УДК 004.942

Ю. Е. Бояринова
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Построение высокоразмерных гиперкомплексных числовых систем с помощью процедуры умножения размерности

Исследовано построение новых высокоразмерных гиперкомплексных числовых систем с помощью процедуры умножения размерностей, что позволяет конструировать слабо- и сильнозаполненные таблицы умножения изоморфных гиперкомплексных числовых систем, которые могут применяться при синтезе цифровых фильтров. Рассмотрены свойства процедуры умножения размерности.

Ключевые слова: *гиперкомплексные числовые системы, таблица умножения, процедура умножения размерностей.*

Памяти доктора технических наук,
профессора М.В. Синькова

Введение

В настоящее время происходит бурное развитие технологий, связанных с обработкой и представлением информации. Следует отметить, что теория гиперкомплексных числовых систем (ГЧС), как один из способов представления информации, активно развивается во многих странах, а ее методы используются для моделирования важных задач науки и техники. Гиперкомплексные числовые системы получили важные применения в задачах инерциальной навигации и управления подвижными объектами, в практических задачах механики, электродинамики, радиоэлектроники, криптографии, цифровой обработке сигналов и многих других [1, 2]. Эти примеры свидетельствуют о тенденции развития прикладных аспектов с использованием гиперкомплексных числовых систем. Ранее применялись ГЧС небольшой размерности — 3–4. Однако все большее усложнение решаемых задач требует применения высокоразмерных ГЧС, поэтому становится необходимым получение их с различными таблицами умножения.

Для формирования ГЧС можно использовать следующие методы:

— метод перебора всевозможных таблиц определенной размерности с последующей проверкой на принадлежность полученной таблицы к гиперкомплексным числовым системам;

— метод путей на графах, позволяющий получить только один представитель класса изоморфизма, но не его состав;

— метод перехода от бесконечномерных гиперкомплексных систем к конечномерным ГЧС. Однако с увеличением размерности получаемые ГЧС будут неканоническими.

Эти методы получения высокоразмерных ГЧС являются трудоемкими, поэтому появилась необходимость предложить более простой метод получения изоморфных ГЧС.

Интерес к вопросу о возможности конструирования пар изоморфных ГЧС высокой размерности, одна из которых сильнозаполненная, а другая — слабозаполненная, возник сравнительно недавно в связи с использованием гиперкомплексных числовых систем для математического моделирования. Дело в том, что для создания математических моделей, как правило, нужны сильнозаполненные ГЧС, а при их использовании выгоднее применять изоморфные слабозаполненные, так как при этом значительно сокращается количество вычислений [2].

Слабозаполненной гиперкомплексной числовой системой называется такая ГЧС, в таблице умножения которой много нулевых ячеек. В слабозаполненной ГЧС ненулевые ячейки лежат не только на диагонали таблицы умножения. В противоположность этому в сильнозаполненной ГЧС нулевых ячеек мало, или они вообще отсутствуют.

Примеры слабо- и сильнозаполненных ГЧС

Простейшими примерами таких ГЧС является пара следующих изоморфных ГЧС, принадлежащих алгебре двойных чисел:

W —

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	e_1

W_1 —

	E_1	E_2
E_1	E_1	0
E_2	0	E_2

Как видно, если в таблице умножения ГЧС W ненулевых ячеек нет, то в таблице умножения ГЧС W_1 они только на диагонали, а остальные ячейки нулевые. Таким образом, система W — сильнозаполненная, система W_1 — слабозаполненная.

Сравним вычисления в слабо- и сильнозаполненных ГЧС.

Так, например, при умножении двух чисел в системе W

$$(a_1e_1 + a_2e_2)(b_1e_1 + b_2e_2) = (a_1b_1 + a_2b_2)e_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)e_2$$

необходимо выполнить 4 умножения и 2 сложения над вещественными числами, а при умножении в системе W_1

$$(A_1e_1 + A_2e_2)(B_1e_1 + B_2e_2) = A_1B_1E_1 + A_2B_2E_2$$

всего лишь 2 умножения. При увеличении размерности используемых ГЧС этот эффект значительно увеличивается.

Правда, при переходе из одной системы в другую необходимо произвести дополнительные операции. Так, в данном случае преобразования имеют следующий вид:

$$A_1 = a_1 + a_2, \qquad a_1 = (A_1 + A_2)/2,$$
$$A_2 = a_1 - a_2, \qquad a_2 = (A_1 - A_2)/2.$$

Они предполагают 4 сложения, а деление на 2 — короткая операция, осуществляемая сдвигом регистров, что занимает очень мало времени. Как правило, с преобразованными числами осуществляется много операций, при этом расход времени на преобразование в расчете на одну операцию с гиперкомплексными числами невелик.

