ISSN 1028-821X. Radiofiz. Electron. 2019. Vol. 24, No. 3: 9–20
DOI: https://10.15407/rej2019.03.009
УДК 621.371.332+534.2
PACS 94.20.ws, 43.20.Bi

А.С. Брюховецкий, А.В. Вичкань

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Акад. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: bryu@ire.kharkov.ua

Волновое поле акустической антенны в равномерном дозвуковом потоке

Предмет и цель работы. *Теоретически исследуется волновое поле акустической антенны в равномерном дозвуковом потоке. Цель работы – получение аналитической зависимости звукового поля от физических параметров.*

Методы и методология работы. *В статье представлен апертурный метод теоретического расчета волнового поля акустической антенны, основанный на приближенных краевых условиях Кирхгофа и методе Фурье разделения переменных в волновом уравнении для движущейся среды. При определении координатного представления звукового поля в волновой зоне источника по его частотно-волновому представлению использован асимптотический метод стационарной фазы вычисления двукратных осциллирующих интегралов.*

Результаты работы. *Установлено, что волновое поле акустической антенны представляется в виде произведения волнового поля точечного источника и пространственно-углового множителя, которые зависят не только от положения точки наблюдения, но и от вектора скорости потока.*

Заключение. *Показано, что результаты расчетов могут служить теоретической основой для объяснения экспериментальных данных при радиоакустическом зондировании атмосферы. Библиогр.: 14 назв.*

Ключевые слова: *анизотропия, апертурный метод, дифракция Кирхгофа, метод стационарной фазы.*

Волновое поле акустической антенны в неподвижной изотропной и однородной среде сосредоточено в ограниченной области направлений излучения, величина которой определяется амплитудно-фазовым распределением (АФР) поля в раскрыве. Движение среды вызывает анизотропию распространения звуковых волн, что приводит к дополнительному сдвигу фаз полей излучения от отдельных элементов апертуры. В результате пространственно-угловое распределение суммарного волнового поля может значительно отличаться от такового в неподвижной среде.

В литературе представлены расчеты для систем из конечного числа дискретных точечных источников звука в движущейся среде, например [1, 2]. Однако для общего случая произвольной ориентации апертурных антенн относительно вектора скорости потока подобных расчетов нет.

В главе 4 монографии [3] решается задача об определении частотно-волнового спектра звукового поля для частного случая, когда вектор скорости движения стратифицированной среды лежит в плоскости апертуры. Подобная постановка краевой задачи отвечает приближенным граничным условиям [4, с. 70; 5, с. 349], положенным в основу теории дифракции Кирхгофа, являющейся математическим аппаратом апертурного метода расчета антенн [6].

В отличие от случая неподвижной среды, для которого поле в дальней зоне достаточно просто связано со спектром [6, с. 12], в случае движущейся среды такая связь не установлена. Для ее получения следует не только определить спектр, но и выполнить далеко не простую задачу по обратному преобразованию Фурье, примеров чего в известной нам литературе нет.

Цель настоящего исследования – определение поля акустической антенны в однородном дозвуковом потоке при произвольной ориентации апертуры относительно вектора скорости потока. Попутно возникает необходимость решить задачу о точечном источнике звука в таком потоке, не прибегая к преобразованию Галилея [3, с. 99] для поля движущегося источника в неподвижной однородной среде.

1. Спектральное представление звукового поля. В равномерном потоке (однородной равномерно движущейся среде) звуковое давление $p(\vec{R},t)$ определяется решением уравнения [3, с. 48]

$$\left[\frac{1}{c_a^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\nabla\right)^2-\Delta\right]p=\rho\frac{d}{dt}Q. \qquad (1)$$

Здесь t – время, $\vec{R}=(x,y,z)$ – радиус-вектор точки наблюдения, c_a – скорость звука, $\vec{v}=\left(\vec{v}_x,\vec{v}_y,\vec{v}_z\right)$ – скорость потока, ρ – плотность среды, являющиеся постоянными величинами; $\dfrac{d}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\nabla$ – полная производная по времени; ∇ – оператор Гамильтона; Δ – лапласиан; Q – источник массы (источник объемной скорости). Поделив (1) на ρ, можно получить уравнение для потенциала $\psi(\vec{R},t)$ скорости [7, с. 35]

$$\left[\frac{1}{c_a^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\nabla\right)^2-\Delta\right]\psi=Q, \qquad (2)$$

который связан с акустическим давлением p соотношением

$$\frac{p}{\rho}=\frac{d\psi}{dt}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\nabla\right)\psi. \qquad (3)$$

Предметом исследования будет решение уравнения (2) в безграничной среде при значениях $Q\neq 0$, а также решение при $Q=0$ и некоторых дополнительных условиях для ψ, заданных на плоскости.

Выражение (2) является уравнением в частных производных второго порядка гиперболического типа с постоянными коэффициентами, решение которого возможно методом разделения переменных [8, с. 190], если граничные условия допускают такое разделение.

Пусть граница, на которой заданы значения $\psi(\vec{R},t)$, является плоскостью $z=0$. Решение $\psi(\vec{R},t)$ представим интегралом Фурье

$$\psi(\vec{R},t)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d^2\vec{K}_\perp\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\Omega\,\tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp,\Omega,z\right)\times$$
$$\times\exp\left(-i\Omega t+i\vec{K}_\perp\vec{r}_\perp\right), \qquad (4)$$

где $\vec{r}_\perp=(x,y)$; $\vec{K}_\perp=\left(K_x,K_y\right)$.

Соответствующее разложение для $Q(\vec{R},t)$:

$$Q(\vec{R},t)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d^2\vec{K}_\perp\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\Omega\,\tilde{Q}\left(\vec{K}_\perp,\Omega,z\right)\exp\left(-i\Omega t+i\vec{K}_\perp\vec{r}_\perp\right),$$

где $\vec{R}=(\vec{r}_\perp,z)\equiv(x,y,z)$,

$$\left.\begin{matrix}\tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp,\Omega,z\right)\\ \tilde{Q}\left(\vec{K}_\perp,\Omega,z\right)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{(2\pi)^3}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d^2\vec{r}_\perp\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\exp\left(i\Omega t-i\vec{K}_\perp\vec{r}_\perp\right)\left\{\begin{matrix}\psi(\vec{R},t),\\ Q(\vec{R},t).\end{matrix}\right.$$

Рассмотрим установившиеся колебания $Q(\vec{R},t)=Q(\vec{R})\exp\left(-i\Omega_0 t\right)$ монохроматического источника.

