как математические модели апертуры интерферометров, применяющихся в астрономических исследованиях, проводимых в оптическом и радиодиапазоне, для получения высокого разрешения [1]. При заданном числе элементов (субапертур, антенн), БК их дает возможность получать информацию об изучаемых объектах на максимальном числе пространственных частот. Кроме того, она позволяет применить методы, исключающие фазовые флуктуации, вызванные неоднородностью среды [2].

Задачи, связанные с моделированием безызбыточной двумерной апертуры интерферометра, относятся к классу оптимизационных: требуется максимизировать число элементов на апертуре, представляемой в виде целочисленной решетки заданных размеров, при выполнении некоторых дополнительных условий.

Для построения БК на небольших решетках использовались преимущественно статистические методы [3, 4]. Однако моделирование апертуры с большим числом элементов (что особенно актуально в радиодиапазоне [5]) должно проводиться на больших решетках; в этом случае применение статистических методов требует огромного объема вычислений, и поэтому целесообразно применять регулярные методы.

В настоящей работе приводятся результаты по построению БК из большого числа элементов на квадратных и гексагональных решетках с помощью регулярного метода, основанного на использовании планарных разностных множеств (ПРМ) [6]. Приведены также оценки максимального числа элементов БК на решетках больших размеров.

1. Многоэлементные БК на квадратных решетках. Напомним, что в БК на двумерной решетке все векторные разности между ее элементами различны (по величине или по направлению). Простой прием построения БК на прямоугольной решетке состоит в том, что она получается из имеющейся линейной БК с помощью операции свертывания (*folding*), обратной сканированию этой решетки [7] (рис. 1). То, что получаемая при этом конфигурация также безызбыточна, легко доказывается от противного.

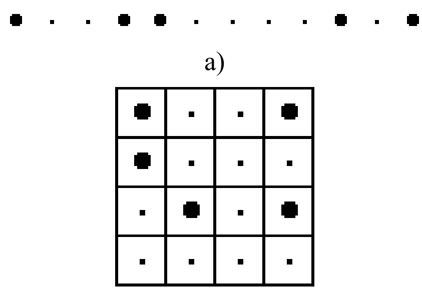


Рис. 1. Пример свертывания многоэлементной линейной БК на квадратную решетку: а) – БК на отрезке; б) – БК, полученная на квадрате

Чтобы построить по этому методу многоэлементную БК на прямоугольной решетке, оптимальную по заданному критерию, мы должны иметь набор линейных БК. В качестве них будем использовать ПРМ, представляющие собой безызбыточные последовательности. ПРМ с числом элементов $k < 100$ приведены в таблице (V, k, Λ)-циклических разностных множеств (частным случаем которых при $\Lambda = 1$ они являются [6]). Более полная таблица ПРМ с $k < 150$ имеется в работе [8].

При всех $k = q + 1$, где q – степень простого числа [6], существуют k-элементные ПРМ. Важным свойством их является то, что если имеется одно такое множество, то из него можно получить целый ансамбль множеств этого вида, с тем же числом элементов. Последовательно свертывая их на прямоугольную решетку заданных размеров, мы получаем каждый раз k-элементную БК на этой решетке; но если выделить на ней участок в виде квадратной решетки меньшего размера, то число элементов там будет разным, и можно найти БК с наибольшим их числом. Таким способом в [9] были построены БК, максимизированные по числу элементов, на квадратных решетках с длиной стороны от $n = 30$ до $n = 150$. Пример такой БК приведен на рис. 2.

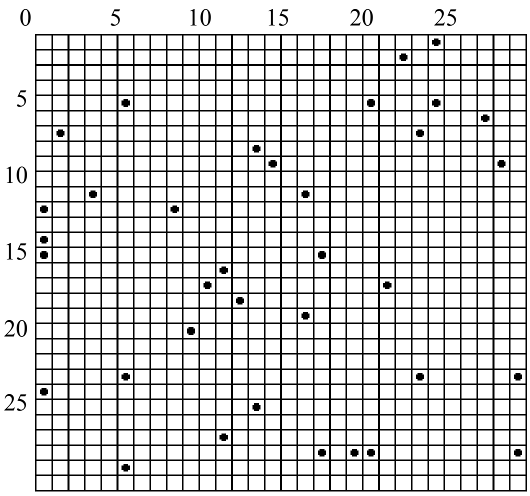


Рис. 2. 35-элементная БК на решетке 30×30

2. БК, дающие полное покрытие центральной области в плоскости пространственных частот. Одной из важных задач является нахождение БК с заданным числом элементов, обеспечивающей полное покрытие центральной области максимального размера в плоскости пространственных частот (u,v-плоскости) [10]. Такая задача при малом числе элементов (не более 10) решена в [11]. Предлагаемый метод позволяет решить эту задачу для таких областей большого размера.

