

ISSN 1028-821X. Radiofiz. Electron. 2019. Vol. 24, No. 1: 47–57

DOI: <https://10.15407/rej2019.01.047>

УДК 519.217.2; 537.312.62

PACS: 05.40.-a, 02.50.Ga, 87.10.+e

**В. Е. Векслерчик, С. С. Мельник, Г. М. Притула, О. В. Усатенко**

Институт радиопластики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Акад. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

E-mail: [usatenko@ire.kharkov.ua](mailto:usatenko@ire.kharkov.ua)

## Корреляционные функции линейных аддитивных марковских цепей высших порядков

**Предмет и цель работы.** Задача конструирования различных радиотехнических устройств, таких как фильтры, линии задержки, антенны с заданной диаграммой направленности, требует разработки методов генерации случайных последовательностей (значений параметров этих систем), обладающих заданными корреляционными свойствами, поскольку спектральные характеристики перечисленных и аналогичных им систем выражаются через фурье-компоненты корреляторов. Целью данной работы является представление функции переходной вероятности случайных последовательностей с дальними корреляциями в виде, удобном для численной генерации последовательностей, и изучение статистических свойств последних.

**Методы и методология работы.** Адекватным математическим аппаратом для решения такого рода задач являются цепи Маркова высших порядков. Статистические характеристики этих объектов определяются их функцией переходной вероятности, которая в общем случае может иметь весьма сложный вид. В настоящей работе функция переходной вероятности полагается аддитивной и линейной относительно значений случайной величины. Предполагается, что пространство состояний последовательности принадлежит множеству вещественных чисел.

**Результаты работы.** Выведены и аналитически решены уравнения, связывающие корреляционные функции случайной последовательности с весовыми коэффициентами функции памяти, определяемыми, в свою очередь, функцией переходной вероятности.

**Заключение.** Показано, что корреляционные функции аддитивной марковской цепи полностью определяются дисперсией случайной величины и весовыми коэффициентами функции памяти. Продемонстрировано совпадение полученных аналитических результатов с результатами численной реализации аддитивной марковской последовательности. Приведены примеры возможных корреляционных сценариев в аддитивных линейных цепях высших порядков. Ил. 10. Библиогр.: 21 назв.

**Ключевые слова:** марковские последовательности, линейные аддитивные марковские цепи высших порядков, функция.

Статистические методы давно и успешно вошли в радиопластику и радиотехнику. Сейчас они используются не только как основа для генерации, анализа и обработки сигналов, но и как средство для проектирования, моделирования и оптимизации радиоэлектронных устройств и систем [1]. Среди примеров такого рода систем можно упомянуть радиочастотные фильтры, линии задержки, дифракционные излучатели, фазированные антенные решетки (антенны с заданной диаграммой направленности)

[2, 3]. Использование статистических методов при проектировании устройств возможно, когда в основе их структуры имеются случайные компоненты, например, неэквидистантно расположенные излучающие элементы антенны, которые могут быть случайными как статически, так и динамически. При конструировании стохастических систем с заданными спектральными свойствами может использоваться метод подгонки, когда случайно выбирается один из элементов системы и посредством изменения

его характеристик подбираются те их значения, которые наилучшим образом удовлетворяют критерию построения системы. Такой метод является чрезвычайно трудоемким с точки зрения компьютерных вычислений для систем с числом случайных элементов, измеряемым сотнями, и становится вовсе неприменимым, если число элементов существенно превышает несколько сотен. Как раз в этом случае начинают хорошо работать статистические методы.

В арсенале статистических методов радиофизики модель марковского процесса является одной из наиболее широко используемых. В классе марковских процессов выделяют процессы с дискретным временем, которые в зависимости от непрерывности или дискретности множества значений случайной функции называют соответственно марковскими последовательностями или марковскими цепями. В последние годы марковские цепи и последовательности, в результате значительного увеличения вычислительных мощностей и в связи с проблемами анализа больших данных и развитием методов машинного обучения, переживают буквально всплеск популярности в самых разнообразных областях науки и приложениях: в информатике и лингвистике, физике и химии, биологии и медицине, в экономике и финансах, в социальных науках и многих других сферах человеческой деятельности [4–8].

В связи с усложнением возникающих задач очень часто уже недостаточно простого свойства марковости, когда условное распределение последующего состояния цепи зависит только от текущего состояния, и следует учитывать зависимость последующего состояния от  $N$  предыдущих состояний цепи. В этом случае говорят о модели марковской цепи высшего,  $N$ -го порядка. Для цепей высшего порядка получение точных аналитических результатов и проведение экономных численных расчетов становится практически невозможным и приходится прибегать к построению специальных моделей, таких как, например, модель распределенных смешанных переходов [9, 10] и близкая к ней модель линейного аддитивного марковского процесса [11], модель аддитивной марковской цепи [12].

В работе [12] для описания корреляционных свойств сложных динамических систем с

дальними корреляциями была предложена модель линейной аддитивной дихотомической марковской цепи  $N$ -го порядка, в которой вводится аналитическая связь между так называемой функцией памяти последовательности и ее корреляционными функциями. Позже эта модель была расширена также на символьные последовательности (см., например, [13–17]). Настоящая работа предлагает обобщение этой модели линейной аддитивной марковской цепи  $N$ -го порядка на числовые марковские последовательности.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 1 мы приводим основные определения, в разд. 2 выводим уравнение, связывающее бинарный коррелятор с функцией памяти числовой марковской последовательности  $N$ -го порядка. В разд. 3 получаем решения уравнения для коррелятора цепи в случае, когда расстояние между узлами меньше глубины памяти цепи. Эти решения играют роль своего рода начальных условий при решении уравнения для корреляционной функции на расстояниях, больших глубины памяти (см. разд. 4). Раздел 5 посвящен решению уравнений для последовательностей первого и второго порядков. В разд. 6 приведены результаты численного построения последовательности второго порядка и их сравнение с аналитическими решениями. Раздел 7 посвящен примерам возможных корреляционных сценариев в линейных аддитивных цепях высших порядков.

