

А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, С. Б. Панин, А. Е. Поединчук
 Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
 12, ул. Акад. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
 E-mail: melezhhik@ire.kharkov.ua

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА КРУГОВЫХ РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ

Предложен численно-аналитический метод определения дифракционных характеристик плоской линейно-поляризованной электромагнитной волны, падающей на круговой неоднородный изотропный магнитодиэлектрический цилиндр, материальные параметры которого зависят от радиальной координаты. Метод основан на построении специальных решений задачи Коши для уравнения Риккати и дает возможность в рамках единого подхода исследовать процессы дифракции волн как в радиально-слоистых, так и в непрерывных магнитодиэлектрических цилиндрических неоднородностях. Эффективность предложенного метода продемонстрирована на ряде примеров численного решения задач дифракции на круговых неоднородных изотропных диэлектрических цилиндрах. Ил. 5. Библиогр.: 28 назв.

Ключевые слова: круговой неоднородный изотропный магнитодиэлектрический цилиндр, дифракция волн, уравнение Риккати, численно-аналитический метод, полное сечение рассеяния.

Развитие радиолокации, включая подповерхностную, радионавигации, томографии, космической радиофизики и др., требует всестороннего исследования процессов излучения, отражения и дифракции волн в неоднородных средах. В связи с этим большой интерес представляют исследования электродинамических характеристик различных неоднородных объектов, материальные параметры которых зависят от пространственных координат.

Некоторые точные аналитические решения задач дифракции электромагнитных волн на неоднородных телах представлены в [1–3]. Для профиля электронной плотности холодной плазмы типа $1 - ar^{2m}$, где r – радиальная координата, a – постоянная, а $m > 0$, аналитические решения приведены в [4].

Приближенное решение задачи о рассеянии плоской электромагнитной волны от слоя неоднородной холодной электронной плазмы, покрывающего хорошо проводящий цилиндр, при изменении ее плотности по экспоненциальному закону, получено в [5]. В работе [6] представлено решение задачи о рассеянии плоской электромагнитной волны на круговом плазменном цилиндре, плотность которого изменяется по параболическому закону и обращается в нуль на поверхности цилиндра.

Кроме того, в 1960-70-х годах использовался метод аппроксимации непрерывно распределенных неоднородностей кусочно-постоянными функциями [7]. С использованием этого подхода были получены решения задач дифракции на произвольных радиально неоднородных цилиндрической и сферической структурах.

В работах [8, 9] рассмотрены задачи дифракции на теле, окруженном неоднородным слоем конечной толщины и помещенном в одно-

родную среду. Решение этих задач основывалось на методе Бубнова–Галеркина. В [10] при построении решения задачи рассеяния поле внутри неоднородного цилиндра определялось на основе метода конечных элементов. В работе [11] предложен метод расчета дифракционных характеристик многослойного диэлектрического цилиндра путем введения специальных цилиндрических функций. В результате получено решение задачи дифракции плоской волны на N -слоистом оптическом волокне, которое может быть использовано при моделировании и конструировании волоконно-оптических линий связи. Было показано, что такой подход целесообразно использовать при расчете структур, имеющих большой по сравнению с длиной волны диаметр. Разработке метода, на основе которого проводились исследования дифракционных характеристик N -слоистого бесконечного диэлектрического цилиндра, сечение которого обладает круговой симметрией, посвящена более поздняя серия работ [12–14]. Предложенный в этих работах метод дает возможность исследовать дифракционные характеристики N -слоистого бесконечного кругового диэлектрического цилиндра в достаточно широком диапазоне изменения волновых и геометрических параметров структуры, включая случаи, когда «внешний» радиус исследуемого радиально-слоистого цилиндра соизмерим с длиной волны. С помощью этого метода были рассчитаны поля дифракции на градиентных диэлектрических линзах с поперечной цилиндрической симметрией, зависимости показателя преломления которых от радиальной переменной выражаются известными формулами (внутренняя линза Люнеберга, обобщенная линза Люнеберга, а также линза – зеркало Итона–Липмана).

Задача дифракции низкочастотной H -поляризованной волны на неоднородном плаз-

менном цилиндре рассмотрена в [15], где внешнее магнитное поле полагалось параллельным оси цилиндра. Метод решения задачи основывался на теореме Фукса [16] для дифференциального уравнения второго порядка. Для некоторых специальных профилей плотности, например

$$N(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^s, \text{ где } s - \text{рациональное число, а } R -$$

радиус рассматриваемого неоднородного плазменного цилиндра, удалось получить точные решения.

Используя теорему Фукса, удалось построить математически обоснованный алгоритм расчета спектральных характеристик открытого двухмерного цилиндрического резонатора, содержащего радиально неоднородный круговой магнитодиэлектрический цилиндр [17].

Перечисленные выше задачи дифракции на неоднородных телах в основном относились к случаям, когда материальные параметры исследуемой электродинамической структуры зависят только от одной пространственной переменной. Чаще всего это была радиальная компонента.

В конце 1980-х и начале 1990-х годов появились работы [18–20], посвященные решениям задач дифракции электромагнитных волн на неоднородных цилиндрических структурах, материальные параметры которых зависят от двух пространственных переменных. Решения этих задач основывались на неполном методе Галеркина [21] и давали возможность строить последовательность приближенных решений исходной задачи дифракции с помощью краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами так называемого «жесткого» типа. В качестве недостатка этого подхода следует отметить, что сходимость приближенных решений к точному была доказана лишь в среднем. Отметим также, что в [20] была предложена новая схема неполного метода Галеркина для задачи дифракции на неоднородном цилиндре. Схема основывалась на аппроксимации решений сплайн-функциями по угловой координате. В итоге задача сводилась к краевой задаче для линейной системы дифференциальных уравнений с разреженной и аналитически вычисляемой матрицей. Доказана разрешимость приближенной задачи, и получена оценка скорости сходимости.

Предложенный в [22, 23] метод аналитической регуляризации для решения задач дифракции волн в локально неоднородных средах дает возможность эквивалентным образом сводить исходную краевую задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, матрица которой задает в соответствующем гильбертовом пространстве компактный и даже ядер-

ный оператор. В результате была получена асимптотическая оценка скорости сходимости. Эта оценка дает возможность обосновывать не только сходимость в среднем соответствующих приближенных решений к точному, но и равномерную сходимость (в смысле равномерной метрики пространства непрерывных функций) в любой ограниченной области.