В этом случае $\psi(\vec{R},t)=\exp\left(-i\Omega_0 t\right)\psi(\vec{R})$ и

$$\left.\begin{matrix}\tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp,\Omega,z\right)\\ \tilde{Q}\left(\vec{K}_\perp,\Omega,z\right)\end{matrix}\right\}=2\pi\delta\left(\Omega-\Omega_0\right)\left\{\begin{matrix}\tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp,z\right),\\ \tilde{Q}\left(\vec{K}_\perp,z\right);\end{matrix}\right. \qquad (5)$$

$$\left.\begin{matrix}\tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp,z\right)\\ \tilde{Q}\left(\vec{K}_\perp,z\right)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{(2\pi)^2}\times$$
$$\times\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d^2\vec{r}_\perp\exp\left(-i\vec{K}_\perp\vec{r}_\perp\right)\left\{\begin{matrix}\psi(\vec{R}),\\ Q(\vec{R}).\end{matrix}\right. \qquad (6)$$

Подстановка (5) в уравнение (2) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для спектра $\tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp,z\right)$

$$a_0\tilde{\psi}''+a_1\tilde{\psi}'+a_2\tilde{\psi}=-\tilde{Q}\left(\vec{K}_\perp,z\right), \qquad (7)$$

где штрих означает производную по z – $\tilde{\psi}' = d\tilde{\psi}/dz$, $\tilde{\psi}'' = d^2\tilde{\psi}/dz^2$, а коэффициенты равны: $a_0 = 1 - M_z^2$, $a_1 = i2M_z\left(K - \vec{K}_\perp \vec{M}_\perp\right)$, $a_2 = \left(K - \vec{K}_\perp \vec{M}_\perp\right)^2 - K_\perp^2$, $K = \Omega_0/c_a$, $\vec{M}_\perp = \vec{v}_\perp/c_a$, $M_z = v_z/c_a$.

Уравнение установившихся колебаний, полученное из (2), является уравнением эллиптического типа в трехмерном пространстве (x, y, z).

Для однородного уравнения ($Q = 0$) фундаментальная система решений $w_1(z) = e^{q_1 z}$, $w_2(z) = e^{q_2 z}$ определяется корнями характеристического уравнения

$$a_0 q_{1,2}^2 + a_1 q_{1,2} + a_2 = 0,$$

$$q_{1,2} = \frac{i}{2\left(1 - M_z^2\right)} \times$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} -2M_z\left(K - \vec{K}_\perp \vec{M}_\perp\right) \pm \\ \pm 2\left[\left(K - \vec{K}_\perp \vec{M}_\perp\right)^2 - M_z^2 K_\perp^2\right]^{1/2} \end{matrix} \right\}. \quad (8)$$

Поскольку рассматривается случай дозвукового потока, то $M^2 = M_\perp^2 + M_z^2 < 1$.

Если при $z = 0$ задано граничное условие

$$\tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp, \Omega, z\right)\Big|_{z=0} = \delta\left(\Omega - \Omega_0\right)\tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp, 0\right) \equiv$$
$$\equiv \tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp, \Omega, 0\right), \quad (9)$$

то уходящее при $z \to +\infty$ решение будет $\exp\left(-i\Omega t + q_1 z\right)$, где q_1 отвечает верхнему знаку в комбинации «±» выражения (8).

Функция влияния (функция Грина) соответствующего неоднородного уравнения с источником $\delta(z)$ в правой части (7) определяется условиями [9, с. 260]:

$$G(z, \zeta) = \begin{cases} C_1^+ w_1(z), & z \ge \zeta, \\ C_2^- w_2(z), & z \le \zeta, \end{cases}$$

где при нашем выборе расположения источника $\zeta = 0$, а

$$C_1^+ = -w_2(\zeta)/a_0 W,$$

$$C_2^- = -w_1(\zeta)/a_0 W$$

и W – вронскиан

$$W = w_1(\zeta) w_2'(\zeta) - w_2(\zeta) w'(\zeta) =$$
$$= (q_2 - q_1)\exp\left((q_1 + q_2)\zeta\right).$$

Результат вычислений:

$$G(z, \xi) = -\frac{1}{\left(1 - M_z^2\right)(q_2 - q_1)} \begin{cases} e^{q_1(z - \zeta)}, \\ z \ge \zeta = 0, \\ e^{q_2(z - \zeta)}, \\ z \le \zeta = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Функция Грина (10) является решением уравнения (7) с правой частью, равной $\delta(z)$. Решение (7) с правой частью $\tilde{Q}\left(\vec{K}_\perp, z\right)$ получается [9, с. 260] в результате свертки $G(z, \zeta)$ и $\tilde{Q}\left(\vec{K}_\perp, \zeta\right)$, т. е.

$$\tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp, z\right) = -\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta\, G(z, \zeta)\, \tilde{Q}\left(\vec{K}_\perp, \zeta\right). \quad (11)$$

При $Q\left(\vec{R}, t\right) = -\exp\left(-i\Omega_0 t\right)\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ из формулы (6) получаем значение $\tilde{Q}\left(\vec{K}_\perp, \zeta\right) = \delta(\zeta)/(2\pi)^2$, что при подстановке в (11) приводит к решению $\tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp, z\right) = G(z, 0)/(2\pi)^2$, где $G(z, 0)$ определено формулой (10) при значении $\zeta = 0$.

Выполнив обратное преобразование Фурье, получим решение для волнового поля рассматриваемого точечного источника:

$$\psi\left(\vec{R}, t\right) = \frac{1}{(2\pi)^2}\exp\left(-i\Omega_0 t\right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int d^2\vec{K}_\perp G(z, 0)\exp\left(i\vec{K}_\perp \vec{r}_\perp\right). \quad (12)$$

Если же на плоскости $z = 0$ задано спектральное разложение $\tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp, \Omega, z\right)$ в виде граничного условия (9), решением для волнового поля в области $z \ge 0$ будет

$$\tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp, \Omega, z\right) = \delta\left(\Omega - \Omega_0\right)\tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp, 0\right)\exp(q_1 z),$$

где q_1 отвечает верхнему знаку в комбинации «±» выражения (8). Координатное представление для $\psi\left(\vec{R}, t\right)$ в этом случае получается в виде обратного преобразования Фурье (4):

$$\psi\left(\vec{R}, t\right) = \exp\left(-i\Omega_0 t\right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int d^2\vec{K}_\perp \tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp, 0\right)\exp\left(i\vec{K}_\perp \vec{r}_\perp + q_1 z\right). \quad (13)$$

Таким образом, определение звукового поля в однородном потоке сводится к вычислению двойного осциллирующего интеграла (12) –

в случае точечного источника, либо (13) – если задано граничное условие на поверхности $z = 0$.