**1. Аддитивная марковская цепь: основные определения.** Рассмотрим последовательность случайных величин  $X_n$ ,  $n \in Z$ , пространство состояний которых (область значений, принимаемых случайной величиной) представляет собой некоторое конечное множество вещественных чисел  $W$ . Для однородной последовательности  $N$ -го порядка вероятность того, что  $n$ -й член последовательности  $X_n$  принимает значение  $\xi_n$ , зависит от конкретной реализации предыдущих  $N$  членов, что выражается функцией условной (часто называемой переходной) вероятности  $P(X_n = \xi_n | X_{n-1} = \xi_{n-1}, \dots, X_{n-N} = \xi_{n-N})$  и не зависит от номера узла  $n$  [18]. В модели линейной аддитивной марковской цепи [12–17] функция условной вероятности (ФУВ) предполагается линейной относительно значений

переменной величины:

$$P(X_n = \xi_n | X_{n-1} = \xi_{n-1}; \dots; X_{n-N} = \xi_{n-N}) = f_0(\xi_n) + \sum_{m=1}^N f_m(\xi_n) \xi_{n-m}. \quad (1)$$

Условия, которым подчиняется ФУВ, приводят к ограничениям на значения весовых коэффициентов  $f_m(\xi)$ ,  $m = 0, \dots, N$ . Во-первых, значение ФУВ должно принадлежать интервалу  $(0, 1)$  для любой реализации предыдущих  $N$  членов цепи. Достаточным, но не необходимым, условием для этого является, например, выполнение неравенств

$$\begin{aligned} 0 < f_0 \leq 1 / (N + 1), \\ 0 < f_m \leq 1 / \max|\xi| (N + 1), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\max|\xi|$  – максимальное значение, принимаемое случайной величиной  $X$ . Несмотря на определяемую такими ограничениями малость корреляций, длина корреляций может быть большой. Последний факт может быть решающим в понимании физических процессов и конструировании систем.

Во-вторых, поскольку вероятность того, что случайная величина  $X_n$  примет любое значение из пространства состояний  $\Omega$ , равна 1, то для ФУВ при  $\forall \xi_{n-1} \dots \xi_{n-N}$  справедливо равенство

$$\sum_{\xi_n \in \Omega} P(X_n = \xi_n | X_{n-1} = \xi_{n-1}; \dots; X_{n-N} = \xi_{n-N}) = 1 \quad (3)$$

и, следовательно, функции  $f_m(\xi_n)$  должны подчиняться следующим условиям:

$$\sum_{\xi_n \in \Omega} f_0(\xi_n) = 1, \quad \sum_{\xi_n \in \Omega} f_m(\xi_n) = 0 \quad (m = 1, \dots, N). \quad (4)$$

Одноточечная функция вероятности  $P(X_n = \xi_n)$  может быть выражена через ФУВ:

$$\begin{aligned} P(X_n = \xi_n) = \\ = \sum_{\xi_{n-1}, \dots, \xi_{n-N} \in \Omega} P(X_{n-1} = \xi_{n-1}; \dots; X_{n-N} = \xi_{n-N}) \times \\ \times P(X_n = \xi_n | X_{n-1} = \xi_{n-1}; \dots; X_{n-N} = \xi_{n-N}), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $P(X_{n-1} = \xi_{n-1}; \dots; X_{n-N} = \xi_{n-N})$  – совместная вероятность, т. е. вероятность совместной реализации случайных величин в соответствующих узлах; суммирование производится по

всем возможным значениям из множества  $W$ . Подставив сюда выражение (1), получим

$$P(X_n = \xi_n) = f_0(\xi_n) + \langle X \rangle \sum_{m=1}^N f_m(\xi_n), \quad (6)$$

где среднее значение случайной величины определено как

$$\langle X \rangle = \sum_{\xi_n \in \Omega} P(X_n = \xi_n) \xi_n. \quad (7)$$

Выражение (6) вместе с условиями (4) позволяет заключить, что функция  $f_0(\xi_n)$  представляет собой вероятность  $p(\xi_n)$  появления значения  $\xi_n$  в цепи в отсутствие корреляций, а второй член в правой части формулы (6) описывает вклад предыдущих  $N$  членов последовательности. Заметим, что с помощью выражений (6) и (7) ФУВ (1) можно также представить в виде

$$\begin{aligned} P(X_n = \xi_n | X_{n-1} = \xi_{n-1}; \dots; X_{n-N} = \xi_{n-N}) = \\ = P(X_n = \xi_n) + \sum_{m=1}^N f_m(\xi_n) (\xi_{n-m} - \langle X \rangle). \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, что при  $\langle X \rangle = 0$  выражения (1) и (8) совпадают, а  $P(X_n = \xi_n) = p(\xi_n)$ .

## 2. Вывод уравнения для коррелятора.

Объектом нашего интереса являются корреляторы второго порядка:

$$C(r) = Q(r) - \langle X \rangle^2, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} Q(r) = \langle X_n X_{n+r} \rangle = \\ = \sum_{\xi_n, \dots, \xi_{n+r}} \xi_n P(X_n = \xi_n; \dots; X_{n+r} = \xi_{n+r}) \xi_{n+r}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тот факт, что коррелятор зависит не от номеров узлов, а только от расстояния между ними, является следствием однородности цепи. Отметим также, что ввиду симметрии пространства корреляционная функция  $C(r)$  является четной:  $C(-r) = C(r)$ .

Представляя на основании теоремы умножения вероятностей совместную вероятность в формуле (10) в виде произведения

$$\begin{aligned} P(X_n = \xi_n; \dots; X_{n+r} = \xi_{n+r}) = \\ = P(X_n = \xi_n; \dots; X_{n+r-1} = \xi_{n+r-1}) \times \\ \times P(X_{n+r} = \xi_{n+r} | X_n = \xi_n; \dots; X_{n+r-1} = \xi_{n+r-1}). \end{aligned}$$

и подставляя сюда аддитивную ФУВ (1), получим

$$\begin{aligned}
 Q(r) &= \\
 &= \sum_{\xi_n, \dots, \xi_{n+r-1}} \xi_n P(X_n = \xi_n; \dots; X_{n+r-1} = \xi_{n+r-1}) \times \\
 &\times \sum_{\xi_{n+r}} \xi_{n+r} \left[ f_0(\xi_{n+r}) + \sum_{m=1}^M f_m(\xi_{n+r}) \xi_{n+r-m} \right] = \quad (11) \\
 &= \sum_{\xi_n, \dots, \xi_{n+r-1}} \xi_n P(X_n = \xi_n; \dots; X_{n+r-1} = \xi_{n+r-1}) \times \\
 &\times \left[ F_0 + \sum_{m=1}^N F_m \xi_{n+r-m} \right],
 \end{aligned}$$

где

$$F_\mu = \sum_{\xi_i \in \Omega} \xi_i f_\mu(\xi_i) \quad (\mu = 0, 1, \dots, N). \quad (12)$$

С учетом определений (7) и (10) выражение для  $Q(r)$  имеет вид

$$Q(r) = F_0 \langle X \rangle + \sum_{m=1}^N F_m Q(r-m). \quad (13)$$

Поскольку из равенств (6) и (7) следует, что

$$\langle X \rangle = F_0 + \langle X \rangle \sum_{m=1}^N F_m, \quad (14)$$

в (13) можем исключить  $F_0$ , что приводит к выражению для  $Q(r)$  в терминах  $F_m$  ( $m = 1, \dots, N$ ),

$$Q(r) = \langle X \rangle^2 \left[ 1 - \sum_{m=1}^N F_m \right] + \sum_{m=1}^N F_m Q(r-m). \quad (15)$$

Из выражения (9) следует, что для коррелятора  $C(r)$  получается следующее уравнение, совпадающее с полученным в [12] для дихотомической цепи:

$$C(r) = \sum_{m=1}^N F_m C(r-m), \quad r \geq N, \quad (16)$$

где  $F_m$  – компоненты функции памяти, введенной в [12].