В [24–27] предложен численно-аналитический метод решения задач дифракции электромагнитных волн как на неоднородных изотропных, так и на неоднородных анизотропных (гиротропных) плоских слоях. Полагалось, что материальные параметры, а в случае анизотропного слоя – элементы тензора диэлектрической проницаемости, зависят только от одной «продольной» пространственной координаты. Кроме того, на материальные параметры накладывалась определенная степень гладкости в рассматриваемой области. В основе метода лежит идея получения специальных решений задачи Коши для уравнения Риккати.

Цель настоящей работы состоит в обобщении метода [24–27] на решения задач дифракции плоских волн на круговых радиально неоднородных (магнитодиэлектрических) цилиндрах.

1. Постановка задачи. Построение алгоритма решения. Рассматривается задача дифракции плоской однородной монохроматической электромагнитной волны единичной амплитуды на бесконечном круговом неоднородном магнитодиэлектрическом цилиндре.

Пусть цилиндрическая неоднородность (рис. 1) занимает область пространства $D = \{(r, \varphi, z) : 0 \leq r < a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty\}$, где r, φ, z – цилиндрическая система координат, a – радиус внешней круговой цилиндрической поверхности. Диэлектрическая и магнитная проницаемости внутри области D зависят только от одной координаты r , т. е. $\varepsilon = \varepsilon(r)$ и $\mu = \mu(r)$.

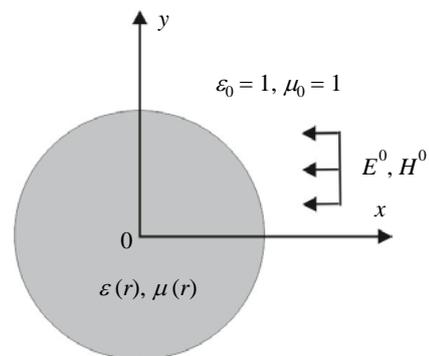


Рис. 1. Поперечное сечение радиально неоднородного кругового магнитодиэлектрического цилиндра

Пространство вне D заполнено однородной изотропной средой с относительными ди-

электрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon_0 = 1$ и $\mu_0 = 1$.

Пусть в области $r > a$ распространяется плоская однородная монохроматическая волна единичной амплитуды, вектор напряженности электрического поля которой параллелен оси OZ , а волновой вектор \vec{k} параллелен оси OX (рис. 1). Отличные от нуля компоненты поля этой волны имеют вид:

$$\begin{aligned} E_z^0 &= e^{-ikr \cos(\varphi)} e^{-i\omega t}, H_r^0 = \sin(\varphi) E_z^0, \\ H_\varphi^0 &= \cos(\varphi) E_z^0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $k = \frac{\omega}{c}$, где ω – частота; c – скорость света в среде, заполняющей область $r > a$. Временной множитель $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем опускаем. Полагаем также, что электромагнитное поле однородно вдоль образующей цилиндрической неоднородности (оси OZ). Иными словами, $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$.

Задача состоит в определении электромагнитного поля, возникающего в результате дифракции волны (1) на неоднородном цилиндре D . Как следует из уравнений Максвелла, эта задача сводится к определению дважды непрерывно дифференцируемой функции $U(r; \varphi)$ в $R^2 \setminus \partial D$, удовлетворяющей следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \Delta U + k^2 U &= 0, \quad r > a, \\ \Delta U - \frac{\mu'(r)}{\mu(r)} \frac{\partial U}{\partial r} + k^2 \varepsilon(r) \mu(r) U &= 0, \quad r < a \end{aligned} \quad (2)$$

и при $r = a$ условиям сопряжения

$$\begin{aligned} (U^0 + U^-)_{\partial D} &= (U^+)_{\partial D}, \\ \left(\frac{\partial U^0}{\partial r} + \frac{\partial U^-}{\partial r} \right)_{\partial D} &= \frac{1}{\mu(r)} \left(\frac{\partial U^+}{\partial r} \right)_{\partial D}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь функция $U^0 \equiv E_z^0$; ∂D – множество точек границы; Δ – оператор Лапласа в полярных координатах; U^\pm и $\frac{\partial U^\pm}{\partial r}$ – предельные значения на границе D функции U и ее производной по r :

$$U^\pm = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} U(M \mp \vec{n}h),$$

$$\frac{\partial U^\pm}{\partial r} = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{\partial U}{\partial r}(M \mp \vec{n}h),$$

где $M \in \partial D$, а \vec{n} – внешняя нормаль в точке M .

Функция $U(r; \varphi)$ также должна удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда:

$$\frac{\partial U}{\partial r} - ikU = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \text{ и } U = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Здесь o и O – символы Ландау. Штрих над функцией $\mu(r)$ в (2) означает операцию дифференцирования по r .

Несложно показать, что с помощью функции $U(r; \varphi)$ компоненты поля дифракции определяются следующим образом:

$$E_z \equiv U(r; \varphi), H_\varphi = \frac{i}{k} \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r}, & r > a, \\ \frac{1}{\mu(r)} \frac{\partial U}{\partial r}, & r < a, \end{cases} \quad (5)$$

$$H_r = \frac{i}{kr} \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & R > a, \\ \frac{1}{\mu(r)} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & r < a. \end{cases}$$

Остальные три компоненты поля дифракции ($E_r; E_\varphi; E_z$) равны нулю.