Обратимся к случаю, когда этот интеграл вычисляется точно. В этом случае вектор скорости потока $\vec{v}$ перпендикулярен плоскости $z = 0$, т. е. $\vec{v} = (0,0,v_z)$ и, соответственно, $\vec{M} = \vec{v}/c_a = (0,0,M_z)$. Матрица, составленная из коэффициентов при вторых производных в уравнении установившихся колебаний, имеет в этом случае особую (жорданову) форму, что в значительной мере определяет успех последующих вычислений. Формула (8) при этом приводит к значениям

$$q_{1,2} = \frac{i}{1-M_z^2}\left\{-KM_z \pm K_z\right\},$$

где

$$K_z = \sqrt{K^2 - \left(1-M_z^2\right)K_\perp^2},\ \ q_2 - q_1 = \frac{-2i}{1-M_z^2}K_z.$$

При подстановке этих значений в формулу (12) получим

$$\psi\left(\vec{R},t\right) = -\frac{i}{8\pi^2\sqrt{1-M_z^2}}\times$$
$$\times\exp\left(-i\Omega_0 t - iM_z\hat{K}\hat{z}\right)\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{K}_\perp\left(1/\hat{K}_z\right)\times$$
$$\times\exp\left(i\vec{K}_\perp\vec{r}_\perp + i\hat{K}_z|\hat{z}|\right). \qquad (14)$$

В этой формуле использованы следующие обозначения:

$$\hat{z} = z\Big/\sqrt{1-M_z^2},\ \ \hat{R} = \sqrt{x^2+y^2+\hat{z}^2},$$

$$\hat{K} = K\Big/\sqrt{1-M_z^2},\ \hat{K}_z = K_z/\sqrt{1-M_z^2} \equiv \sqrt{\hat{K}^2 - K_\perp^2}.$$

Согласно формуле (12б) в [10, с. 55], для разложения функции Грина по плоским неоднородным волнам выражение (14) для поля $\psi\left(\vec{R},t\right)$ можно записать в следующем виде:

$$\psi\left(\vec{R},t\right) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{1-M_z^2}}\frac{1}{\hat{R}}\times$$
$$\times\exp\left(-i\Omega_0 t - iM_z\hat{K}\hat{z} + i\hat{K}\hat{R}\right). \qquad (15)$$

Если $M_z \to 0$ (неподвижная среда), то $\hat{K} = K$, $\hat{z} = z$, $\hat{R} = R$ и, соответственно,

$$\psi\left(\vec{R},t\right) = -\left(1/4\pi R\right)\exp\left(-i\Omega_0 t + iKR\right)$$

является выражением для сферической волны, возбуждаемой точечным источником в неподвижной среде [8, с. 119].

Сравнивая (15) с решением Д.И. Блохинцева [7, с. 37, формула (1.91)], обнаруживаем отсутствие множителей $1/4\pi$ и $1\Big/\sqrt{1-M_z^2}$. Отсутствие первого объясняется другим выбором источника: $-4\pi\delta(\vec{r})$ вместо $\delta(\vec{r})$. Отсутствие второго сомножителя $1\Big/\sqrt{1-M_z^2}$ объясняется не выбором источника («не совсем последовательным», согласно замечанию в [3, с. 102]), а системной ошибкой в определении функции Грина [7, с. 37], не учитывающей связи скачка производной с коэффициентом при второй производной [9, с. 260].

2. Асимптотические вычисления координатного представления звукового поля при $\vec{v}\,\|\,oz$. Поскольку точное вычисление интегралов (12) и (13) в общем случае, за исключением (15), невозможно, будем ориентироваться на асимптотические вычисления при больших значениях параметра $KR >> 1$ в волновой зоне. Алгоритм этих вычислений рассмотрим на примере двойного интеграла

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{K}_\perp g\left(\vec{K}_\perp\right)\exp\left[i\Phi\left(\vec{K}_\perp\right)\right], \qquad (16)$$

где в случае задания на плоскости $z = 0$ точечного источника согласно (14) при $z \geq 0$ имеем

$$g\left(\vec{K}_\perp\right) = 1/\hat{K}_z = 1/\sqrt{\hat{K}^2 - K_\perp^2},$$
$$\Phi\left(\vec{K}_\perp\right) = \vec{K}_\perp\vec{r}_\perp + \hat{K}_z\hat{z}. \qquad (17)$$

Значения $K_\perp > \hat{K}$, при которых $\hat{K}_z$ является чисто мнимой величиной, существенны для описания поля в точках наблюдения, лежащих в окрестности источника [11, с. 217]. При $KR >> 1$ основной вклад в значения I_2 вносят $K_\perp \leq \hat{K}$, где K_z – вещественное, а $i\Phi\left(\vec{K}_\perp\right)$ – чисто мнимое число. Положив для этих условий

$$I_2 \cong \iint\limits_{K_\perp \leq \hat{K}} d^2\vec{K}_\perp g\left(\vec{K}_\perp\right)\exp\left[i\Phi\left(\vec{K}_\perp\right)\right],$$

вычислим его методом стационарной фазы (МСФ) [5, с. 823; 12, с. 186].

Для внутренней стационарной точки $\vec{K}_{\perp s}$ (лежащей внутри области $K_\perp < \hat{K}$) асимптотическое выражение I_2 равно

$$I_2 \cong \frac{2\pi i\sigma}{\sqrt{|H_s|}} g_s\left(\vec{K}_\perp\right)\exp\left(i\Phi_s\left(\vec{K}_\perp\right)\right), \qquad (18)$$

где $\vec{K}_{\perp s}$, g_s, Φ_s, H_s – значения величин в стационарной (седловой) точке; H – определитель матрицы Гесса, элементами которой являются вторые производные от фазы Φ''_{11}, Φ''_{12}, Φ''_{22} (нижние индексы 1 и 2 отвечают производным по K_x и K_y соответственно). Буквой σ обозначена сигнатура матрицы Гесса в стационарной точке. Условия, определяющие стационарные значения $\vec{K}_{\perp s}$, – обращение в нуль производных

$$\Phi'_1\left(\vec{K}_\perp\right) = \left(x - \frac{K_x}{\hat{K}_z}|\hat{z}|\right)_s = 0; \qquad (19)$$

$$\Phi'_2\left(\vec{K}_\perp\right) = \left(y - \frac{K_y}{\hat{K}_z}|\hat{z}|\right)_s = 0; \qquad (20)$$

$$\hat{K}_z = \sqrt{\hat{K}^2 - K_x^2 - K_y^2}. \qquad (21)$$

Решив эту систему относительно K_{xs}, K_{ys}, получим

$$K_{xs} = \hat{K}\frac{x}{\hat{R}}; \qquad (22)$$

$$K_{ys} = \hat{K}\frac{y}{\hat{R}}; \qquad (23)$$

$$K_{zs} = \hat{K}\frac{|\hat{z}|}{\hat{R}}. \qquad (24)$$

Подстановка полученных значений в выражение для фазы (17) приводит к значению

$$\Phi_s\left(\vec{K}_\perp\right) = \hat{K}\left(x^2 + y^2 + \hat{z}^2\right)/\hat{R} \equiv \hat{K}\hat{R}.$$

Напомним, что $\hat{R} = \sqrt{x^2 + y^2 + \hat{z}^2}$. В данном случае значения элементов матрицы Гесса

$$\left(\Phi''_{11}\right)_s = -\left[\frac{|\hat{z}|}{\hat{K}_z^3}\left(\hat{K}^2 - K_y^2\right)\right]_s,$$

$$\left(\Phi''_{22}\right)_s = -\left[\frac{|\hat{z}|}{\hat{K}_z^3}\left(\hat{K}^2 - K_x^2\right)\right]_s,$$

$$\left(\Phi''_{12}\right)_s = \left(\Phi''_{21}\right)_s = -\left[\frac{|\hat{z}|}{\hat{K}_z^2}K_x K_y\right]_s$$

и модуля гессиана

$$|H_s| = \frac{|\hat{z}|^2}{\hat{K}_{zs}^6}\hat{K}^2\left[\hat{K}^2 - K_x^2 - K_y^2\right]_s =$$

$$= z^2\hat{K}^2/\hat{K}_{zs}^4 = \hat{R}^4/\hat{K}^2\hat{z}^2. \qquad (25)$$

Сигнатура матрицы Гесса $\sigma = -1$. В конечном итоге, согласно (18), для I_2 получаем значение, подстановка которого в (14) приводит к асимптотическому выражению

$$\psi\left(\vec{R},t\right) \cong -\frac{i}{8\pi^2}\frac{\exp\left(-i\Omega_0 t - iM_2\hat{K}\hat{z}\right)}{\sqrt{1-M_z^2}}\times$$

$$\times\frac{-2\pi i\hat{K}\hat{z}}{\hat{R}^2}\frac{\hat{R}}{\hat{K}\hat{z}}\exp\left(i\hat{K}\hat{R}\right),$$

тождественно совпадающему с решением (15), что легко установить после элементарных преобразований.