Уравнение (16) при расстояниях  $r$  между узлами цепи, превышающих глубину памяти  $N$ ,  $r \geq N$ , является однородным разностным уравнением с постоянными коэффициентами, и его решения могут быть найдены стандарт-

ными методами. Описание получения этих решений мы приведем ниже в разд. 4, а сейчас обратимся к рассмотрению уравнения, описывающего корреляции на расстояниях, меньших глубины памяти цепи.

**3. Решение уравнения для коррелятора при  $1 \leq r \leq N-1$  (начальные условия).** В случае, когда расстояние между элементами цепи  $r$  меньше, чем глубина памяти  $N$ ,  $1 \leq r \leq N-1$ , уравнение (16) в силу свойства четности корреляционной функции приобретает следующий вид:

$$C(r) = \sum_{m=1}^N F_m C(|r-m|), \quad 1 \leq r \leq N-1. \quad (17)$$

Несмотря на внешнее сходство уравнений (16) и (17), их структура отличается существенным образом. Дело в том, что величина  $C(0)$  может быть явным образом выражена через параметры  $f_\mu$  ( $\mu = 0, 1, \dots, N$ ) модели (1). Повторяя выкладки, аналогичные тем, которые приводят к формуле (14), можем получить следующее выражение для  $C(0)$ :

$$\begin{aligned}
 C(0) &= \\
 &= \sum_{\xi_i} \left[ f_0(\xi_i) + \langle X \rangle \sum_{m=1}^N f_m(\xi_i) \right] [\xi_i - \langle X \rangle]^2. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Уравнения (17) представляют собой замкнутую систему  $N-1$  неоднородных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, которая определяет корреляторы  $C(1), \dots, C(N-1)$  как функции  $C(0)$  и  $F_1, \dots, F_N$ :

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} C(1) \\ \vdots \\ C(N-1) \end{pmatrix} = -C(0) \begin{pmatrix} F_{N-1} \\ \vdots \\ F_1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где матрица  $\mathbf{H}$  может быть представлена в виде суммы матрицы Ганкеля  $\mathbf{F}^{(1)}$  и матрицы Тёплица  $\mathbf{F}^{(2)}$ ,

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}^{(1)} + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (20)$$

элементы которых соответственно равны

$$F_{ij}^{(1)} = \begin{cases} F_{N-i-j}, & i+j < N, \\ -1, & i+j = N, \\ 0, & i+j > N, \end{cases} \quad (20a)$$

и

$$F_{ij}^{(2)} = \begin{cases} F_{N-i+j}, & i \geq j, \\ 0, & i < j. \end{cases} \quad (206)$$

В общем случае при произвольных  $N$  решения системы уравнений (17) будут иметь вид

$$C(s) = \Gamma_s(F_1, \dots, F_N)C(0), \quad s = 1, \dots, N-1, \quad (21)$$

с однозначно определенными константами  $\Gamma_s(F_1, \dots, F_N)$ .

В случае  $N = 2$  система уравнений (17) сводится к одному уравнению

$$C(1) = F_1C(0) + F_2C(1) \quad (22)$$

и, соответственно,

$$\Gamma_1(F_1, F_2) = \frac{F_1}{1 - F_2}. \quad (23)$$

При глубине памяти  $N = 3$  будем иметь следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} -F_1 - F_3 & 1 \\ 1 - F_2 & -F_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(1) \\ C(2) \end{pmatrix} = C(0) \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

однозначными решениями которой являются корреляторы  $C(1), C(2)$ , см. формулы (19) и (21), в которых соответствующие константы равны

$$\begin{aligned} \Gamma_1(F_1, F_2, F_3) &= \frac{F_1 + F_2F_3}{\Delta}, \\ \Gamma_2(F_1, F_2, F_3) &= \frac{F_1^2 + F_1F_3 + F_2 - F_2^2}{\Delta}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\Delta = 1 - F_2 - (F_1 + F_3)F_3$ .

Таким образом, задача об определении коррелятора аддитивной марковской цепи порядка  $N$  при заданной функции памяти свелась к задаче Коши для разностного уравнения (16)  $N$ -го порядка с начальными условиями (21).

**4. Решение уравнения для коррелятора при  $r \geq N$ .** Уравнение (16) является линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами. Его частное решение имеет вид

$$C_{part}(r) = \lambda^r, \quad (26)$$

где  $\lambda$  представляет собой корень характеристического полинома

$$\lambda^N = \sum_{m=1}^N F_m \lambda^{N-m}. \quad (27)$$

Полином степени  $N$  имеет  $N$  корней  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ ; линейная комбинация соответствующих им частных решений будет общим решением уравнения (16):

$$C(r) = \sum_{j=1}^N \gamma_j \lambda_j^r. \quad (28)$$

Входящие в решение (28) константы определяются из начальных условий (21), что дает

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} = C(0) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \vdots \\ \Gamma_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где  $\Gamma_s = \Gamma_s(F_1, \dots, F_N)$  для  $s = 1, \dots, N-1$  и  $\Gamma_0 = 1$ . Таким образом, корреляционные функции аддитивной марковской цепи полностью определяются дисперсией случайной величины  $C(0) = \sigma^2$  и коэффициентами функции памяти  $F_m$ .

Естественное условие исчезновения корреляций при  $r \rightarrow \infty$  приводит к ограничениям, которым должны подчиняться коэффициенты  $F_m$ . Из решения (28) видно, что для выполнения условия исчезновения корреляций все корни  $\lambda_j$  характеристического полинома должны находиться на комплексной плоскости внутри окружности  $|\lambda| < 1$ .

Задача о распределении корней полинома относительно единичной окружности часто возникает при решении многих прикладных проблем, например, автоматического управления, цифровой обработки сигналов, идентификации систем.

Для решения этой задачи имеются различные методы и алгоритмы, наиболее известными из которых являются тесты Шура–Кона, Джури, Быстрица и их разнообразные модификации [19, 20].