Введем безразмерную переменную $\rho = \frac{r}{a}, 0 \leq \rho \leq 1$. Тогда вид краевой задачи (2)–(4) не изменится (полагаем, что $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$ и $\mu = \mu(\rho)$), если волновое число k заменить на безразмерный частотный параметр $\kappa = ka$. Применяя к (2) метод разделения переменных в полярной системе координат $(\rho; \varphi)$ и учитывая условия излучения (4), в результате ряда несложных преобразований получаем представление для функции $U(\rho; \varphi)$:

$$U(\rho; \varphi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{+\infty} A_m \cos(m\varphi), & \rho \geq 1, \\ \sum_{m=0}^{+\infty} T_m u_m(\rho) \cos(m\varphi), & \rho \leq 1, \end{cases} \quad (6)$$

где $A_m = a_m (-i)^m J_m(\kappa\rho) + R_m H_m^{(1)}(\kappa\rho)$;

$a_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \geq 1; \end{cases}$ R_m и T_m – подлежащие определению коэффициенты; $J_m(z)$ и $H_m^{(1)}(z)$ – соответственно функции Бесселя и Ханкеля первого рода, а $u_m(\rho)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_m}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\mu'(\rho)}{\mu(\rho)} \right) \frac{d u_m}{d\rho} + \\ + \left(\kappa^2 \varepsilon(\rho) \mu(\rho) - \frac{m^2}{\rho^2} \right) u_m = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

причем $|u_m(0)| < \infty, m = 0; 1; 2; \dots$. Штрихи здесь обозначают дифференцирование по ρ . Используя условия (3), получаем систему:

$$\begin{cases} T_m u_m(1) - R_m H_m^{(1)}(\kappa) = (-i)^m a_m J_m(\kappa), \\ \frac{1}{\kappa \mu(1)} T_m u_m'(1) - R_m H_m^{(1)'}(\kappa) = (-i)^m a_m J_m'(\kappa). \end{cases} \quad (8)$$

Здесь и далее штрихи над функциями означают их производные по аргументу.

Решая систему (8) относительно R_m и T_m ,
имеем

$$R_m = a_m (-i)^m F_m; \quad (9)$$

$$T_m = a_m (-i)^m G_m. \quad (10)$$

Здесь

$$F_m = \frac{J_m(\kappa)u_m'(1) - \kappa\mu(1)J_m'(\kappa)u_m(1)}{\kappa\mu(1)u_m(1)H_m^{(1)'}(\kappa) - u_m'(1)H_m^{(1)}(\kappa)},$$

$$G_m = \frac{2i\mu(1)}{\pi \left(\kappa\mu(1)u_m(1)H_m^{(1)'}(\kappa) - u_m'(1)H_m^{(1)}(\kappa) \right)}.$$

Таким образом, представление (6) для $U(\rho, \varphi)$, а также формулы (9), (10) дают решение исходной краевой задачи (2)–(4).

Из изложенного выше следует, что основным моментом при решении рассматриваемой задачи дифракции является нахождение решений дифференциального уравнения (7), ограниченных в нуле.

Отметим, что решения обыкновенного дифференциального уравнения (7) с переменными коэффициентами в общем случае не выражаются ни через элементарные, ни через специальные функции. Только в ряде случаев, когда $\varepsilon(\rho)$ и $\mu(\rho)$ заданы явно, решения (7) могут быть получены аналитически.

В цикле работ [24–27], посвященных решению задач дифракции на плоских неоднородных магнитоэлектрических слоях, причем как изотропных, так и анизотропных, и упомянутых в них отечественных и зарубежных статьях указывалось, что при ряде ограничений и предположений относительно $\varepsilon(\rho)$ и $\mu(\rho)$ для получения решений (7) можно воспользоваться различными численными или численно-аналитическими методами. Такими, например, как метод степенных или, что чаще встречается при исследованиях, обобщенно степенных рядов, метод последовательных приближений, метод полиномиальных операторов, метод аппроксимации многочленами, проекционные методы, метод сеток и др.

В указанных выше работах [24–27] для решения задач дифракции плоских электромагнитных волн на неоднородных магнитоэлектрических слоях предложен эффективный численно-аналитический метод, основанный на получении специальных решений задачи Коши для уравнения Риккати.

Ниже дано обобщение этого метода для решения задач дифракции волн на круговом изотропном радиально неоднородном магнитоэлектрическом цилиндре. Введем новую неизвестную функцию $V_m(\rho)$ такую, что

$$u_m(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^m \exp\left(\int_0^\rho \mu(\rho)V_m(\rho)d\rho\right), \quad (11)$$

где m – целое положительное число, включая ноль. В дальнейшем полагаем, что $\mu(\rho)$ является непрерывно дифференцируемой, а $\varepsilon(\rho)$ – кусочно-непрерывной функцией на $[0; 1]$.

Легко убедиться, что дифференциальное уравнение (7) может быть представлено в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du_m}{d\rho} \right) - \frac{\mu'(\rho)}{\mu(\rho)} \frac{du_m}{d\rho} + \left(\kappa^2 \varepsilon(\rho) \mu(\rho) - \frac{m^2}{\rho^2} \right) u_m = 0. \quad (12)$$

Кроме того, используя (11), можно показать, что

$$u_m(0) = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m > 0, \end{cases} \quad u_m'(0) = \begin{cases} \mu(0)V_0(0); & m = 0, \\ 0,5; & m = 1, \\ 0; & m \geq 2. \end{cases} \quad (13)$$

Подставляя (11) в (12), в результате ряда преобразований получаем

$$(\rho V_m)' + 2mV_m(\rho) + \rho\mu(\rho)V_m^2(\rho) + \kappa^2 \rho \varepsilon(\rho) - m \frac{\mu'(\rho)}{\mu(\rho)} = 0. \quad (14)$$

Принимая во внимание то, что решения дифференциального уравнения (7) должны быть ограничены в нуле (13), в дальнейшем полагаем, что

$$V_m(0) = \frac{m\mu'(0)}{(2m+1)\mu^2(0)}, \quad (15)$$

где предполагается $\mu(0) \neq 0$.

В результате задача Коши (12), (13) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка сведена к задаче Коши (14), (15) для уравнения Риккати.

Отметим, что из (11) следует соотношение

$$u_m'(1) = (m + \mu(1)V_m(1))u_m(1), \quad (16)$$

справедливое для всех целых положительных значений m , включая ноль.