Для случая, когда на плоскости $z = 0$ задан не точечный источник, а спектральное разложение поля, обратное преобразование Фурье (13) сводится к вычислению МСФ для интеграла I_2, где $g\left(\vec{K}_\perp\right) = \tilde{\psi}\left(\vec{K}_\perp, 0\right)$, а фаза $\Phi\left(\vec{K}_\perp\right)$ по-прежнему задана равенством (17). Воспользовавшись результатами вычислений (19)–(24) и (25), получим асимптотическое значение

$$I_2 \cong -\frac{2\pi i\hat{K}\hat{z}}{\hat{R}^2}\tilde{\psi}\left(\vec{K}_{\perp s}, 0\right)\exp\left(i\Phi\left(\vec{K}_{\perp s}\right)\right),$$

подстановка которого в (13) приводит к результату

$$\psi\left(\vec{R},t\right) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{1-M_z^2}}\frac{1}{\hat{R}}\times$$

$$\times\exp\left(-i\Omega_0 t - iM_z\hat{K}\hat{z} + i\hat{K}\hat{R}\right)\times$$

$$\times G\left(\vec{K}_{\perp s}, \vec{M}\right).$$

Это выражение представляет собой произведение поля точечного источника и фактора пространственно-углового распределения

$$G\left(\vec{K}_{\perp s}, \vec{M}\right) \equiv G\left(R, \theta, \phi, \vec{M}\right) =$$

$$= i8\pi^2\frac{K}{\sqrt{1-M_z^2}}\frac{R}{\hat{R}}\cos\theta\,\tilde{\psi}\left(\vec{K}_{\perp s}, 0\right).$$

Здесь θ, ϕ – сферические углы радиус-вектора $\vec{R}$. Напомним, что $\vec{K}_{\perp s}$ выражается через эти углы формулами (22), (23).

3. Вычисление МСФ координатного представления поля в общем случае. В общем случае произвольной ориентации плоскости $z = 0$ относительно $\vec{v}$ проекции скорости $v_x, v_y \neq 0$.

Выберем направление осей Ox и Oy таким образом, чтобы v_y равнялось нулю. При этом $\vec{M} = \vec{v}/c_a = \left(M_x, 0, M_z\right)$. Характеристические числа q_1, q_2 определяются в этом случае выражением (8), которое при сделанном выборе выглядит следующим образом:

$$q_{1,2} = \frac{1}{1-M_z^2}\left\{-M_z\left(K - K_x M_x\right) \pm K_z\right\},$$

$$K_z = \begin{pmatrix} \left(K - K_x M_x\right)^2 - \\ -\left(1-M_z^2\right)\left(K_x^2 + K_y^2\right) \end{pmatrix}^{1/2}.$$

4. Поле точечного источника. Координатное представление (12) поля точечного источника имеет вид

$$\psi\left(\vec{R},t\right) = \frac{\exp\left(-i\Omega_0 t\right)}{\left(2\pi\right)^2}\times$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty} d^2\vec{K}_{\perp} g\left(\vec{K}_{\perp}\right)\exp\left(i\Phi\left(\vec{K}_{\perp}\right)\right), \tag{26}$$

где

$$g\left(\vec{K}_{\perp}\right) = \frac{1}{2\pi i K_z}, \tag{27}$$

$$\Phi\left(\vec{K}_{\perp}\right) = \vec{K}_{\perp}\vec{r}_{\perp} - \frac{M_z K z}{1-M_z^2} +$$

$$+\frac{M_z z M_x K_x}{1-M_z^2} + \frac{|z|}{1-M_z^2}K_z.$$

В развернутом виде

$$K_z = \begin{pmatrix} K^2 - 2KM_x K_x - \left(1-M_x^2-M_z^2\right)\times \\ \times K_x^2 - \left(1-M_z^2\right)K_y^2 \end{pmatrix}^{1/2}.$$

Условия стационарности фазы:

$$\left(\Phi_1'\right)_s = \hat{x} - \frac{|z|}{\left(1-M_z^2\right)K_z}\times$$

$$\times\left[KM_x + \left(1-M_x^2-M_z^2\right)K_x\right] = 0; \tag{28}$$

$$\left(\Phi_2'\right)_s = y - \frac{|z|}{\left(1-M_z^2\right)K_z}\times$$

$$\times\left[\left(1-M_z^2\right)K_y^2\right] = 0, \tag{29}$$

где

$$\hat{x} = x + \frac{M_z M_x z}{1-M_z^2}. \tag{30}$$

Выразив K_y^2 из (29) через K_x^2 и подставив его в K_z в (28), получим квадратное уравнение для определения K_{xs}, а затем K_{ys} и K_{zs}. Опуская довольно громоздкие промежуточные вычисления, приведем их результат:

$$\left(K_{xs}\right)_{1,2} = -\frac{KM_x}{1-M_z^2} \pm \frac{K\left(1-M_z^2\right)\hat{x}}{\left(1-M^2\right)\hat{R}}; \tag{31}$$

$$K_{ys} = \frac{Ky}{\hat{R}\sqrt{1-M^2}}; \tag{32}$$

$$K_{zs} = \frac{K|z|}{\hat{R}\sqrt{1-M^2}}. \tag{33}$$

Здесь использованы обозначения

$$M^2 = M_x^2 + M_z^2,$$

$$\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \left(1-M_z^2\right)x^2 + \left(1-M^2\right)y^2 + \\ +\left(1-M_x^2\right)z^2 + 2M_x M_z xz \end{pmatrix}^{1/2}. \tag{34}$$

При выполнении вычислений учтена связь

$$\left(1-M_z^2\right)^2\hat{x}^2 = \left(1-M_z^2\right)^2 x^2 +$$

$$+2\left(1-M^2\right)M_x M_z xz + M_x^2 M_z^2 z^2.$$

Выбор знака «±» в K_{xs} осуществляется с учетом предельного перехода при $M_x \to 0$, т. е. знак «+».