**5. Решение уравнения для коррелятора аддитивных марковских цепей первого и второго порядков.** Для цепей первого и второго порядков уравнения (27) и (29) имеют простые решения, и общее решение (28) можно легко получить в явном виде.

Для цепи первого порядка уравнение (16) приобретает вид  $C(r) = F_1C(r-1)$ . Оно решается элементарно, и его решением, удовлетворяющим условию четности для коррелятора,

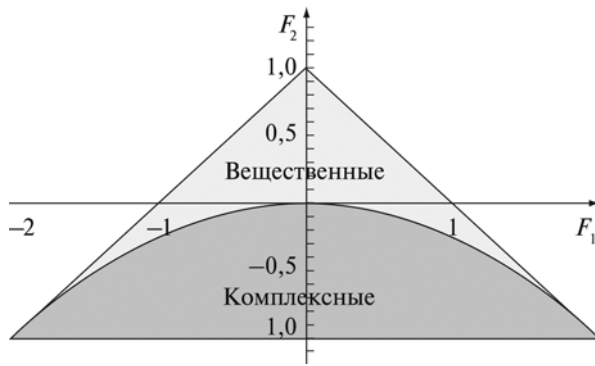


Рис. 1. Область значений коэффициентов функции памяти, для которых выполняется условие  $C(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  (когда нули характеристического полинома  $p_2$  находятся на комплексной плоскости внутри окружности  $|\lambda| < 1$ )

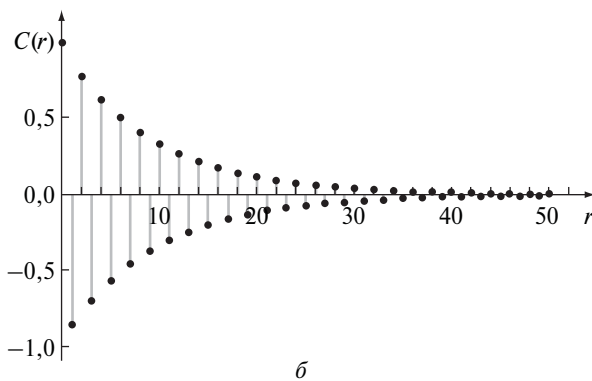
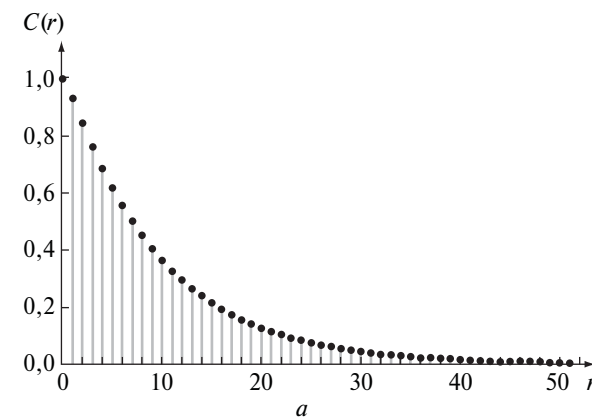


Рис. 2. Корреляционная функция  $C(r)$  последовательности второго порядка с коэффициентами функции памяти, соответствующими вещественным  $\lambda_{1,2}$ : а -  $F_1 = 1,1$ ;  $F_2 = -0,18$ ;  $\lambda_1 = 0,9$ ;  $\lambda_2 = 0,2$ ; б -  $F_1 = -0,7$ ;  $F_2 = 0,18$ ;  $\lambda_1 = -0,9$ ;  $\lambda_2 = 0,2$  (в этом случае есть персистентные и антиперсистентные корреляции)

является функция

$$C(r) = C(0)F_1^{|r|}, \quad (30)$$

затухающая при  $|F_1| < 1$ .

В случае цепи второго порядка,  $N = 2$ , можно показать, что необходимым и достаточным

условием того, что корни характеристического полинома второго порядка  $p_2 = \lambda^2 - F_1\lambda - F_2$ , см. выражение (27) при  $N = 2$ , находятся внутри единичной окружности на комплексной плоскости, является выполнение условия  $|F_1| < 1 - F_2 < 2$ , т. е. коэффициенты полинома принимают значения из области, очерченной треугольником, изображенным на рис. 1. При значениях  $F_2 \geq -(F_1^2 / 4)$  корни вещественны, в противном случае они комплексные и сопряженные.

Решение (28) для цепи второго порядка при  $r \geq 2$  имеет вид

$$C(r) = \gamma_1 \lambda_1^r + \gamma_2 \lambda_2^r, \quad (31)$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{F_1}{2} \pm \sqrt{\frac{F_1^2}{4} + F_2}, \quad (32)$$

и константы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  равны

$$\gamma_1 = C(0) \frac{\lambda_2 - \Gamma_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \gamma_2 = C(0) \frac{\Gamma_1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (33)$$

Величина  $\Gamma_1$  определена полученным выше выражением (23).

При  $F_2 \geq -(F_1^2 / 4)$  (рис. 1) подкоренное выражение в (32) отрицательно и корни  $\lambda_{1,2}$  являются комплексно сопряженными:  $\lambda_{1,2} = \rho \exp(\pm i\phi)$ . В этом случае выражение для коррелятора после простых преобразований приобретает следующий вид:

$$C(r) = C(0) \rho^{r-1} \csc \phi \times \times [\Gamma_1 \sin \phi r - \rho \sin \phi (r - 1)]. \quad (34)$$

Корреляционные функции  $C(r)$  для функций памяти из разных областей значений коэффициентов памяти  $F_1$  и  $F_2$  представлены на рис. 2 и 3.