Процедуры удвоения ГЧС

Получение изоморфных пар ГЧС более высоких размерностей был бы возможен, если бы были перечислены классы изоморфизмов ГЧС необходимой размерности и были бы известны полные составы этих классов. Однако, как показывают исследования, перечисление классов изоморфизмов ГЧС сопряжено с большими трудностями и в настоящее время возможно только для ГЧС невысоких размерностей [2].

С другой стороны, известны рекуррентные процедуры удвоения ГЧС, которые позволяют строить ГЧС все больших и больших размерностей. Целью данной работы является исследование возможностей применения процедур удвоения ГЧС для получения именно таких пар изоморфных ГЧС сильной и слабой заполненности.

Существуют два типа процедур удвоения: процедуры Кейли–Диксона (КД) и процедуры Грассмана–Клиффорда (ГК).

КД-процедуры позволяют получать нормированные ГЧС размерности 2^n, где $n \in N$ — порядок удвоения [3–7]. При $n > 4$ они неассоциативные, что делает выполнение алгебраических операций в таких ГЧС очень трудными.

ГК-процедуры позволяют получить более широкие классы ГЧС как по размерности, так и по свойствам [4, 8].

Рассмотрим подробнее процесс удвоения по ГК-процедуре.

Оператор удвоения ГЧС

Для дальнейшего изложения условимся о следующих обозначениях. В самом общем случае гиперкомплексная числовая система будет обозначаться $\Gamma(e,n)$, где $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ — базис $\Gamma(e,n)$, n — размерность ГЧС $\Gamma(e,n)$.

В том случае, когда речь идет о ГЧС конкретного типа, она будет обозначаться именем своего типа, как, например, рассмотренная выше система двойных чисел $W(e)$. Здесь уже размерность можно не указывать, так как она известна из типа

ГЧС. Однако имя базиса указывать нужно, так как при удвоении могут рассматриваться два экземпляра одной и той же ГЧС, но базисы у них нужно различать.

Если рассматривается коммутативная ГЧС в общем виде, то ее таблица умножения будет иметь наиболее обобщенный вид:

	e_1	e_2	$\cdots$	e_n
e_1	e_1e_1	e_1e_2	$\cdots$	e_1e_n
e_2	e_1e_2	e_2e_2	$\cdots$	e_2e_n
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
e_n	e_1e_n	e_2e_n	$\cdots$	e_ne_n

(1)

Введем далее обозначение оператора удвоения системы $\Gamma_1(e,n)$ системой $\Gamma_2(f,2)$:

$$Д(\Gamma_1(e,n),\Gamma_2(f,2)) \,. \tag{2}$$

Результатом выполнения оператора удвоения $Д$ в данном случае будет некоторая ГЧС (коммутативная) размерности $2n$. Ее базис, обозначение которого — ef, будет таким:

$$ef = \{e_1f_1, e_1f_2, e_2f_1, e_2f_2, ..., e_nf_1, e_nf_2\}\,, \tag{3}$$

т.е. можно записать:

$$Д(\Gamma_1(e,n),\Gamma_2(f,2)) = \Gamma_3(ef,2n)\,.$$

Заметим, что размерность полученной ГЧС равна $2n$ исключительно из-за коммутативности ГЧС Γ_1 и Γ_2. В противном случае размерность полученной системы в общем случае должна была быть равной $4n$.

Рассмотрим пример удвоения

$$Д(\Gamma_1(e,2),\Gamma_2(f,2)) = \Gamma_3(ef,4)\,.$$

Базис системы $\Gamma_3(ef,4)$: $ef = \{e_1f_1, e_1f_2, e_2f_1, e_2f_2\}$. С таблицей умножения системы $\Gamma_3(ef,4)$ можно проделать следующие символические преобразования, основанные на коммутативности всех рассматриваемых систем:

	e_1f_1	e_1f_2	e_2f_1	e_2f
e_1f_1	$e_1e_1f_1f_1$	$e_1e_1f_1f_2$	$e_1e_2f_1f_1$	$e_1e_2f_1f_2$
e_1f_2	$e_1e_1f_1f_2$	$e_1e_1f_2f_2$	$e_1e_2f_1f_2$	$e_1e_2f_2f_2$
e_2f_1	$e_1e_2f_1f_1$	$e_1e_2f_1f_2$	$e_2e_2f_1f_1$	$e_2e_2f_1f_2$
e_2f_2	$e_1e_2f_1f_2$	$e_1e_2f_2f_2$	$e_2e_2f_1f_2$	$e_2e_2f_2f_2$

$\Leftrightarrow$ (4)