Для элементов матрицы Гесса вычисления дают выражения

$$\left(\Phi_{11}''\right)_s = -\frac{|z|}{\left(1-M_z^2\right)K_z}\times$$

$$\times\left\{\left(1-M^2\right) + \left[\frac{KM_x + \left(1-M^2\right)K_x}{K_z}\right]^2\right\}\Bigg|_s,$$

$$\left(\Phi''_{22}\right)_s = -\frac{|z|}{K_z}\left[\frac{K_z^2+\left(1-M_z^2\right)K_y^2}{K_z^2}\right]\Bigg|_s,$$

$$\left(\Phi''_{12}\right)_s = -\frac{|z|}{K_z^3}\left[KM_x+\left(1-M^2\right)K_x\right]K_y\Big|_s.$$

Для абсолютной величины гессиана получим

$$|H_s| = \left|\frac{z^2}{\left(1-M_z^2\right)K_z^4}\left(1-M_z^2\right)K^2\right|_s = \left|\frac{K^2z^2}{K_z^4}\right|_s,$$

$$1/\sqrt{|H|_s} = K_{zs}^2 / Kz. \qquad (35)$$

Заметим, что в данном случае K_{zs}, согласно (33), зависит от $\hat{x} = x + M_z M_x x\Big/\left(1-M_z^2\right)$.

Вычислим для $z > 0$, т. е. $|z| = z$, стационарное значение фазы

$$\Phi\left(\vec{K}_\perp\right) = K_x x + K_y y - K\frac{M_z z}{1-M_z^2} +$$

$$+K_x\frac{M_x M_z z}{1-M_z^2} + \frac{z}{1-M_z^2}K_z, \qquad (36)$$

имея в виду стационарные значения (31)–(33). В результате вычислений получим

$$\Phi_s = -\frac{K\left(M_x x + M_z z\right)}{1-M^2} + \frac{K\hat{R}}{\sqrt{1-M^2}}. \qquad (37)$$

Согласно (27) и (35), для $g_s\left(K_\perp\right)\Big/\sqrt{|H_s|}$ в асимптотической формуле (18) получаем

$$g_s\left(\vec{K}_\perp\right)\Big/\sqrt{|H_s|} = -\frac{iK_{zs}}{2Kz},$$

где K_{zs} определено (33). В результате для I_2 в формуле (12) имеем

$$I_2 \cong -\pi\frac{K_{zs}}{K_z}\exp\left(i\Phi_s\right),$$

а координатное представление поля (12) выглядит следующим образом:

$$\psi\left(\vec{R},t\right) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{1-M^2}}\frac{1}{\hat{R}}\times$$

$$\times\exp\left[-i\Omega_0 t + i\Phi_s\right], \qquad (38)$$

где Φ_s задано формулой (37).

Легко убедиться, что в случае $\vec{v}\,\|\,oz$, т. е. $\vec{M} = \left(0,0,M_z\right)$, $M^2 = M_z^2$, формула (38) переходит в (15). Действительно, в этом случае $(M_x = 0)$ имеем

$$\hat{R} = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1-M_z^2}},$$

$$\Phi_s = -\frac{KM_z z}{1-M_z^2} + \frac{K\hat{R}}{\sqrt{1-M_z^2}} \equiv -M_z\hat{K}\hat{z} + \hat{K}\hat{R}.$$

Для сравнения с представленными в литературе результатами преобразуем зависимость (38) от векторов $\vec{R}$, $\vec{M}$ к зависимости от модулей $\vec{R}$, $\vec{M}$ и угла α между векторами $\vec{R}$ и $\vec{M}$:

$$\vec{M}\vec{R} = MR\cos\alpha \equiv M_x x + M_z z.$$

Поскольку

$$\cos\alpha = \left(M_x x + M_z z\right)/MR; \qquad (39)$$

$$\hat{R} = \frac{R}{\sqrt{1-M^2}}\sqrt{1-M^2\sin^2\alpha}, \qquad (40)$$

то учитывая (39) и (40), выражение (38) можно переписать в виде

$$\psi\left(\vec{R},t\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\times$$

$$\times\exp\begin{pmatrix} -i\Omega_0 t - \dfrac{iKMR\cos\alpha}{1-M^2} + \\ +i\dfrac{KR}{1-M^2}\sqrt{1-M^2\sin^2\alpha} \end{pmatrix}. \qquad (41)$$

Согласно (41),

$$\psi\left(\vec{R},t\right) = \Psi\left(\vec{R},t\right)\exp\left(i\Phi_s\right),$$

где

$$\Psi\left(R,t\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\exp\left(-i\Omega_0 t\right)}{\mu_2},$$

$$\mu_2 = R\sqrt{1-M^2\sin^2\alpha} = \hat{R}\sqrt{1-M^2} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \left(1-M_z^2\right)x^2 + \left(1-M^2\right)y^2 + \\ +\left(1-M_x^2\right)z^2 + 2M_x M_z xz \end{Bmatrix}^{1/2}, \qquad (42)$$

и

$$\Phi_s\left(\vec{R}\right) = \frac{K}{1-M^2}\left\{-\mu_1 + \mu_2\right\},$$

где

$$\mu_1 = MR\cos\alpha \equiv M_x x + M_z z. \qquad (43)$$

В соответствии с (3) выразим давление p через ψ:

$$p(\vec{R},t)=(\Sigma_1+\Sigma_2)\psi,$$

где

$$\Sigma_1=1-\frac{M_x\partial\Phi_s}{K\partial x}-\frac{M_z\partial\Phi_s}{K\partial z},$$

$$\Sigma_2=-\frac{i}{K\mu_2}\left[M_x\frac{\partial\mu_2}{\partial x}+M_z\frac{\partial\mu_2}{\partial z}\right].$$

Вычисление производных в этих формулах приводит к значениям

$$\Sigma_1=\frac{1}{1-M^2}\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\equiv\frac{1}{1-M^2}\times$$

$$\times\frac{R\sqrt{1-M^2\sin^2\alpha}-MR\cos\alpha}{R\sqrt{1-M^2\sin^2\alpha}}, \quad (44)$$

$$\Sigma_2=-\frac{i\mu_1}{K\mu_2^2}=-\frac{iM\cos\alpha}{KR\left(1-M^2\sin^2\alpha\right)}.$$

В конечном итоге

$$\rho(\vec{R},t)=\text{const}\times$$

$$\times\exp\left(\begin{gathered}-i\Omega_0 t-\frac{iKMR\cos\alpha}{1-M^2}+\\+\frac{iKR}{1-M^2}\sqrt{1-M^2\sin^2\alpha}\end{gathered}\right)\times$$

$$\times\left[\begin{gathered}\frac{\sqrt{1-M^2\sin^2\alpha}-M\cos\alpha}{\left(1-M^2\right)R\left(1-M^2\sin^2\alpha\right)}-\\-\frac{iM\cos\alpha}{KR^2\left(1-M^2\sin^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\end{gathered}\right]. \quad (45)$$