В случае линейной аддитивной марковской цепи третьего порядка,  $N = 3$ , для того, чтобы корни кубического характеристического полинома  $p_3 = \lambda^3 - F_1\lambda^2 - F_2\lambda - F_3$ , см. выражение (27), находились внутри единичной окружности на комплексной плоскости, необходимо и достаточно выполнение следующих условий [21]:

$$\begin{aligned} |F_1 + F_3| < 1 - F_2, \quad |F_1 - 3F_3| < 3 + F_2, \\ F_3^2 - F_2 - F_1F_3 < 1. \end{aligned} \quad (35)$$

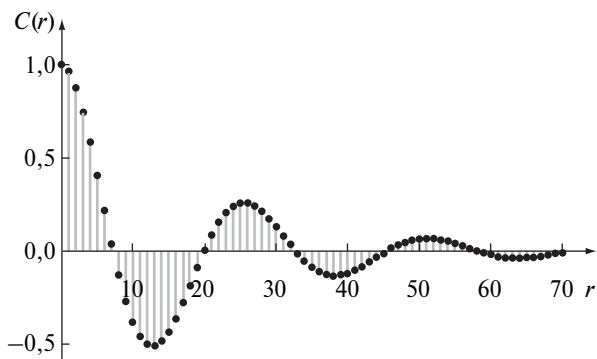


Рис. 3. Корреляционная функция  $C(r)$  с коэффициентами функции памяти, соответствующими комплексным  $\lambda_{1,2}$ :  $F_1 = 1,84$ ;  $F_2 = -0,9$ ;  $\lambda_{1,2} = 0,95 \exp(\pm i\pi / 12)$

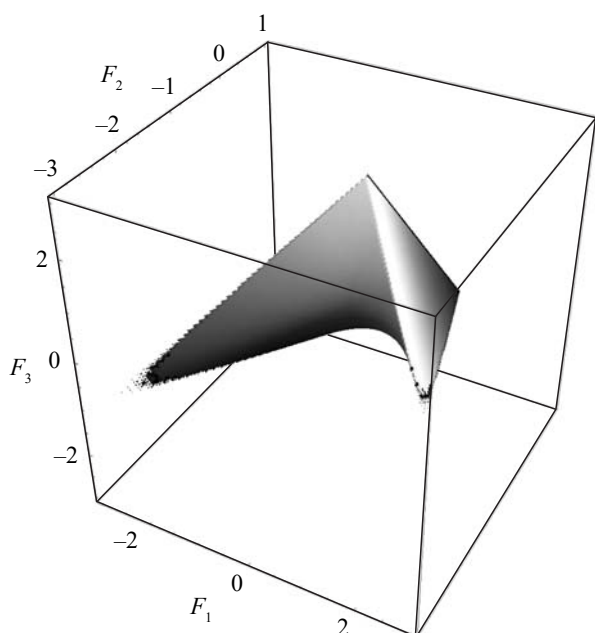


Рис. 4. Область значений коэффициентов функции памяти, для которых выполняется условие  $C(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  (когда нули характеристического полинома  $p_3$  находятся на комплексной плоскости внутри единичной окружности)

Соответствующая область допустимых значений функции памяти изображена на рис. 4.

Характеристическое уравнение третьей степени может иметь либо три вещественных корня, либо один вещественный и два комплексно сопряженных. Решения для этого случая здесь не приводятся в виду их громоздкости. Графики зависимости корреляционной функции от расстояния между узлами цепи подобны представленным на рис. 2 и 3.

**6. Численное построение последовательности второго порядка.** Продемонстрируем

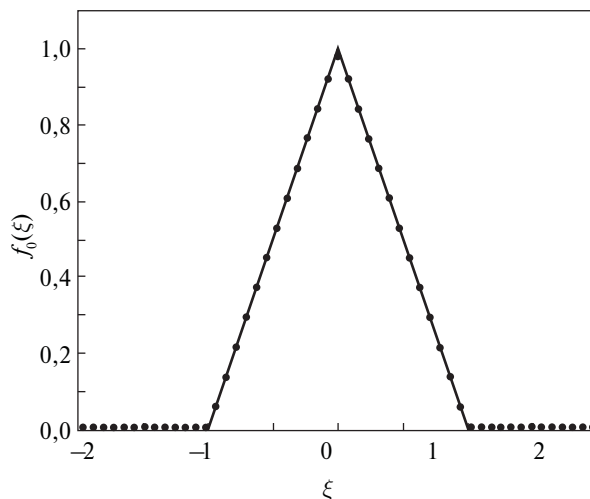


Рис. 5. Одноточечная функция распределения  $f_0(\xi)$  симметричной треугольной формы

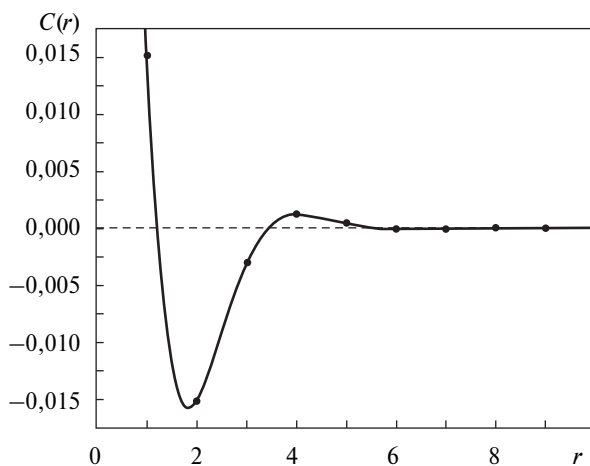


Рис. 6. Сравнение численных (точки) и аналитических (линия) результатов  $C(r)$  для аддитивной коррелированной марковской последовательности второго порядка с симметричным одноточечным распределением вероятности

результаты предыдущего раздела на примере численной генерации последовательности с глубиной памяти  $N = 2$ .

Одноточечную функцию распределения выберем симметричной треугольной формы (рис. 5):

$$f_0(\xi) = \begin{cases} 1 - |\xi|, & |\xi| < 1, \\ 0, & |\xi| \geq 1. \end{cases}$$

Такая плотность вероятности соответствует нулевому среднему значению случайной величины  $\langle X \rangle = 0$  и дисперсии  $C(0) = \sigma^2 = 1/6$ .

Значения двухшаговой функции памяти выбираем равными

$$F_1 = 0,1; F_2 = -0,1.$$

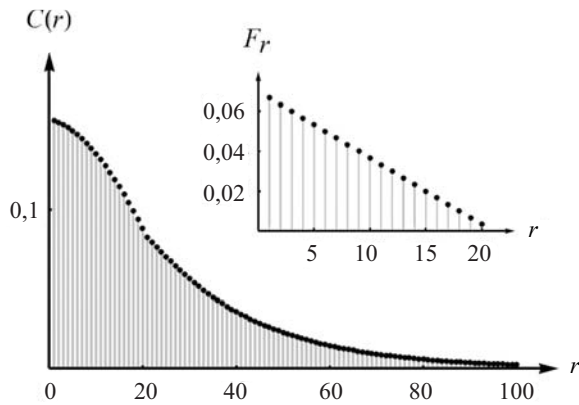


Рис. 7. Линейная функции памяти:

$$F_r = \begin{cases} 0,07[1-r/(N+1)], & r \leq 20, \\ 0, & r > 20 \end{cases}$$

Для генерации осталось задать функции  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\xi)$ , входящие в функцию условной вероятности (1). Из выражения (12) следует, что имеется широкая свобода выбора этих функций, обеспечивающих заданные значения  $F_1$  и  $F_2$ . Однако их форма должна быть такой, чтобы выражение (1) давало положительный результат для любого  $\xi \in (-1; 1)$  и любой комбинации двух предшествующих значений  $\xi_{1,2} \in (-1; 1)$ . Отсюда следует, в частности, что для таких значений  $\xi$ , при которых  $f_0(\xi)$  близко к нулю (в нашем случае это значения  $\xi$ , близкие к  $\pm 1$ ), значение  $f_\mu(\xi)$  также должно быть (по модулю) близко к нулю. Простейший вариант обеспечения этого условия – задать  $f_\mu(\xi)$  пропорциональными  $f_0(\xi)$ , но нечетными, для обеспечения условий нормировки (4):

$$f_\mu(\xi) = a_\mu \begin{cases} f_0(\xi), & \xi \geq 0, \\ -f_0(\xi), & \xi < 0, \end{cases}$$