<table>
<tr><td></td><td>e_1f_1</td><td>e_1f_2</td><td>e_2f_1</td><td>e_2f_2</td></tr>
<tr><td>e_1f_1</td><td colspan="2" rowspan="2">$e_1e_1\Gamma_2$</td><td colspan="2" rowspan="2">$e_1e_2\Gamma_2$</td></tr>
<tr><td>e_1f_2</td></tr>
<tr><td>e_2f_1</td><td colspan="2" rowspan="2">$e_1e_2\Gamma_2$</td><td colspan="2" rowspan="2">$e_2e_2\Gamma_2$</td></tr>
<tr><td>e_2f_2</td></tr>
</table>

(5)

Если изменить порядок следования базисных элементов системы $\Gamma_3(ef,4)$ таким образом: $ef = \{e_1f_1, e_2f_1, e_1f_2, e_2f_2\}$, что равносильно перемене мест второй и третьей строк и соответственно столбцов таблицы умножения системы $\Gamma_3(ef,4)$, то получим такую символическую таблицу умножения:

<table>
<tr><td></td><td>e_1f_1</td><td>e_2f_1</td><td>e_1f_2</td><td>e_2f_2</td></tr>
<tr><td>e_1f_1</td><td colspan="2" rowspan="2">$f_1f_1\Gamma_1$</td><td colspan="2" rowspan="2">$f_1f_2\Gamma_1$</td></tr>
<tr><td>e_2f_1</td></tr>
<tr><td>e_1f_2</td><td colspan="2" rowspan="2">$f_1f_2\Gamma_1$</td><td colspan="2" rowspan="2">$f_2f_2\Gamma_1$</td></tr>
<tr><td>e_2f_2</td></tr>
</table>

(6)

Заметим, что в таблицах (5) и (6) вынесенные символически за таблицу умножения произведения базисных элементов сами представляют собой таблицу умножения «своей» ГЧС: в таблице (5) — $\Gamma_1(e,2)$, в таблице (6) — $\Gamma_2(f,2)$. Полученный результат приводит к выводу о коммутативности процедуры умножения относительно своих операндов. Формальное доказательство этого факта, а также его обобщение, будет приведено в последующих работах.

Представление результата удвоения с помощью блочных таблиц позволяет быстро построить таблицу умножения.

Обобщение процедуры удвоения — процедура умножения размерности ГЧС

Процедура удвоения фактически означает то, что компоненты гиперкомплексного числа для данной ГЧС уже не являются вещественными числами, а числами, принадлежащими к какой-либо ГЧС размерности 2. В принципе они могут принадлежать к ГЧС любой размерности. В этом случае размерность полученной ГЧС будет уже не удваиваться по отношению к исходной, а умножаться на размерность той ГЧС, элементами которой будут компоненты исходной ГЧС.

В отличие от процедуры удвоения назовем такой процесс процедурой умножения размерности ГЧС. Оператор умножения размерности будем обозначать так же, как и оператор удвоения размерности:

$$Д(\Gamma_1(e,n), \Gamma_2(f,m)) = \Gamma_3(ef,nm)\,. \qquad (7)$$

Базис полученной системы будет иметь nm элементов:

$$ef = \{e_1 f_1, e_1 f_2, ... e_1 f_m, e_2 f_1, e_2 f_2, ..., e_2 f_m, ... e_n f_1, ..., e_n f_m\}. \tag{8}$$

Представление результата умножения размерности с помощью блочных таблиц позволяет быстро построить таблицу умножения. Блочная таблица в зависимости от порядка перечисления элементов базиса может представлять собой либо $n \times n$ блоков размерами $m \times m$, как показано на следующей схеме

<table>
<tr><td></td><td>$e_1 f_1$</td><td>$e_1 f_2$</td><td>$\cdots$</td><td>$e_1 f_m$</td><td>$e_2 f_1$</td><td>$e_2 f_2$</td><td>$\cdots$</td><td>$e_2 f_m$</td><td>$\cdots$</td><td>$e_n f_1$</td><td>$\cdots$</td><td>$e_n f_m$</td></tr>
<tr><td>$e_1 f_1$</td><td colspan="4" rowspan="4">$e_1 e_1 \Gamma_2$</td><td colspan="4" rowspan="4">$e_1 e_2 \Gamma_2$</td><td rowspan="8"></td><td colspan="3" rowspan="4">$e_1 e_n \Gamma_2$</td></tr>
<tr><td>$e_1 f_2$</td></tr>
<tr><td>$\ldots$</td></tr>
<tr><td>$e_1 f_m$</td></tr>
<tr><td>$e_2 f_1$</td><td colspan="4" rowspan="4">$e_1 e_2 \Gamma_2$</td><td colspan="4" rowspan="4">$e_2 e_2 \Gamma_2$</td><td colspan="3" rowspan="4">$e_2 e_n \Gamma_2$</td></tr>
<tr><td>$e_2 f_2$</td></tr>
<tr><td>$\ldots$</td></tr>
<tr><td>$e_2 f_m$</td></tr>
<tr><td>$\ldots$</td><td colspan="8"></td><td>$\ldots$</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>$e_n f_1$</td><td colspan="4" rowspan="3">$e_1 e_n \Gamma_2$</td><td colspan="4" rowspan="3">$e_2 e_n \Gamma_2$</td><td rowspan="3"></td><td colspan="3" rowspan="3">$e_n e_n \Gamma_2$</td></tr>
<tr><td>$\ldots$</td></tr>
<tr><td>$e_n f_m$</td></tr>
</table>

, (9)

либо $m \times m$ блоков размерами $n \times n$.