Поскольку речь идет о покрытии центральной области u,v-плоскости, то БК, образуемая при свертывании ПРМ на решетку, должна содержать небольшие базы, а для этого должна быть сосредоточена в ее части. Поэтому отбираются ПРМ из ансамбля, обеспечивающие компактную группировку элементов БК на решетке, и среди них выбирается та, которая дает покрытие центральной области наибольшего размера.

В работе [12] были найдены БК, полностью покрывающие центральные области различного размера в u,v-плоскости. На рис. 3 приведен пример такой БК, полученной путем свертывания 18-элементной ПРМ на решетку 16×16 и покрывающей область 5×5 (выделена на рисунке); все ее элементы сосредоточены на участке 15×12.

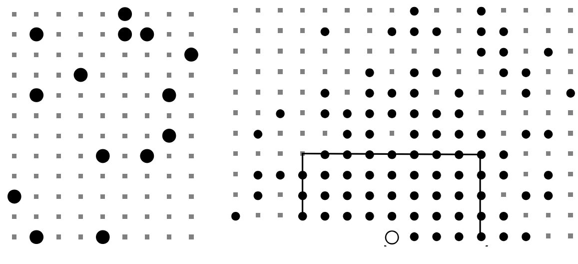


Рис. 3. БК на решетке 15×12 и покрытие ею u,v-плоскости (полностью покрытая центральная часть ее выделена)

3. БК элементов на гексагональных решетках. В астрономических исследованиях часто используются интерферометры с апертурой гексагональной формы. Моделирование оптимального безызбыточного размещения элементов на такой апертуре сводится к аналогичной задаче для квадратной апертуры.

Как показано в [13], преобразование с матрицей

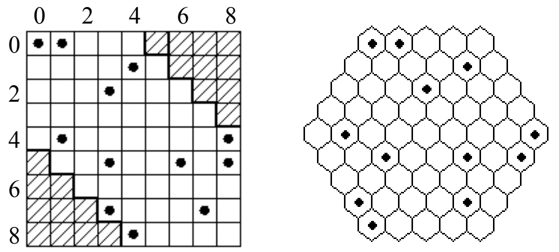
$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

переводит внутреннюю область (полосу) $n{\times}n$-решетки (при n-нечетном) в правильный гексагон радиусом $r = (n–1)/2$ (рис. 4)

$$|x - y| \le (n - 1)/2. \quad (2)$$

При этом, поскольку преобразование (1) является линейным, БК, размещенная в полосе (2) квадратной решетки, переходит в БК на гексагоне.

Таким образом, свертывая последовательно ряд ПРМ на квадратную решетку, мы получаем каждый раз БК в полосе (2) и находим ту, которая содержит наибольшее число элементов, после чего преобразуем ее в гексагон. Этим методом были найдены БК на гексагональных решетках радиусом от $r = 15$ до $r = 75$ [9]. В качестве примера на рис. 5 приведена БК из 33 элементов на гексагоне радиусом $r = 15$. Отметим, что большинство найденных БК, максимальных по числу элементов, обладает симметрией третьего порядка; при этом центр симметрии БК совпадает с центром гексагона (как на рис. 4, б) либо несколько сдвинут (на рис. 5 – обозначен крестом).