Подставим (16) в формулы (9) и (10). Проведя ряд преобразований, получим

$$R_m = a_m (-i)^m \hat{F}_m; \quad (17)$$

$$T_m = a_m (-i)^m \hat{G}_m. \quad (18)$$

Здесь

$$\hat{F}_m = \frac{J_m(\kappa)(m + \mu(1)V_m(1)) - \kappa\mu(1)J_m'(\kappa)}{\kappa\mu(1)H_m^{(1)'}(\kappa) - (m + \mu(1)V_m(1))H_m^{(1)}(\kappa)} \cdot 2^{m+1} i \mu(1) \exp\left(-\int_0^1 \mu(z)V_m(z)dz\right),$$

$$\hat{G}_m = \frac{\pi \left(\kappa\mu(1)H_m^{(1)'}(\kappa) - (m + \mu(1)V_m(1))H_m^{(1)}(\kappa) \right)}{\pi \left(\kappa\mu(1)H_m^{(1)'}(\kappa) - (m + \mu(1)V_m(1))H_m^{(1)}(\kappa) \right)}.$$

Из представлений (17), (18) видно, что для окончательного решения задачи (2)–(4) необ-

ходимо вычислить $V_m(1)$ и $\exp\left(-\int_0^1 \mu(z)V_m(z)dz\right)$.

С этой целью вернемся к задаче Коши для уравнения Риккати (14), (15).

Построим приближенное решение этой задачи. Для этого аппроксимируем интервал $0 < \rho < 1$ конечным набором точек

$(\rho_n)_{n=1}^N : \rho_n = (n-1)\delta$, а $\delta = \frac{1}{N-1}$, где N – достаточно большое натуральное число. Обозначим через $V_{nm} = V_m(\rho_n)$, $\varepsilon_n = \varepsilon(\rho_n)$, $\mu_n = \mu(\rho_n)$, т. е. соответствующие значения V_m , ε и μ в точках ρ_n , $n = 1; 2; 3; \dots; N$. Задача состоит в нахождении приближенных значений V_{nm} , $n = 1; 2; 3; \dots; N$, $m = 0; 1; 2; 3; \dots$.

Как следует из (15), V_{1m} , $m = 0; 1; 2; 3; \dots$ известны. Для определения V_{2m} проинтегрируем уравнение (14) в пределах от ρ_1 до ρ_2 :

$$\begin{aligned} & \rho_2 V_{2m} - \rho_1 V_{1m} + 2m \int_{\rho_1}^{\rho_2} V_m(\rho) d\rho + \\ & + \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \mu(\rho) V_m^2(\rho) d\rho + \kappa^2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \varepsilon(\rho) d\rho - \\ & - m \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu'(\rho)}{\mu^2(\rho)} d\rho = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Аппроксимируя первые три интеграла в (19) квадратурной суммой двухточечной формулы трапеции [28], имеем

$$\begin{aligned} & \rho_2 V_{2m} - \rho_1 V_{1m} + m\delta(V_{1m} + V_{2m}) + \\ & + \frac{\delta}{2}(\rho_1 \mu_1 V_{1m}^2 + \rho_2 \mu_2 V_{2m}^2) + \\ & + \frac{\kappa^2 \delta}{2}(\rho_1 \varepsilon_1 + \rho_2 \varepsilon_2) + m\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right) \approx 0. \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом того, что $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \delta$, а $V_{1m} = V_m(0) = \frac{m\mu'(0)}{(2m+1)\mu^2(0)}$, соотношение (20) сводится к квадратному уравнению относительно V_{2m} вида

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_2 \delta}{2} V_{2m}^2 + (m+1)V_{2m} + \frac{\kappa^2 \varepsilon_2 \delta}{2} + \\ & + m\left(\alpha_m + \frac{1/\mu_2 - 1/\mu_1}{\delta}\right) \approx 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $\alpha_m = \frac{m\mu'(0)}{(2m+1)\mu^2(0)}$.

Решая это уравнение и выбирая при этом решение, «близкое» при $\delta \rightarrow 0$ к V_{1m} , получаем

$$V_{2m} = -\frac{\kappa^2 \varepsilon_2 \delta + 2m\left(\alpha_m + \frac{1/\mu_2 - 1/\mu_1}{\delta}\right)}{m+1+\sqrt{D_m}}, \quad (22)$$

где

$$D_m = (m+1)^2 - \kappa^2 \varepsilon_2 \mu_2 \delta^2 - 2m\mu_2 \times \left(\alpha_m \delta + \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right).$$

Определим теперь V_{nm} для значений индекса $n = 2; 3; \dots; N$. Для этого преобразуем уравнение (14) к виду

$$\begin{aligned} & V_m'(\rho) + \frac{2m+1}{\rho} V_m(\rho) + \mu(\rho) V_m^2(\rho) + \kappa^2 \varepsilon(\rho) - \\ & - m \frac{\mu'(\rho)}{\mu^2(\rho)} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Проведя интегрирование (23) в пределах от ρ_n к ρ_{n+1} , получим

$$\begin{aligned} & V_{n+1m} - V_{nm} + (2m+1) \int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}} \frac{V_m(\rho)}{\rho} d\rho + \\ & + \int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}} \mu(\rho) V_m^2(\rho) d\rho + \kappa^2 \int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}} \varepsilon(\rho) d\rho - \\ & - m \int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}} \frac{\mu'(\rho)}{\mu^2(\rho)} d\rho = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Представим последний интегральный член в (24) в виде

$$\begin{aligned} & - \int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}} \frac{\mu'(\rho)}{\mu^2(\rho)} d\rho = \int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}} \frac{1}{\mu(\rho)\rho^2} d\rho + \\ & + \frac{1}{\rho_{n+1}\mu(\rho_{n+1})} - \frac{1}{\rho_n\mu(\rho_n)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Полагая N достаточно большим числом, аппроксимируя первые три интеграла в (24) и интегральный член в (25) квадратурной суммой двухточечной формулы трапеции [28], имеем

$$\frac{\delta \mu_{n+1}}{2} V_{n+1m}^2 + \left(1 + \frac{2m+1}{2n}\right) V_{n+1m} + F_{nm} = 0. \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} & F_{nm} = \left(\frac{2m+1}{2(n-1)} - 1\right) V_{nm} + \frac{\delta \mu_n}{2} V_{nm}^2 + \frac{\kappa^2 \delta}{2} (\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) + \\ & + \frac{m}{\delta} \left(\frac{1}{\mu_{n+1} n} - \frac{1}{\mu_n (n-1)}\right) + \frac{m}{2\delta} \left(\frac{1}{\mu_n (n-1)^2} - \frac{1}{\mu_{n+1} n^2}\right). \end{aligned}$$

Из (26) получаем, что

$$V_{n+1m} = \frac{-\left(1 + \frac{2m+1}{2n}\right) \pm \sqrt{\tilde{D}_{nm}}}{\delta\mu_{n+1}}, \quad (27)$$

где $\tilde{D}_{nm} = \left(1 + \frac{2m+1}{2n}\right)^2 - 2\delta\mu_{n+1}F_{nm}$.