Выражение (45) при const = 1 полностью совпадает с точным решением в монографии [3, с. 99], полученным с помощью применения принципа Галилея к решению задачи о поле движущегося источника в неподвижной среде. Такое совпадение не является случайным. Вычисления дают возможность убедиться, что замена переменных интегрирования $K_x, K_y \to \tilde{K}_x, \tilde{K}_y$ и величин $\hat{x}, y, z \to \tilde{\hat{x}}, \tilde{y}, \tilde{z}$ согласно формулам

$$K_x=\left(\tilde{K}_x\sqrt{1-M_z^2}-KM_x\right)\Big/\left(1-M^2\right),$$

$$K_y=\tilde{K}_y\Big/\sqrt{1-M^2},$$

$$\tilde{\hat{x}}=\hat{x}\sqrt{1-M_z^2}\Big/\left(1-M^2\right),$$

$$\tilde{y}=y\Big/\sqrt{1-M^2},$$

$$\tilde{z}=z\Big/\sqrt{\left(1-M^2\right)\left(1-M_z^2\right)},$$

позволяет привести двойной интеграл в формуле (26) к выражению, содержащему разложение Вейля сферической волны по неоднородным плоским волнам [10, с. 55]

$$\frac{e^{iK\tilde{\hat{R}}}}{\tilde{\hat{R}}}=\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d\tilde{K}_x\,d\tilde{K}_y\frac{\exp\left\{\begin{gathered}i\tilde{K}_x\tilde{\hat{x}}+i\tilde{K}_y\hat{y}+\\+i|z|\sqrt{K^2-\tilde{K}_x^2-\tilde{K}_y^2}\end{gathered}\right\}}{\sqrt{K^2-\tilde{K}_x^2-\tilde{K}_y^2}},$$

где $\tilde{\hat{R}}=\sqrt{\tilde{\hat{x}}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2}$, и таким образом получить точное, а не асимптотическое значение поля.

5. Волновое поле акустической антенны в приближении МСФ при произвольной ориентации вектора скорости $\vec{v}$. Исходной для расчетов является формула (26), имеющая вид

$$\psi(\vec{R},t)=\exp(-i\Omega_0 t)I_2, \quad (46)$$

где I_2 – двойной интеграл (16), в котором

$$g(\vec{k}_\perp)=\tilde{\psi}(\vec{K}_\perp,0), \quad (47)$$

а фаза $\Phi(\vec{K}_\perp)$ задана формулой (36). Асимптотика I_2 по МСФ может быть представлена формулой (18), в данном случае имеющей вид

$$I_2\cong-\frac{2\pi i}{\sqrt{|H_s|}}\tilde{\psi}(\vec{K}_{\perp s},0)\exp\left(i\Phi_s(\vec{K}_\perp)\right), \quad (48)$$

где

$$\frac{1}{\sqrt{|H_s|}}=\frac{K_{zs}^2}{Kz}=\frac{K^2z^2}{Kz\left(1-M^2\right)\hat{R}^2}=$$

$$=\frac{Kz}{\left(1-M^2\right)\hat{R}^2}. \quad (49)$$

Подстановка (47) и (49) в (48), а его – в (46) приводит к результату

$$\psi(\vec{R},t)=-\frac{i2\pi\,4\pi}{4\pi\left(1-M^2\right)}\tilde{\psi}(\vec{K}_{\perp s},0)\times$$

$$\times\frac{Kz}{\hat{R}^2}\exp\left(-i\Omega_0 t+i\Phi_s\right), \qquad (50)$$

где $\Phi_s\left(\vec{K}_\perp\right)$ задано формулой (37).

Выделим в выражении (50) поле точечного источника в виде отдельного множителя

$$\psi\left(\vec{R},t\right)=-\frac{1}{4\pi\sqrt{1-M^2}\hat{R}}\times$$

$$\times\exp\left(-i\Omega_0 t+i\Phi_s\right)G\left(\vec{K}_{\perp s},\vec{M}\right), \qquad (51)$$

где

$$G\left(\vec{K}_{\perp s},\vec{M}\right)\equiv G\left(R,\theta,\phi,\vec{M}\right)=$$

$$=i\frac{8\pi^2 K_z}{\hat{R}\sqrt{1-M^2}}\tilde{\psi}\left(\vec{K}_{\perp s},0\right)=$$

$$=i8\pi^2\frac{K}{\sqrt{1-M^2}}\frac{R}{\hat{R}}\cos\theta\cdot\tilde{\psi}\left(\vec{K}_{\perp s},0\right)-$$

пространственно-угловой множитель, зависящий от R, сферических углов θ, ϕ радиус-вектора $\vec{R}\left(R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta\right)$ и вектора $\vec{M}$ согласно (34); $\vec{K}_{\perp s}$, согласно (31)–(33), также зависит от этих величин.

Спектр $\tilde{\psi}\left(K_{\perp s},0\right)$ является преобразованием Фурье от поля $\psi\left(\vec{r}_1,0\right)$, заданного в точках $\vec{R}=\left(\vec{r}_1,0\right)$ раскрыва апертуры на плоскости $z=0$:

$$\tilde{\psi}\left(\vec{K}_{\perp s},0\right)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_S d^2\vec{r}_1\,\psi\left(\vec{r}_1,0\right)e^{-i\vec{K}_{\perp s}\vec{r}_1}. \qquad (52)$$

При $\vec{M}\to 0$ имеем $\hat{R}\to R$, $Kz/R=K\cos\theta$,

$$i\Phi_s-i\vec{K}_{\perp s}\vec{r}_1\to iK\left(R-\frac{\vec{r}_\perp}{R}\vec{r}_1\right)=$$

$$=iK\left|\vec{R}-\vec{r}_1\right|+O\left(Kr_1^2/2R\right)$$

в зоне дифракции Фраунгофера для апертуры. Учитывая, что $\frac{1}{\hat{R}}\to\frac{1}{R}$, поле (51) приобретает вид

$$\psi\left(\vec{R},t\right)\cong-\frac{i}{\Lambda}\frac{e^{-i\Omega_0 t}}{R}\cos\theta\times$$

$$\times\iint\limits_S d^2\vec{r}_1\,\psi\left(\vec{r}_1,0\right)\exp\left(iK\left|\vec{R}-\vec{r}_1\right|\right),$$

где $\Lambda=2\pi/K$.

Если переобозначить $\cos\theta=\cos\delta$, $R=s'$, $\left|\vec{R}-\vec{r}_1\right|=s$, $\psi\left(\vec{r}_1,0\right)=\frac{A}{r'}\exp\left(iKr\right)$, то $\psi\left(R,t\right)$ приобретает вид дифракционного интеграла Френеля–Кирхгофа в приближении фраунгоферовской дифракции [5, с. 417, формула (23)]

$$\psi\left(\vec{R},t\right)=-\frac{Ai}{\Lambda}\frac{\cos\delta}{r's'}\times$$

$$\times\iint\limits_S\exp\left[iK\left(r+s\right)\right]dS.$$

Таким образом, вычисления обратного преобразования Фурье по МСФ приводят к точному значению для поля точечного источника, а для поля, заданного граничными условиями Кирхгофа (условиями с разрывом поля), вычисления дают обобщение дифракционного интеграла Френеля–Кирхгофа в приближении фраунгоферовской дифракции.