а) б)

Рис. 4. Преобразование БК на незаштрихованной части квадрата (а) в БК на гексагоне (б)

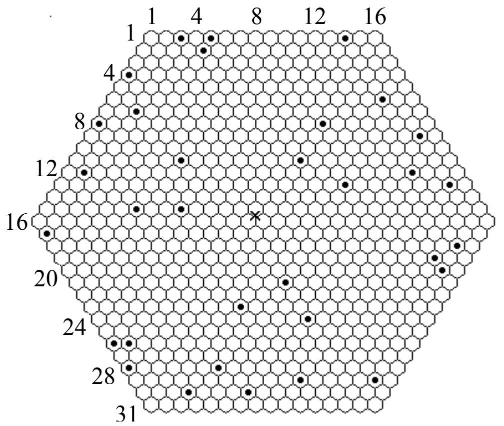
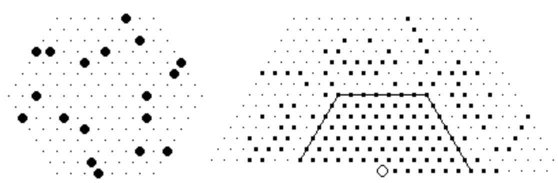


Рис. 5. 33-элементная БК на гексагональной решетке радиусом $r = 15$

Для построения БК на гексагональных решетках, полностью покрывающих центральную область u,v-плоскости, ПРМ свертывались на квадратную решетку, и велся поиск БК, компактно размещенных в полосе (2) этой решетки, а затем эта полоса преобразовывались в гексагон. В работе [14] найдены БК, полностью покрывающие центральные области u,v-плоскости размером от 5×5 до 8×8. Одна из таких БК и покрываемая ею u,v-плоскость приведены на рис. 6.



а) б)

Рис. 6. 18-элементная БК на гексагональной решетке радиусом $r = 7$ (а); покрытие ею u,v-плоскости (выделена полностью покрытая центральная часть) (б)

4. Оценки максимального числа элементов БК на квадратных и гексагональных решетках. Один из важных вопросов заключается в том, насколько число элементов в найденных БК близко к максимальному возможному $(k_{\max})$ на решетке данного размера. Существующие строгие оценки величины $k_{\max}$ для квадратных решеток [15, 16] слишком грубы, а для гексагональных решеток их до недавнего времени вообще не было. В работе [17] для получения таких оценок был применен подход, обобщающий метод [18], с помощью которого была получена верхняя оценка числа элементов БК на отрезке; но, в отличие от линейного случая, где получена точная оценка, здесь пришлось использовать данные для решеток небольших размеров, для которых величины $k_{\max}$ известны. Таким образом, полученные в [17] оценки числа элементов БК являются эмпирическими. Для $n{\times}n$-решетки эта оценка имеет вид $k < k_s$, где

$$k_s = 1{,}313\,n + \sqrt{1{,}313\,n - 1{,}724} + 0{,}5. \qquad (3)$$

На рис. 7 показаны оценки k_s, полученные по формуле (3), а также оценки из [15] (k_r) и [16] (k_{r1}); здесь же приведены известные из литературы значения $k_{\max}$ на $n{\times}n$-решетках при $n \le 22$. Мы видим, что в этом диапазоне значений n оценка (3) является лучшей.

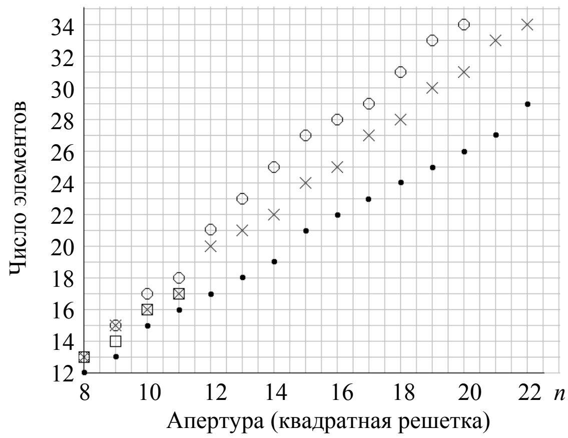


Рис. 7. Сравнение максимальных чисел элементов БК на квадратных решетках (k – •) с их оценками по формуле (3) (k_s – ×) в работах [15] (k_r – ○) и [16] (k_{r1} – □)

Оценка числа элементов на гексагональной решетке радиуса r: $k < k_h$, где

$$k_h = 1{,}213\,(2r+1) + \sqrt{1{,}213\,(2r+1) - 1{,}471} + 0{,}5. \quad (4)$$

Аналогичное сопоставление k_h, рассчитанных по формуле (4), с найденными в работах [3, 4, 7] величинами $k_{\max}$ на гексагональных решетках с $r \le 11$ приведено на рис. 8.