Выбирая в (27) то значение V_{n+1m} , которое при $N \rightarrow \infty (\delta \rightarrow 0)$ стремится к V_{nm} , в результате элементарных преобразований получим

$$V_{n+1m} = -\frac{2F_{nm}}{1 + \frac{2m+1}{2n} + \sqrt{\tilde{D}_{nm}}}, \quad (28)$$

$n = 2; 3; \dots; N-1, \quad m = 0; 1; 2; \dots$

Формула (28) дает возможность вычислять значения V_{nm} , поскольку известны значения V_{1m} и V_{2m} . Можно показать, что погрешность формулы (28) будет величина порядка δ^2 .

Таким образом, формула (28) является явным вычислительным алгоритмом расчета приближенных значений $(V_{nm})_{n=3}^N$ решения задачи Коши (14), (15) на сетке $(\rho_n)_{n=1}^N$.

Из (28) также непосредственно следует, что $V_m(1) \approx V_{Nm}$.

Экспоненциальный множитель в (18) может быть вычислен по рекуррентной формуле $B_{1m} \equiv 1$,

$$a \quad B_{n+1m} = B_{nm} \exp\left(-\frac{\delta}{2}(\mu_n V_{nm} + \mu_{n+1} V_{n+1m})\right),$$

где $n = 1; 2; \dots; N-1$.

$$\text{В итоге } B_{Nm} \approx \exp\left(-\int_0^1 \mu(z) V_m(z) dz\right).$$

Искомые коэффициенты $R_m, T_m, m = 0; 1; 2; \dots$ выражаются с помощью V_{Nm} и B_{Nm} согласно формулам:

$$R_m = a_m (-i)^m L_m; \quad (29)$$

$$T_m = a_m (-i)^m M_m. \quad (30)$$

Здесь

$$L_m = \frac{J_m(\kappa)(m + \mu(1)V_{Nm}) - \kappa\mu(1)J'_m(\kappa)}{\kappa\mu(1)H'_m(\kappa) - (m + \mu(1)V_{Nm})H_m(\kappa)},$$

$$M_m = \frac{2^m i \mu(1) B_{Nm}}{\pi(\kappa\mu(1)H'_m(\kappa) - (m + \mu(1)V_{Nm})H_m(\kappa))}.$$

Через значения R_m вычисляются такие интегральные характеристики, как полное и об-

ратное сечения рассеяния, диаграммы направленности и др.

Например, полное сечение рассеяния σ_s может быть вычислено по формуле

$$\sigma_s/a = \frac{4}{\kappa} \left(|R_0|^2 + 0,5 \sum_{m=1}^{+\infty} |R_m|^2 \right),$$

а обратное сечение рассеяния $\sigma_B -$

$$\sigma_B/a = \frac{4}{\kappa} \left| \sum_{m=0}^{+\infty} (-i)^m R_m \right|^2.$$

Наконец отметим, что у рассмотренной выше задачи дифракции вектор напряженности электрического поля был параллелен оси OZ . Иными словами, был рассмотрен случай E -поляризованных электромагнитных волн.

В случае H -поляризации, когда вектор напряженности магнитного поля параллелен оси OZ , решение исходной задачи может быть получено по аналогичной схеме. Для этого достаточно потребовать, чтобы $\varepsilon(\rho)$ была непрерывно дифференцируемой функцией, а $\mu(\rho)$ – кусочно-непрерывной. Кроме того, следует учесть, что

$$H_z(\rho; \varphi) \equiv U(\rho; \varphi), \quad E_\varphi(\rho; \varphi) = \frac{1}{i\kappa\varepsilon(\rho)} \frac{\partial U}{\partial \rho},$$

$$E_r(\rho; \varphi) = -\frac{1}{i\rho\kappa\varepsilon(\rho)} \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

и во всех полученных выше формулах поменять местами $\varepsilon(\rho)$ и $\mu(\rho)$.

2. Численные результаты. Разработанный численно-аналитический метод был реализован в виде комплекса программ для персонального компьютера. Ниже приведены результаты численных расчетов, характеризующих эффективность предложенного метода. В качестве характеристики сходимости численного алгоритма (28) выбрана величина

$$\delta_N = \lg \left| \frac{V_{Nm} - V_{2Nm}}{V_{2Nm}} \right|, \quad (31)$$

где V_{Nm} и V_{2Nm} – приближенные значения функции $V_m(1)$, являющейся решением задачи Коши (14), (15) и вычисленные согласно (28) при шагах дискретизации

$$\delta = \frac{1}{N-1} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{1}{2N-1}.$$

Величина δ_N зависит от N – числа точек дискретизации, индекса m – числа членов в разложении по азимутальной координате φ (16),

частотного параметра $\kappa = \frac{\omega a}{c}$ (ω – круговая частота возбуждающей волны, a – радиус внешней цилиндрической поверхности), диэлектрической

и магнитной проницаемостей $\varepsilon(r/a)$ и $\mu(r/a)$ неоднородного цилиндра.

Были проведены расчеты зависимости δ_N от количества точек дискретизации N для различных значений частотного параметра κ и индекса m .

Относительная диэлектрическая проницаемость радиально неоднородного цилиндра моделировалась двумя функциями:

$$\varepsilon_1(r/a) = a_1 \sin(2\pi b_1(r/a)) + b_1 + id_1,$$

$$\varepsilon_2(r/a) = a_2 (r/a)^p + b_2 + id_2.$$

Относительная магнитная проницаемость полагалась равной единице.

На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов величины δ_N .