6. Акустическое давление в дальней зоне антенны. Определим давление $p(\vec{R},t)$ через потенциал (51) в дальней зоне. В производных $\nabla\psi$ пренебрежем вкладом от производных предэкспоненциального множителя по сравнению с производными от экспоненты в формуле (51), положив

$$\nabla\psi\left(\vec{R},t\right)\cong i\psi\left(\vec{R},t\right)\nabla\Phi_s.$$

При этом условии

$$p\left(\vec{R},t\right)\cong\Sigma_1\psi\left(\vec{R},t\right), \qquad (53)$$

где Σ_1 определено формулой (44). Приняв во внимание выражение (42) для μ_2 и (43) для μ_1, можно получить

$$\Sigma_1\cong\frac{1}{1-M^2}\left[1-\frac{M_x x+M_z z}{z\sqrt{1-M_x^2}}+\cdots\right]\cong$$

$$\cong\frac{1}{1-M^2}\left[1-M_z+O\left(M_x\frac{x}{z}\right)\right]\cong$$

$$\cong 1-M_z+O\left(M^2,M_x\frac{x}{z}\right). \qquad (54)$$

Предполагается, что $M^2<<1$ и $\frac{x}{z}<<1$ («узкая» диаграмма направленности).

Займемся для этих условий упрощениями в формуле (51).

Поскольку $\sqrt{1-M^2}\hat{R}\cong R+O\left(M^2\right)$, то можно положить

$$\frac{1}{\sqrt{1-M^2}\hat{R}}\cong\frac{1}{R}+\ldots. \qquad (55)$$

Многоточием обозначены члены порядка малости $M^2 << 1$.

Аналогичным образом (см. формулу (37)):
$\Phi_s = \Delta_1\Phi_s + \Delta_2\Phi_s$,
где

$$\Delta_1\Phi_s = -\frac{K}{1-M^2}\left(M_x x + M_z z\right) = -\frac{K}{1-M^2}\vec{R}\frac{\vec{v}}{c_a},$$

$$\Delta_2\Phi_s \approx \frac{K}{1-M^2}\left[\begin{matrix} R + x\left(\dfrac{z}{R}\right)M_x M_z - \\ -M_x^2 z^2 + \cdots \end{matrix}\right].$$

Здесь $\dfrac{z}{R} \cong 1 + O^2\left(\dfrac{r_\perp^2}{z^2}\right) + \cdots$, $M_x^2 \dfrac{z^2}{2R} \approx M_x^2 z + \cdots$, $x M_x M_z \left(\dfrac{z}{R}\right) \approx M_x M_z x + \cdots$.

Поэтому

$$\Phi_s \cong -\frac{K}{1-M^2}\vec{R}\frac{\vec{v}}{c_a} + \frac{KR}{1-M^2} - \frac{Kz}{1-M^2}M_x^2 + \ldots . \qquad (56)$$

При $KRM^2 \approx KzM^2 << 1$ получаем

$$\Phi_s \cong -K\vec{R}\frac{\vec{v}}{c_a} + KR + \cdots - \qquad (57)$$

выражение для фазы звуковой волны, которое использовалось ранее в работах по радиоакустическому зондированию (РАЗ) [13], [14].

Процедуру приближенных разложений в множителе $G\left(R,\theta,\phi,\vec{M}\right)$ начнем с введения нормированного значения

$$G\left(\vec{K}_{\perp s},\vec{M}\right) = \frac{8\pi^2 Kz}{\sqrt{1-M^2}\hat{R}} \times G_N\left(\vec{K}_{\perp s},\vec{M}\right)\tilde{\psi}(0,0),$$

где

$$G_N\left(\vec{K}_{\perp s},\vec{M}\right) = \tilde{\psi}\left(\vec{K}_{\perp s}\right)/\tilde{\psi}(0,0).$$

Поскольку максимальное значение абсолютной величины осциллирующего интеграла Фурье (52) для $\tilde{\psi}\left(\vec{K}_{\perp s},0\right)$ достигается при $\vec{K}_{\perp s} = 0$, то при этом значении $\vec{K}_{\perp s}$ абсолютная величина $G_N\left(\vec{K}_{\perp s},\vec{M}\right)$ достигает максимума, равного единице. Подставив в формулу (31) значение $\hat{x}$ из формулы (30) и оставив главные члены разложения по малым добавкам, получим

$$K_{xs} \cong \frac{K}{R}\left(x - v_x\tau\right) + \cdots \cong \frac{K}{z}\left(x - v_x\tau\right) + \cdots, \qquad (58)$$

где $\tau = R/c_a \approx z/c_a$, а из формулы (32) –

$$K_{ys} \cong \frac{Ky}{R} \cong \frac{Ky}{z} + \cdots . \qquad (59)$$

Рассмотрим вычисление $G\left(\vec{K}_{\perp s},\vec{M}\right)$ для двух характерных примеров антенн.

1. Антенна с равномерным амплитудно-фазовым распределением (АФР) на раскрыве прямоугольной апертуры,

$$\left|r_{1x}\right| \le \Delta x/2,\ \left|r_{1y}\right| \le \Delta y/2,\ \psi\left(\vec{r}_1,0\right) = \psi_0 = \text{const},$$

$$G_N'\left(\vec{K}_{\perp s},\vec{M}\right) = \frac{\sin X}{X}\frac{\sin Y}{Y},$$

где $X = K_{xs}\Delta x/2$, $Y = K_{ys}\Delta y/2$.

2. Гауссово АФР на апертуре $0 \le r_1 \le \infty$,

$$\psi\left(\vec{r}_1,0\right) = \psi_0 \exp\left(\frac{-r_1^2}{a_a^2}\right),$$

$$G_N\left(\vec{K}_{\perp s},\vec{M}\right) = \exp\left\{-\frac{K_{xs}^2 + K_{ys}^2}{4}a_a^2\right\}. \qquad (60)$$

Если воспользоваться приближениями (58), (59) при $z = z_a + z'$, где $z' << z_a$ и $\tau \cong z_a/c_a$, то (60) можно переписать в виде

$$G_N\left(\vec{K}_{\perp s},\vec{M}\right) \cong \exp\left\{\begin{matrix} -\dfrac{K^2 a_a^2}{4z_a^2} \times \\ \times\left[\left(x - v_x\tau\right)^2 + y^2\right] \end{matrix}\right\}. \qquad (61)$$

Диаграмма направленности звуковой антенны в таком виде, полученная на основе модельных представлений, использовалась ранее в работах по радиоакустическому зондированию [13, 14].

Таким образом, при сделанных предположениях, упрощения (55), (56), (60) приводят выражение (51) для гауссовой антенны к виду

$$\psi\left(\vec{R},t\right) = \text{const}\frac{1}{R}\exp\left(-i\Omega_0 t + i\Phi_s\right) \times G_N\left(\vec{K}_{\perp s},\vec{M}\right),$$

где const $\cong i8\pi^2 K\tilde{\psi}(0,0)$, а Φ_s и $G_N\left(\vec{K}_{\perp s}, \vec{M}\right)$ – значения (56) и (61) соответственно.

Давление в звуковой волне выражается через $\psi\left(\vec{R},t\right)$ формулами (53), (54). При условии $M^2 Kz << 1$, когда для Φ_s справедливо приближение (57) и можно пренебречь $M_z << 1$ в (54), получаем выражение для $p\left(\vec{R},t\right)$, которое использовалось для определения звуковых возмущений диэлектрической проницаемости в работах [13, 14].