а коэффициент  $a_\mu$  тогда определяется из условия (12) обеспечения требуемой  $F_\mu$ . В рассматриваемом случае треугольной одноточечной функции распределения это приводит к выражению

$$a_\mu = 3F_\mu.$$

Подставляя теперь требуемые значения  $F_1$  и  $F_2$ , получаем функцию условной вероятности (1) и с ее помощью генерируем числовую последовательность. После построения последовательности численно рассчитываем коррелятор. На рис. 6 (см. стр. 53) точками показаны полученные значения  $C(r)$ . Сплошная линия

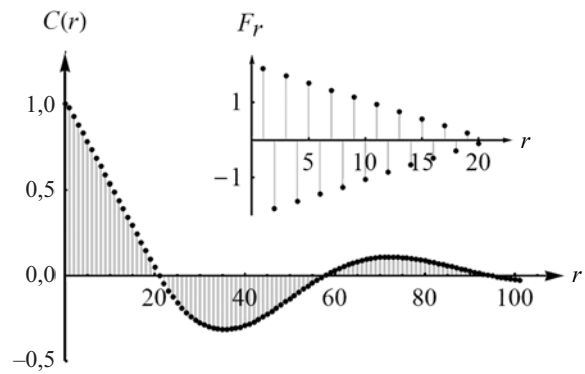


Рис. 8. Знакопеременная функция памяти с линейным

убыванием:  $F_r = \begin{cases} 2(-1)^{(r-1)}[1-r/(N+1)], & r \leq 20, \\ 0, & r > 20 \end{cases}$

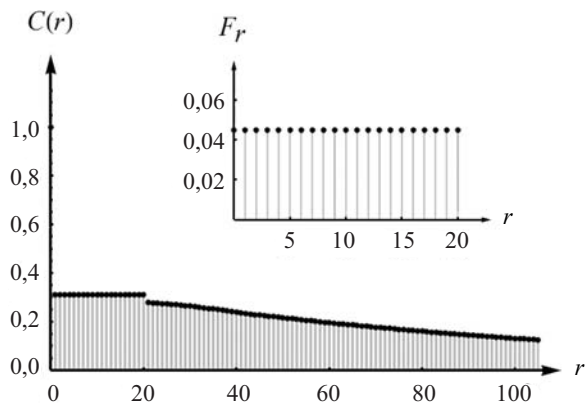


Рис. 9. Ступенчатая функции памяти (см. также [16]):

$$F_r = \begin{cases} 0,045, & r \leq 20, \\ 0, & r > 20 \end{cases}$$

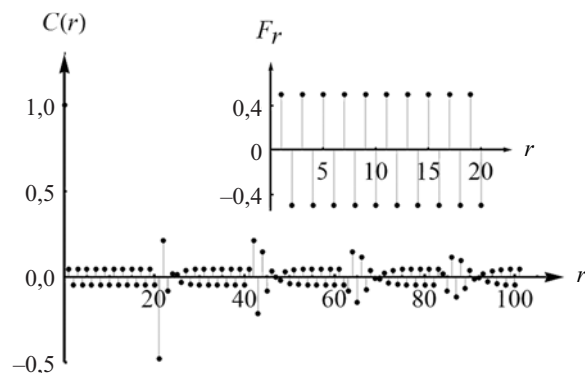


Рис. 10. Ступенчатая знакопеременная функции памяти:

$$F_r = \begin{cases} 0,05(-1)^{(r-1)}, & r \leq 20, \\ 0, & r > 20 \end{cases}$$

соответствует аналитическому расчету коррелятора по формулам (31)–(34). Очевидно, что результаты численного моделирования коррелятора



лированной последовательности совпадают с полученными аналитическим путем.

**7. Примеры корреляций в линейных марковских цепях высших порядков.** Ниже для иллюстрации возможных сценариев корреляций в линейных марковских цепях высших порядков мы приводим графики корреляционных функций, являющихся решениями (28), (29) уравнения (16) для линейных марковских цепей порядка  $N = 20$  при различных значениях коэффициентов функции памяти. На рис. 7–10 представлены зависимости корреляционных функций  $C(r)$  от расстояния  $r$  между элементами цепи, соответствующие различным функциям памяти. Вид функций памяти  $F_r$  изображен на врезках.

В работе [16] подробно рассмотрен случай ступенчатой функции памяти для аддитивной дихотомической цепи, получены аналитические решения уравнения для корреляционной функции. В этом особом случае результаты для рассматриваемой в настоящей работе числовой цепи совпадают с полученными в работе [16].