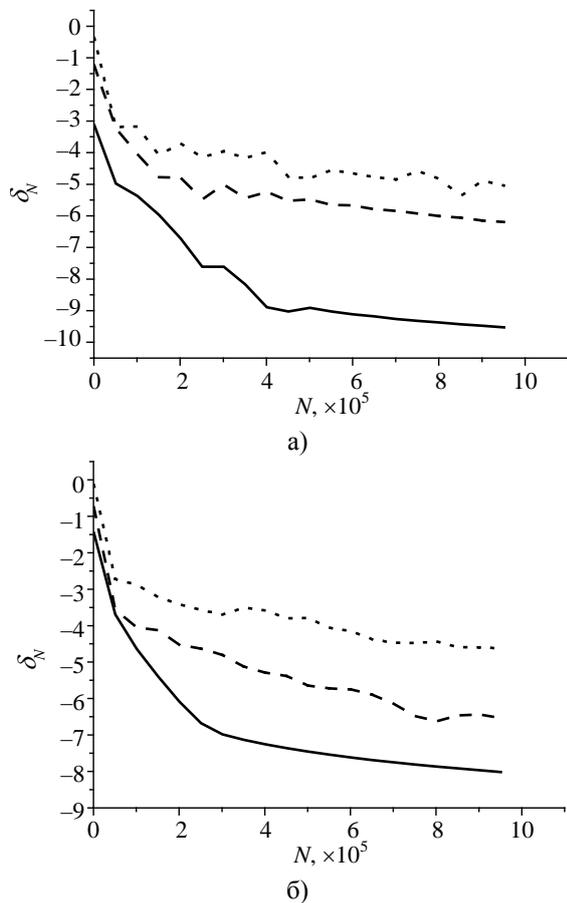


Рис. 2. Графики зависимости δ_N от числа точек дискретизации при $m=1$ для различных значений частотного параметра κ ($\kappa=5,1$ – сплошная линия; $\kappa=25,1$ – пунктирная линия; $\kappa=50,1$ – линия из точек): а) $\varepsilon(r/a) = 3,5 \sin(8\pi r/a) + 4,5 + i0,0001$; б) $\varepsilon(r/a) = 3,5 (r/a)^4 + 4,5 + i0,0001$

Как следует из графиков на рис. 2, при фиксированных значениях N (число точек дискретизации) и индекса m с ростом частотного параметра κ величина δ_N увеличивается. Про-

тивоположный результат получается при увеличении индекса m при фиксированных значениях N и κ . В этом случае величина δ_N уменьшается. Такое поведение величины δ_N позволяет для заданных значений m и κ выбрать оптимальное число точек дискретизации, при которых δ_N не превосходит заданного значения. Анализ численных результатов показал, что оптимальное значение N можно оценить по следующей формуле:

$$N \approx 1 + \kappa \sqrt{\varepsilon_{cp}} 10^\gamma.$$

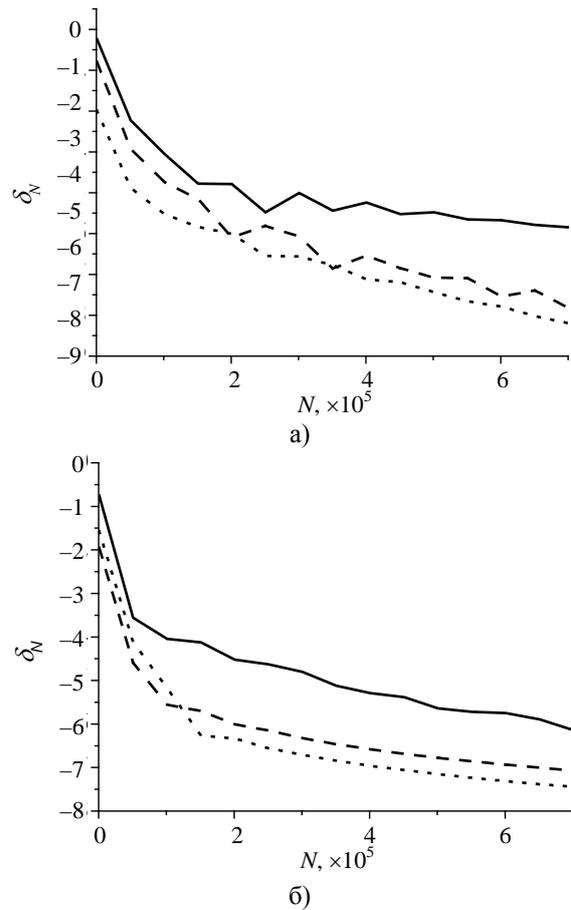


Рис. 3. Графики зависимости δ_N от числа точек дискретизации при $\kappa=25$ для различных значений параметра m ($m=1$ – сплошная линия; $m=15$ – пунктирная линия; $m=30$ – линия из точек): а) $\varepsilon(r/a) = 3,5 \sin(8\pi r/a) + 4,5 + i0,0001$; б) $\varepsilon(r/a) = 3,5 (r/a)^4 + 4,5 + i0,0001$

Здесь γ – положительное число и при том такое, что выполняется неравенство

$$\delta_N \leq -\gamma,$$

а величина ε_{cp} – усредненное значение диэлектрической проницаемости по площади поперечного сечения радиально неоднородного цилиндра

$$\varepsilon_{cp} = \frac{2}{a^2} \int_0^a |\varepsilon(r)| r dr.$$

Рассмотрим теперь в качестве примера решение задачи дифракции E -поляризованной волны на радиально неоднородном круговом диэлектрическом цилиндре, распределение относительной диэлектрической проницаемости которого соответствует линзе Люнеберга:

$$\varepsilon\left(\frac{r}{a}\right)=\left(\frac{a}{f}\right)^2\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)+1,$$

где a – радиус внешней цилиндрической поверхности; f – геометрическое фокусное расстояние. Относительная диэлектрическая проницаемость внешней круговой поверхности равна единице.

Относительно возбуждающей E -поляризованной волны предполагалось, что ее волновой вектор параллелен оси OX (рис. 1), а амплитуда равна единице.

Ниже представлены результаты расчетов полного сечения рассеяния σ_s (рис. 4) и распределения напряженности электрического поля E_z (рис. 5).