Выводы. Проведенные расчеты звукового поля в однородном потоке в приближении дифракции Кирхгофа приводят к точному значению в случае точечного звукового источника. В случае узконаправленной акустической антенны вычисления по методу стационарной фазы дают обобщение интеграла Френеля–Кирхгофа для волнового поля в однородном потоке. Полученные теоретические зависимости могут служить основой для объяснения результатов радиоакустического зондирования атмосферы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бубнов Е.Я. Акустическое излучение распределенных источников в анизотропной среде. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2010. № 6. С. 56–58.
2. Бубнов Е.Я. Акустическое излучение движущейся линейной антенной продольных распределенных квадруполей. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2012. № 2(1). С. 55–58.
3. Осташев В.Е. *Распространение звука в движущихся середах*. Москва: Наука, 1992. 208 с.
4. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. *Теория дифракции*. Пер. с нем. Москва: Мир, 1964. 428 с.
5. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики*. Москва: Наука, 1970. 856 с.
6. Галимов Г.К. *Общая теория зеркальных антенн*. Т. 6. Москва: ООО «Адвансед Солюшнз», 2017. 704 с.
7. Блохинцев Д.И. *Акустика неоднородной движущейся среды*. Москва-Ленинград: ОГИЗ-Гостехизат, 1946. 220 с.
8. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. Изд. 4-е. Москва: Наука, 1981. 512 с.
9. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике*. Москва: Наука, 1968. 720 с.
10. Фелсен Л., Маркувиц Н. *Излучение и рассеяние волн*. Пер. с англ. под ред. М.Л. Левина. Т. 2. Москва: Мир, 1978. 555 с.
11. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах*. Москва: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.
12. Федорюк М.В. *Асимптотика: Интегралы и ряды*. Москва: Наука, 1987. 544 с.
13. Брюховецкий А.С. Радиолокационное отражение от звукового импульса. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2005. Т. 10, № 4. С. 432–441.
14. Брюховецкий А.С., Вичкань А.В. Влияние ветра на характеристики рассеяния радиоволн при двухпозиционном радиоакустическом зондировании. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2017. Т. 22, № 2. С. 146–156. DOI: https://doi.org/10.15407/rpra22.02.146.

Стаття надійшла 29.11.2018

REFERENCES

1. Bubnov, E.Ya., 2010. Acoustic emission of discrete sources in anisotropic medium. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 6, pp. 56–58 (in Russian).
2. Bubnov, E.Ya., 2012. Acoustic radiation of a moving linear antenna comprised of axial distributed quadrupoles. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2(1), pp. 55–58 (in Russian).
3. Ostashev, V.E., 1992. *Propagation of sound in moving media*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
4. Khenl, Kh., Maue, A., Vestpfal, K., 1964. *Theory of diffraction*. Translated from German. Moscow: Mir Publ. (in Russian).
5. Born, M., Volf, E., 1970. *Fundamentals of Optics*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
6. Galimov, G.K., 2017. *General theory of mirror antennas*. Vol. 6. Moscow: OOO «Advansed Solyushnz» Publ. (in Russian).
7. Blokhintsev, D.I., 1946. *Acoustics of an inhomogeneous moving medium*. Moscow-Leningrad: OGIZ-Gostekhizat Publ. (in Russian).
8. Vladimirov, V.S., 1981. *Equations of mathematical physics*. 4th ed. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
9. Korn, G., Korn, T., 1968. *Handbook of Mathematics*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
10. Felsen, L.B., Markuvitz, N., 1978. *Radiation and Scattering of waves*. Translated from English and ed. by M.L. Levin. Vol. 1. Moscow: Mir Publ. (in Russian).
11. Brekhovskikh, A.M., 1957. *Waves in layered media*. Moscow: AN SSSR Publ. (in Russian).
12. Fedoruk, M.V., 1987. *Asymptotics: Integrals and series*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
13. Bryukhovetski, A.S., 2005. Radar reflection from acoustic pulse. *Radio Physics and Radio Astronomy*, **10**(4), pp. 432–441 (in Russian).
14. Bryukhovetski, A.S., Vichkan’, A.V., 2017. Wind effect on the characteristics of radio wave scattering for the two-position radio acoustic sounding. *Radio Physics and Radio Astronomy*, **22**(2), pp. 146–156 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.15407/rpra22.02.146.

Received 29.11.2018

A.S. Bryukhovetski and A.V. Vichkan'

O.Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics NAS of Ukraine
12, Acad. Proskura st., Kharkov, 61085, Ukraine

WAVE FIELD OF ACOUSTIC ANTENNA IN UNIFORM SUBSONIC FLOW

Subject and purpose. The wave field of an acoustic antenna in a uniform subsonic flow is theoretically investigated. Purpose of the work is to obtain an analytical dependence of the sound field on physical parameters.

Method and methodology. The article presents the aperture method of theoretical calculation of wave field of the acoustic antenna, which is based on the approximate Kirchhoff boundary conditions and the Fourier method of separation of variables in the wave equation for a moving medium. The asymptotic saddle point method for calculating double oscillating integrals is used in determining the coordinate representation of the sound field in the wave zone of the source from its frequency-wave representation.

Results. It is established that the wave field of an acoustic antenna is represented as a product of the wave field of a point source and a spatial angular factor, which depend not only on the position of the observation point, but also on the flow velocity vector.

Conclusion. It was shown that the results of calculations can serve as a theoretical basis for explaining the experimental data for radio acoustic sounding of the atmosphere.

Key words: *anisotropy, aperture method, Kirchhoff diffraction, saddle point method.*

А.С. Брюховецький, О.В. Вічкань

Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України
12, вул. Акад. Проскури, Харків, 61085, Україна

ХВИЛЬОВЕ ПОЛЕ АКУСТИЧНОЇ АНТЕНИ У РІВНОМІРНОМУ ДОЗВУКОВОМУ ПОТОЦІ

Предмет і мета роботи. Теоретично досліджується хвильове поле акустичної антени в рівномірному дозвуковому потоці. Мета роботи – отримання аналітичної залежності звукового поля від фізичних параметрів.

Методи і методологія роботи. У статті представлено апертурний метод теоретичного розрахунку хвильового поля акустичної антени, заснований на наближених крайових умовах Кірхгофа і методі Фур'є поділу змінних у хвильовому рівнянні для рухомого середовища. Для визначення координатного подання звукового поля у хвильовій зоні джерела за його частотно-хвильовим поданням використано асимптотичний метод стаціонарної фази обчислення дворазових осцилюючих інтегралів.

Результати роботи. Встановлено, що хвильове поле акустичної антени подається у вигляді добутку хвильового поля точкового джерела і просторово-кутового множника, які залежать не тільки від положення точки спостереження, а й від вектора швидкості потоку.

Висновки. Показано, що результати розрахунків можуть слугувати теоретичною основою для пояснення експериментальних даних при радіоакустичному зондуванні атмосфери.

Ключові слова: *анізотропія, апертурний метод, дифракція Кірхгофа, метод стаціонарної фази.*