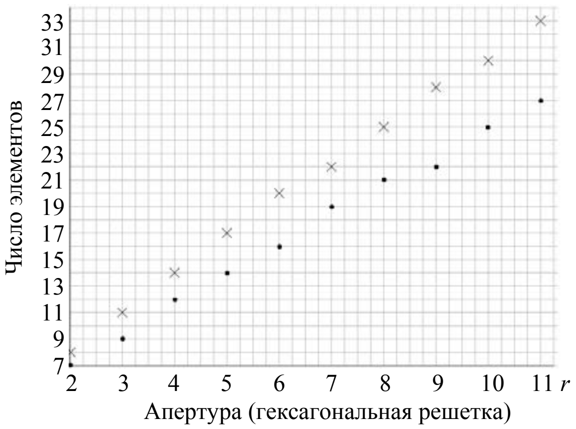


Рис. 8. Сравнение максимальных чисел элементов БК на гексагональных решетках (k – •) с их оценками по формуле (4) (k_h – ×)

Расхождение между значениями k для больших решеток, найденными в работе [9], и их оценками (3), (4) возрастает с увеличением размера решетки. Это связано, главным образом, с тем, что оценки эти эмпирические, основанные на известных данных для решеток небольших размеров. Увеличение базы таких данных позволит улучшить эти оценки.

Выводы. Предложенный метод позволяет строить безызбыточные конфигурации с максимизированным числом элементов на двумерных решетках большого размера. С его помощью оказывается возможным решать оптимизационные задачи построения интерферометрических систем, предназначенных для астрономических исследований. Он является значительно более эффективным с точки зрения объема вычислений и затрачиваемого на них времени, чем используемые в настоящее время статистические методы.

Библиографический список

1. *Thompson A. R.* Interferometry and Synthesis in Radio astronomy / A. R. Thompson, J. M. Moran, and G. W. Swenson Jr. – 2nd ed. – N. Y.: Wiley-Interscience Public., 2000. – 692 p.
2. *Brown T. M.* Reconstruction of turbulence-degraded image using nonredundant aperture arrays / T. M. Brown // J. Opt. Soc. Am. – 1978. – 68, N 7. – P. 883–889.
3. *Корниенко Ю. В.* Построение безызбыточных антенных конфигураций на квадратной решетке методом случайного поиска / Ю. В. Корниенко // Радиофизика и электрон.: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – Х., 2000. – 5, № 3. – С. 148–154.
4. *Корниенко Ю. В.* Построение бызызбыточных антенных конфигураций на гексагональной решетке методом случайного поиска / Ю. В. Корниенко // Радиофизика и электрон.: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – Х., 2002. – 7, № 1. – С. 142–153.
5. *Kogan L.* Optimizing a large array configuration to minimize the sidelobes / L. Kogan // IEEE Trans.Antennas Propag. – 2000. – 48, N 7. – P. 1075–1078.
6. *Baumert L. D.* Cyclic Difference Sets / L. D. Baumert. – N. Y.: Springer-Verlag, 1971. – 166 p.
7. *Kopilovich L. E.* Nonredundant apertures for optical interferometric systems: maximization of the number of elements / L. E. Kopilovich // J. of Mod. Opt. – 1998. – 45, N 11. – P. 2417–2424.
8. *Kopilovich L. E.* Multielement System Design in Astronomy and Radio Science / L. E. Kopilovich and L. G. Sodin. – Dordrecht, Boston, L.: Kluwer Acad. Publ., 2001. – 180 p.
9. *Kopilovich L. E.* Construction of nonredundant antenna configurations on square and hexagonal grids of large size / L. E. Kopilovich // Exp. Astron. – 2013. – 36, N 1–2. – P. 425–430.
10. *Keto E.* The shapes of cross-correlation interferometers / E. Keto // Astrophys. J. – 1997. – 475, N 2. – P. 843–852.
11. *Golay M. J. E.* Point arrays having compact, nonredundant autocorrelations / M. J. E. Golay // J. Opt. Soc. Am. – 1971. – 61, N 2. – P. 272–273.
12. *Копилович Л. Е.* Безызбыточные конфигурации антенн на двумерной апертуре интерферометра, дающее полное покрытие центральных областей в плоскости пространственных частот / Л. Е. Копилович // Радиофизика и радиоастрономия. – 2012. – 17, № 2. – С. 176–181.
13. *Голомб С. У.* Конструкции и свойства массивов Костаса / С. У. Голомб, Х. Тейлор // Тр. Ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектрон. – 1984. – 72, № 9. – С. 44–64.
14. *Kopilovich L. E.* Nonredundant hexagonal array configurations for optical interferometric systems compactly covering central domains in the spatial-frequency plane / L. E. Kopilovich // J. Mod. Opt. – 2005. – 52, N 10. – P. 1415–1420.
15. *Robinson J. P.* Golomb rectangles / J. P. Robinson // IEEE Trans. Inf. Theory. – 1985. – 31, N 6. – P. 781–787.
16. *Robinson J. P.* Golomb rectangles as folded rulers / J. P. Robinson // IEEE Trans. Inf. Theory. – 1997. – 43, N 1. – P. 290–293.
17. *Kopilovich L. E.* Upper estimates for the element number of nonredundant antenna configurations on square and hexagonal grids / L. E. Kopilovich // Exp. Astron. – 2010. – 28, N 1. – P. 1–9.
18. *Lindsröm B.* On inequality for B-sequences / B. Lindsröm // J. Comb. Theory. – 1969. – A6, N 2. – P. 211–212.