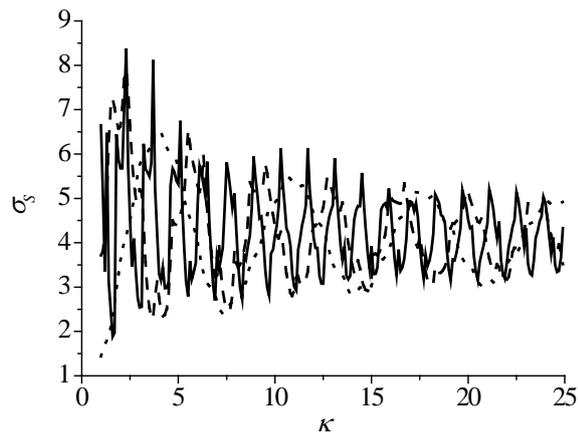


Рис. 4. Графики зависимости полного сечения рассеяния σ_s от частотного параметра κ для различных значений параметра a/f : $a/f=0,25$ – сплошная линия; $a/f=0,5$ – пунктирная линия; $a/f=0,75$ – линия из точек

Как следует из графиков рис. 4, полное сечение рассеяния резонансным образом зависит от частотного параметра $\kappa = \frac{\omega a}{c}$ (ω – круговая частота возбуждающей волны). Количество резонансов полного сечения рассеяния существенным образом зависит от параметра $\frac{a}{f}$ и частотного параметра κ . Интересно отметить, что при $\frac{a}{f} \rightarrow 1$ количество резонансов резко уменьшается. По-видимому это связано с тем, что при $\frac{a}{f} \rightarrow 1$ относительная диэлектрическая проницаемость об-

ращается в единицу на границе неоднородного цилиндра (т.е. совпадает с относительной диэлектрической проницаемостью внешней среды).

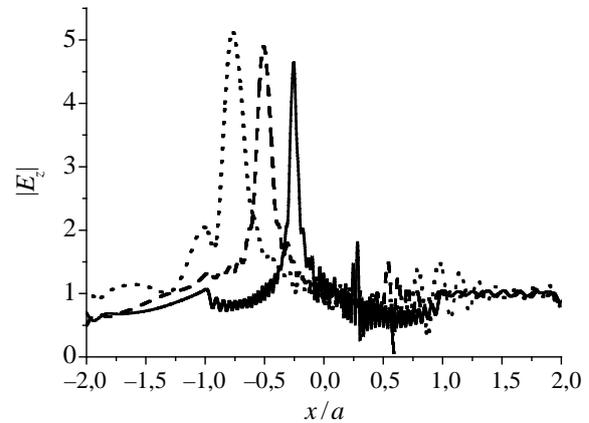


Рис. 5. Графики зависимости $|E_z|$ вдоль оси x при $\kappa=25$ для различных значений параметра a/f : $a/f=0,75$ – сплошная линия; $a/f=0,5$ – пунктирная линия; $a/f=0,25$ – линия из точек

Из графиков рис. 5 видно, что зависимость $|E_z|$ от нормированной координаты x/a ведет себя ярко выраженным резонансным образом. Максимальное значение $|E_z|$ достигается в окрестности геометрического фокуса линзы Люнеберга.

Выводы. Разработан метод решения задач дифракции волн на круговых изотропных неоднородных магнитоэлектрических цилиндрах, диэлектрическая и магнитная проницаемости которых зависят только от одной радиальной координаты. Метод основан на построении специальных решений задачи Коши для уравнения Риккати. Для применения метода достаточно потребовать, чтобы одна из функций, моделирующая неоднородность, была непрерывно дифференцируемой, а вторая – кусочно-непрерывной, либо наоборот, в зависимости от поляризации возбуждающей волны.

Предложенный алгоритм дает возможность в рамках единого подхода проводить исследования процессов дифракции волн как в радиально-слоистых, так и в непрерывных магнитоэлектрических цилиндрических неоднородностях.

Проведено исследование поведения полного сечения рассеяния от частотного параметра линзы Люнеберга при различных значениях ее фокального параметра. Исследовано поведение от поперечного геометрического параметра x/a модуля компоненты $E_z(x, y)$ на резонансных частотах.