**Выводы.** В работе изучен специальный класс однородных линейных аддитивных марковских цепей  $N$ -го порядка с пространством состояний, принадлежащим конечному множеству вещественных чисел. Получены уравнения, связывающие корреляционные функции с коэффициентами функции памяти последовательности. Последние являются проявлением независимых аддитивных вкладов каждого из предыдущих  $N$  узлов последовательности в вероятность появления в узле  $N + 1$  значения случайной величины  $X_{N+1} = \xi_{n+1}$  и определяются функцией переходной вероятности. Найдено общее решение уравнения для корреляционных функций такой аддитивной линейной последовательности, и приведены возможные зависимости корреляторов от расстояния между узлами. Проведено сравнение полученных аналитических результатов с результатами численной реализации аддитивной марковской последовательности. Результаты работы могут использоваться для моделирования случайных сред и систем с требуемыми корреляционными свойствами.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов В. И., Харисов В. Н. *Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем*. Москва: Радио и связь, 2004. 608 с.
2. Амтей Н., Галиндо В., Ву Ч. *Теория и анализ фазированных антенных решеток*. Пер. с англ. под ред. А. Ф. Чаплина. Москва: Мир, 1974. 455 с.
3. Лукин К. А., Могила А. А., Выплавин П. Л. Получение изображений с помощью неподвижной антенной решетки, шумовых сигналов и метода синтеза апертуры. *Радиофизика и электрон.*: сб. науч. тр. Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. Харьков, 2007. Т. 12, № 3. С. 526–531.
4. Anderson D. F., Kurtz T. G. Continuous Time Markov Chain Models for Chemical Reaction Networks. In: H. Koepl, G. Setti, M. di Bernardo, D. Densmore (eds). *Design and Analysis of Biomolecular Circuits*. New York, NY, Springer, 2011. 36 p.
5. Atayero A. A. A., Sheluhin O. *Integrated Models for Information Communication Systems and Networks: Design and Development*. IGI Publishing Hershey, PA, 2013. 469 p.
6. Privault N. *Understanding Markov Chains*. Singapore: Springer, 2013. 354 p.
7. Tan W. Y. *Stochastic Models with Applications to Genetics, Cancers, AIDS and Other Biomedical Systems*. 2<sup>nd</sup> ed. World Scientific, 2015. 600 p.
8. Andrieu C., de Freitas N., Doucet A., Jordan M. I. An Introduction to MCMC for Machine Learning. *Machine Learning*. 2003. Vol. 50, N 1–2. P. 5–43.
9. Berchtold A., Raftery A. E. The Mixture Transition Distribution Model for High-Order Markov Chains and Non-Gaussian Time Series. *Statistical Science*. 2002. Vol. 17, N 3. P. 328–356.
10. Ching W., Ng M. K. *Markov Chains: Models, Algorithms and Applications*. Springer Science&Business Media, 2006. 205 p.
11. Kumar R. Raghu M., Sarlós T., Tomkins A. Linear Additive Markov Processes. *Proc. of the 26<sup>th</sup> Int. Conf. World Wide Web*. (Perth, Australia, 03–07 April 2017). Perth, 2017. P. 411–419.
12. Usatenko O. V., Yampol'skii V. A. Binary N-Step Markov Chains and Long-Range Correlated Systems. *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90, Iss. 11. P. 110601 (4 p.). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.110601>.
13. Usatenko O. V., Yampol'skii V. A., Kechedzhy K. E., Mel'nyk S. S. Symbolic stochastic dynamical systems viewed as binary N-step Markov chains. *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 68, Iss. 6. P. 061107 (12p.). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.061107>.
14. Melnyk S. S., Usatenko O. V., Yampol'skii V. A., Golick V. A. Competition between two kinds of correlations in literary texts. *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 72, Iss. 2. P. 026140 (7 p.). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.026140>.
15. Melnyk S. S., Usatenko O. V., Yampol'skii V. A. Memory functions of the additive Markov chains: applications to complex dynamic systems. *Physica A*. 2006. Vol. 361, Iss. 2. P. 405–415. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.06.083>.

16. Melnyk S. S., Usatenko O. V., Yampol'skii V. A., Apostolov S. S., Maiselis Z. A. Memory functions and correlations in additive binary Markov chains. *J. Phys. A: Math. Gen.* 2006. Vol. 39, N 46. P. 14289–14306. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/46/004>.
17. Usatenko O. V., Apostolov S. S., Mayzelis Z. A., Melnik S. S. *Random finite-valued dynamical systems: additive Markov chain approach*. Cambridge: Cambridge Scientific Publ., 2010. 166 p. URL: <http://www.ire.kharkov.ua/~usatenko/papers/!UsatenkoBook-CAMBRIDGE.pdf>.
18. Тихонов В. И., Миронов М. А. *Марковские процессы*. Москва: Советское радио, 1977. 224 с.
19. Stoica P., Moses R. L. On the unit circle problem: The Schur-Cohn procedure revisited. *Signal Process.* 1992, Vol. 26, Iss. 1. P. 95–118. DOI: [https://doi.org/10.1016/0165-1684\(92\)90057-4](https://doi.org/10.1016/0165-1684(92)90057-4).
20. Bistriz Y. Reflections on Schur-Cohn Matrices and Jury-Marden Tables and classification of related unit-circle zero location criteria. *Circ. Syst. Signal Pr.* 1996. Vol. 15, Iss. 1. P. 111–136. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01187696>.
21. Grove E. A., Ladas G. Periodicities in Nonlinear Difference Equations. In: *Advances in Discrete Mathematic and Applications*. Vol. 4. Chapman & Hall/CRC. 2005. 377 p.