Рукопись поступила 18.07.2013.

L. E. Kopilovich

NON-REDUNDANT ELEMENT CONFIGURATIONS ON SQUARE AND HEXAGONAL GRIDS OF LARGE SIZES

The paper is devoted to building multi-element nonredundant configurations (NRCs) on square and hexagonal grids considered as mathematical models of interferometers. By the regular method based on using planar difference sets, NRCs on grids of large sizes having a maximized number of elements, and also those ensuring complete coverage of the central domains in the spatial-frequency plane (u,v-plane) are built. The estimates of the maximum number of the NRC elements on grids of given sizes are also obtained.

Key words: interferometers, non-redundant configurations, planar difference sets, square grids, hexagonal grids.

Л. Ю. Копилович

БЕЗНАДЛИШКОВІ КОНФІГУРАЦІЇ ЕЛЕМЕНТІВ НА КВАДРАТНИХ І ГЕКСАГОНАЛЬНИХ РЕШІТКАХ ВЕЛИКИХ РОЗМІРІВ

У оптичної та радіоастрономії для отримання високого розрізнення використовуються інтерферометри, елементи яких утворюють безнадлишкову конфігурацію (БК). При заданій кількості елементів інтерферометр такого типу дозволяє вимірювати максимальне число просторових частот, а також використовувати методи, що виключають фазові флуктуації, викликані неоднорідністю середовища. При розробці математичної моделі інтерферометра такого типу з двовимірною апертурою, із зростанням числа елементів (супроводжується необхідністю збільшення розміру апертури) різко зростає обсяг обчислень. Статистичні методи, які зазвичай застосовуються, в цьому випадку є недостатньо ефективними. У даній роботі для побудови математичних моделей двовимірної апертури – цілочисельних решіток з БК елементів – застосовується регулярний метод, що ґрунтується на використанні спеціальних комбінаторних конструкцій – планарних різницевих множин. Наведено короткий опис властивостей цих множин і спосіб їх застосування для вирішення поставлених задач. У роботі побудовано БК з максимізованим числом елементів на квадратних й гексагональних решітках, а також БК, що забезпечують повне покриття центральної області просторових частот. Отримано оцінки максимального числа елементів БК на решітках цих типів. Запропонований метод дозволяє будувати БК з максимізованим числом елементів на двовимірних решітках великого розміру. За його допомогою можливо вирішувати оптимізаційні задачі побудови інтерферометричних систем, призначених для астрономічних досліджень. Він ефективніше статистичних методів за обсягом обчислень і витраченого на них часу.

Ключові слова: інтерферометри, безнадлишкові конфігурації, планарні різницеві множини, квадратні решітки, гексагональні решітки.