Библиографический список

1. *Burman R.* Some electromagnetic Wave functions for propagation in cylindrically stratified media / R. Burman // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 1965. – AP-13, N 4. – P. 646–647.
2. *Селезов Н. Т.* Дифракция волн на симметричных неоднородностях / Н. Т. Селезов, В. В. Яковлев. – К.: Наук. думка, 1978. – 148 с.
3. *Селезов Н. Т.* Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах / Н. Т. Селезов, Ю. Г. Кривонос, В. В. Яковлев. – К.: Наук. думка, 1985. – 136 с.
4. *Nozaka M.* Scattering of electromagnetic Waves by a cylindrically inhomogeneous plasma / M. Nozaka, K. Takaku // J. Phys. Soc. Jap. – 1968. – 24, N 1. – P. 172–184.
5. *Bhartia P.* Scattering by an imperfectly conducting cylinder with a radially inhomogeneous dielectric coating / P. Bhartia, L. Shafai, M. A. K. Hamid // Int. J. Electron. – 1971. – 31, N 5. – P. 531–535.
6. *Kriegsmann G. A.* An application of the method of geometrical optics to the scattering of plane electromagnetic Waves of cylindrically confined cold plasmas / G. A. Kriegsmann // J. Math. Phys. – 1976. – 17, N 1. – P. 112–120.
7. *Lunov W.* Diffraction of electromagnetic Waves on plasma cylinders / W. Lunov, M. Tutter // Plasma Phys. – 1967. – 9, N 2. – P. 97–112.
8. *Ильинский А. С.* Дифракция электромагнитных волн на неоднородном ограниченном теле / А. С. Ильинский, А. Г. Свешников // Вычисл. методы и программирования. – 1971. – Вып. 16. – С. 66–71.
9. *Ильинский А. С.* Численное решение задачи дифракции на неоднородном ограниченном теле / А. С. Ильинский, А. Л. Павлов, А. Г. Свешников // Там же. – С. 116–124.
10. *Chang Shu-Kong.* Application of the unimoment method to electromagnetic scattering of dielectric cylinders/ Chang Shu-Kong, K. K. Mei // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 1976. – 24, N 1. – P. 35–42.
11. *Воронцов А. А.* О дифракции плоской волны на многослойном диэлектрическом цилиндре / А. А. Воронцов, С. Д. Мировицкая // Радиотехника и электрон. – 1986. – 31, № 12. – С. 2330–2334.
12. *Котляр В. В.* Дифракция плоской электромагнитной волны на градиентном оптическом элементе с поперечной цилиндрической симметрией / В. В. Котляр, М. А. Личманов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – Самара: ПГАТИ, 2002. – 5, № 4. – С. 37–43.
13. *Котляр В. В.* Анализ дифракции электромагнитной волны на бесконечном круглом цилиндре с несколькими однородными слоями / В. В. Котляр, М. А. Личманов // Компьютерная оптика. – 2002. – № 24. – С. 26–32.
14. *Котляр В. В.* Дифракция плоской электромагнитной волны на градиентном диэлектрическом цилиндре / В. В. Котляр, М. А. Личманов // Там же. – 2003. – № 25. – С. 11–15.
15. *Азаренков Н. А.* Рассеяние электромагнитных волн на неоднородном плазменном цилиндре / Н. А. Азаренков, В. К. Галайдыч, А. Н. Кондратенко // Укр. физ. журн. – 1990. – 35, № 10. – С. 1513–1517.
16. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
17. *Бровенко А. В.* Численный алгоритм для расчета спектральных характеристик двумерного открытого резонатора с неоднородными диэлектрическими включениями / А. В. Бровенко // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 1. – С. 51–54.
18. *Быков А. А.* Применение неполного метода Галеркина для решения задач дифракции электромагнитных волн на неоднородном цилиндре / А. А. Быков, А. Г. Свешников, М. К. Трубецков // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1990. – 30, № 6. – С. 894–909.
19. *Ильинский А. С.* Математические модели электродинамики / А. С. Ильинский, В. В. Кравцов, А. Г. Свешников. – М.: Высш. школа, 1991. – 224 с.
20. *Ильинский А. С.* Численный метод решения задач дифракции на неоднородном диэлектрическом цилиндре и его обоснование / А. С. Ильинский, Л. М. Некрасов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1995. – 35, № 1. – С. 53–70.
21. *Свешников А. Г.* Неполный метод Галеркина / А. Г. Свешников // Докл. АН СССР. – 1977. – 236, № 6. – С. 1076–1079.
22. *Поединчук А. Е.* Дифракция волн в локально – неоднородной среде / А. Е. Поединчук, Ю. А. Тучкин, В. П. Шестопалов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1996. – 36, № 7. – С. 135–149.
23. *Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. Аналитическая регуляризация краевых задач электродинамики / В. П. Шестопалов, Ю. А. Тучкин, А. Е. Поединчук, Ю. К. Сиренко. – Х.: Основа, 1997. – 285 с.*
24. *Численно-аналитический метод решения задач дифракции волн на слоисто-неоднородных средах / А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, С. Б. Панин, А. Е. Поединчук // Физические основы приборостроения. – 2013. – 2, № 1. – С. 34–47.*
25. *Бровенко А. В.* Спектральные задачи в теории дифракции волн на слоисто-неоднородных средах / А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук // Радиофизика и электрон. – 2013. – 4(18), № 1. – С. 6–14.
26. *Дифракция волн на ленточной решетке, расположенной на границе слоисто-неоднородной среды: метод аналитической регуляризации / А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, С. Б. Панин, А. Е. Поединчук // Изв. вузов. Радиофизика. – 2013. – 56, № 4. – С. 265–276.*
27. *Бровенко А. В.* Численно-аналитический метод решения задач дифракции электромагнитных волн на неоднородных анизотропных слоях / А. В. Бровенко, А. Е. Поединчук, П. Н. Мележик // Радиофизика и электрон. – 2014. – 5(19), № 4. – С. 12–20.
28. *Крылов В. И.* Вычислительные методы: в 2 т. Т. 1 / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

Рукопись поступила 03.11.2016.

A. V. Brovenko, P. N. Melezhhik,
S. B. Panin, A. Ye. Poyedinchuk

THE ANALYTICAL-NUMERICAL METHOD OF SOLVING THE PROBLEMS OF ELECTROMAGNETIC WAVES DIFFRACTION BY CIRCULAR RADIALLY INHOMOGENEOUS MAGNETODIELECTRIC CYLINDERS

We suggest an analytical-numerical method for determining the diffraction characteristics of the plane linearly polarized electromagnetic wave scattered by a circular inhomogeneous isotropic magnetodielectric cylinder, which material parameters depend on the radial coordinate. The method is based on the construction of special solutions to Cauchy problem for Riccati equation and allows within a unified approach to investigate the processes of wave diffraction by both radially layered and continuous magnetodielectric cylindrical inhomogeneities. The efficiency of the proposed method was demonstrated by several examples of numerical solution of diffraction problems for circular non-uniform isotropic dielectric cylinders. We studied the total cross section of Luneberg lens for a number of focal parameters and the behavior of its field longitudinal component at resonant frequency when geometrical parameters vary.

Key words: circular isotropic heterogeneous magnetodielectric cylinder, wave diffraction, Riccati equation, analytical-numerical method, Luneberg lens, total cross section.

А. В. Бровенко, П. М. Мележик,
С. Б. Панін, А. Ю. Поєдинчук

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦІЇ
ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА КРУГОВИХ
РАДІАЛЬНО НЕОДНОРІДНИХ
МАГНІТОДІЕЛЕКТРИЧНИХ ЦИЛІНДРАХ

Запропоновано чисельно-аналітичний метод для визначення дифракційних характеристик плоскої лінійно-поляризованої електромагнітної хвилі, що падає на круговий

неоднорідний ізотропний магнітодіелектричний циліндр, матеріальні параметри якого залежать від радіальної координати. Метод ґрунтується на побудові спеціальних розв'язків задачі Коші для рівняння Ріккати та дає можливість у рамках єдиного підходу проводити дослідження процесів дифракції хвиль як у радіально-шаруватих, так і у неперервних магнітодіелектричних циліндричних неоднорідностях. Ефективність запропонованого методу продемонстровано на низці прикладів числового розв'язання задачі дифракції на кругових неоднорідних ізотропних діелектричних циліндрах. Досліджено для деяких фокальних параметрів повний переріз розсіяння лінзи Люнеберга та поведінку її поздовжньої компоненти поля на одній із резонансних частот зі зміною геометричних параметрів.

Ключові слова: круговий неоднорідний ізотропний магнітодіелектричний циліндр, дифракція хвиль, рівняння Ріккати, чисельно-аналітичний метод, лінза Люнеберга, повний переріз розсіяння.