Стаття надійшла 04.04.2018

## REFERENCES

1. Tichonov, V. I., Harisov, V. N., 2004. *Statistical analysis and synthesis of radio engineering devices and systems*. Moscow: Radio i svyaz' Publ. (in Russian).
2. Amity, N., Galindo, V. W. Ch., 1974. *Theory and analysis of phased antenna arrays*. Translated from English and ed. by A. F. Chaplin. Moscow: Mir Publ. (in Russian).
3. Lukin, K. A., Mogila, A. A., Vyplavin, P. L., 2007. Reception of images using a fixed antenna array, noise signals and aperture synthesizing method. In: V. M. Yakovenko, ed. 2007. *Radiofizika i elektronika*. Kharkov: IRE NAS of Ukraine Publ. **12**(3), pp. 526–531 (in Russian).
4. Anderson, D. F., Kurtz, T. G., 2011. Continuous time Markov chain models for chemical reaction networks. In: Koepl, H., Densmore, D., Setti, G., di Bernardo, M., eds. 2011. *Design and analysis of biomolecular circuits: engineering approaches to systems and synthetic biology*. New York, NY: Springer, pp. 3–42.
5. Atayero, A. A. A., Sheluhin, O., 2013. *Integrated Models for Information Communication Systems and Networks: Design and Development*. IGI Publishing Hershey, PA.
6. Privault, N., 2013. *Understanding Markov Chains*. Singapore: Springer.
7. Tan, W. Y., 2015. *Stochastic Models with Applications to Genetics, Cancers, AIDS and Other Biomedical Systems*. 2<sup>nd</sup> ed. World Scientific.
8. Andrieu, C., de Freitas, N., Doucet, A., Jordan M. I., 2003. An Introduction to MCMC for Machine Learning. *Machine Learning*, **50**(1–2), pp. 5–43.
9. Berchtold, A., Raftery, A. E., 2002. The Mixture Transition Distribution Model for High-Order Markov Chains and Non-Gaussian Time Series. *Statistical Science*, **17**(3), pp. 328–356.
10. Ching, W., Ng, M. K., 2006. *Markov Chains: Models, Algorithms and Applications*. Springer Science&Business Media.
11. Kumar, R., Raghu, M., Sarlós, T., Tomkins, A., 2017. Linear Additive Markov Processes. *Proc. of the 26<sup>th</sup> Int. Conf. World Wide Web*. Perth, Australia, 03–07 April 2017, pp. 411–419.
12. Usatenko, O. V., Yampol'skii, V. A., 2003. Binary N-Step Markov Chains and Long-Range Correlated Systems. *Phys. Rev. Lett.*, **90**(11), pp. 110601(4 p.). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.110601>.
13. Usatenko, O. V., Yampol'skii, V. A., Kechedzhy, K. E., Mel'nyk, S. S., 2003. Symbolic stochastic dynamical systems viewed as binary N-step Markov chains. *Physical Review E*, **68**(6), pp. 061107(12 p.). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.061107>.
14. Melnyk, S. S., Usatenko, O. V., Yampol'skii, V. A., Golick, V. A., 2005. Competition between two kinds of correlations in literary texts. *Phys. Rev. E*, **72**(2), pp. 026140(7 p.) DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.026140>.
15. Melnyk, S. S., Usatenko, O. V., Yampol'skii, V. A., 2006. Memory functions of the additive Markov chains: applications to complex dynamic systems. *Physica A*, **361**(2), pp. 405–415. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.06.083>.
16. Melnyk, S. S., Usatenko, O. V., Yampol'skii, V. A., Apostolov, S. S., Maiselis, Z. A., 2006. Memory functions and correlations in additive binary Markov chains. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**(46), pp. 14289–14306.
17. Usatenko, O. V., Apostolov, S. S., Mayzelis, Z. A., Melnik, S. S., 2010. Random finite-valued dynamical systems: additive Markov chain approach. [pdf] Cambridge: Cambridge Scientific Publ., 2010. 166 p. Available at: <http://www.ire.kharkov.ua/~usatenko/papers/!UsatenkoBook-CAMBRIDGE.pdf>.
18. Tikhonov, V. I., Mironov, M. A., 1977. *Markov processes*. Moscow: Sovetskoe radio Publ. (in Russian).
19. Stoica, P., Moses, R. L. 1992. On the unit circle problem: The Schur-Cohn procedure revisited. *Signal Process.*, **26**(1), pp. 95–118. DOI: [https://doi.org/10.1016/0165-1684\(92\)90057-4](https://doi.org/10.1016/0165-1684(92)90057-4).
20. Bistriz, Y., 1996. Reflections on Schur-Cohn Matrices and Jury-Marden Tables and classification of related unit-circle zero location criteria. *Circ. Syst. Signal Pr.*, **15**(1), pp. 111–136. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01187696>.
21. Grove, E. A., Ladas, G., 2005. Periodicities in Nonlinear Difference Equations. In: *Advances in Discrete Mathematic and Applications*. Vol. 4. Chapman & Hall/CRC.

Received 04.04.2018

V. E. Vekslерchik, S. S. Melnik, G. M. Pritula, O. V. Usatenko

O. Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics NAS of Ukraine  
12, Acad. Proskura st., Kharkov, 61085, Ukraine

CORRELATION FUNCTIONS FOR LINEAR  
ADDITIVE MARKOV CHAINS OF HIGHER ORDERS

**Subject and purpose.** The task of designing various radio engineering devices, such as filters, delay lines, antennas with a given radiation pattern, requires the development of methods for generating random sequences (the values of the system parameters) with given correlation properties, since the spectral characteristics of the listed and similar to them systems are expressed in terms of the Fourier transforms of correlators. The purpose of this paper is to represent the function of the transition probability of random sequences with long-range correlations in a form convenient for numerical generation of sequences, and to study the statistical properties of the latter.

**Method and methodology.** An adequate mathematical tool for solving such problems is the higher order Markov chains. The statistical characteristics of these objects are determined by their transition probability function, which in the general case can have a very complex form. In this paper, the transition probability function is assumed to be additive and linear with respect to the values of the random variable. It is assumed that the state space of the sequence belongs to the set of real numbers.

**Results.** The equations that relate the correlation functions of the sequence to the weight coefficients of the memory function, determined in their turn by the transition probability function, are derived and analytically solved.

**Conclusion.** It is shown that the correlation functions of the additive Markov chain are completely determined by the variance of the random variable and the weight coefficients of the memory function. The agreement of the obtained analytical results with the results of numerical realization of the additive Markov sequence is demonstrated. Examples of possible correlation scenarios in higher order additive linear chains are given.

**Key words:** Markov sequences, higher order linear additive Markov chains, memory function, correlation functions.

В. Є. Векслерчик, С. С. Мельник, Г. М. Притула, О. В. Усатенко

Інститут радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України  
12, вул. Акад. Проскури, Харків, 61085, Україна

КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ЛІНІЙНИХ  
АДИТИВНИХ МАРКОВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

**Предмет і мета роботи.** Завдання конструювання різних радіотехнічних пристроїв, таких як фільтри, лінії затримки, антени із заданою діаграмою направленості, вимагає розроблення методів генерації випадкових послідовностей (значень параметрів цих систем), що мають задані кореляційні властивості, оскільки спектральні характеристики зазначених і аналогічних їм систем виражаються через фур'є-компоненти кореляторів. Метою цієї роботи є зображення функції перехідної імовірності випадкових послідовностей з далекими кореляціями у вигляді, зручному для чисельної генерації послідовностей, і вивчення статистичних властивостей останніх.

**Методи і методологія роботи.** Адекватним математичним апаратом для вирішення такого роду завдань є ланцюги Маркова вищих порядків. Статистичні характеристики цих об'єктів визначаються їхньою функцією перехідної імовірності, яка в загальному випадку може мати вельми складний вигляд. У цій роботі функція перехідної імовірності покладається адитивною і лінійною щодо значень випадкової величини. Передбачається, що простір станів послідовності належить множині дійсних чисел.

**Результати роботи.** Виведені та аналітично розв'язані рівняння, що зв'язують кореляційні функції послідовності з ваговими коефіцієнтами функції пам'яті, які, у свою чергу, визначаються функцією перехідної імовірності.

**Висновок.** Показано, що кореляційні функції адитивного марковського ланцюга повністю визначаються дисперсією випадкової величини і ваговими коефіцієнтами функції пам'яті. Продемонстровано збіг отриманих аналітичних результатів з результатами чисельної реалізації адитивної марковської послідовності. Наведено приклади можливих кореляційних сценаріїв у адитивних лінійних ланцюгах вищих порядків.

**Ключові слова:** марковські послідовності, лінійні адитивні марковські ланцюги вищих порядків, функція пам'яті, кореляційні функції.