Основные свойства оператора умножения размерности ГЧС

При использовании процедуры умножения размерности базис получаемых ГЧС состоит из парных произведений базисных элементов исходных ГЧС. При этом предполагается коммутативность базисных элементов относительно их произведения. Поэтому, независимо от порядка расположения ГЧС в операторе умножения размерности, полученные базисы будут одинаковыми. А, значит, будут идентичными и таблицы умножения ГЧС, полученных при перестановке их в операторе умножения размерности.

Таким образом, может быть сформулирована теорема о коммутативности процедуры умножения размерности относительно своих операндов.

Теорема 1.

Если:

1) $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,m)$ коммутативны,

2) $e_i f_j = f_j e_i$, $\forall i = 1,...,n; \forall j = 1,...,m$,

тогда $Д(Г_1(e,n),Г_2(f,m)) \simeq Д(Г_2(f,m),Г_1(e,n))$, причем изоморфизм устанавливается перестановкой строк и столбцов таблиц умножения.

Действительно, пусть $Д(\Gamma_1(e,n),\Gamma_2(f,m)) = \Gamma'(ef,nm)$, а $Д(\Gamma_2(f,m),\Gamma_1(e,n)) = = \Gamma''(fe,nm)$. Но из коммутативности элементов базисов $e_i f_j = f_j e_i$ вытекает коммутативность базисов $(ef) = (fe)$, откуда следует: $Г'(ef,nm) \simeq Г(fe,nm)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай, когда к одной и той же ГЧС применяются процедуры умножения размерности различными ГЧС, но одинаковых размерностей. Тогда в результате получаются различные ГЧС одинаковой размерности, но, в общем случае, неизоморфные между собой. Однако, если для умножения размерности применяются изоморфные ГЧС, то и результаты умножения также будут изоморфными между собой. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.

Пусть: $Г_2(f,m) \simeq Г_3(g,m)$.

Тогда $Д(Г_1(e,n),Г_2(f,m)) \simeq Д(Г_1(e,n),Г_3(g,m))$, т.е. умножение размерности одной и той же ГЧС изоморфными ГЧС приводит к изоморфным ГЧС.

Для доказательства необходимо показать существование невырожденного линейного преобразования, связывающего базисы полученных ГЧС.

Пусть: $Д(\Gamma_1(e,n),\Gamma_2(f,m)) = \Gamma_4(ef,nm)$, $Д(\Gamma_1(e,n),\Gamma_3(g,m)) = \Gamma_5(eg,mn)$.

Так как $Г_2 \simeq Г_3$, то существует линейное преобразование L_1, переводящее базис (f) в базис (g):

$$L_1 : f_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} g_j, \forall i = 1,...,m, \quad \det\left\|\alpha_{ij}\right\| \neq 0. \tag{10}$$

Тогда базис (ef) преобразуется так:

$$e_k f_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} e_k g_j \ , \ \forall i \ =1,...,m, \ \ \forall k = 1,...,m\,. \tag{11}$$

Это также линейное преобразование, матрица которого имеет размеры $mn \times mn$. В каждой строке матрицы только m ненулевых элементов α_{ij}. Это линейное преобразование можно построить таким образом, что на главной диагонали его матрицы располагаются n квадратных матриц линейного преобразования $L_1(m \times m)$, так что определитель этого линейного преобразования равен $(\det L_1)^n \neq 0$.

Для более наглядного представления распишем подробно структуру линейного преобразования для случая $n = 3$, $m = 2$.

Пусть:

$$f_1 = \alpha_{11}g_1 + \alpha_{12}g_2,$$
$$f_2 = \alpha_{21}g_1 + \alpha_{22}g_2.$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
e_1f_1 &= \alpha_{11}e_1g_1 + \alpha_{12}e_1g_2 + 0\cdot e_2g_1 + 0\cdot e_2g_2 + 0\cdot e_3g_1 + 0\cdot e_3g_2,\\
e_1f_2 &= \alpha_{21}e_1g_1 + \alpha_{22}e_1g_2 + 0\cdot e_2g_1 + 0\cdot e_2g_2 + 0\cdot e_3g_1 + 0\cdot e_3g_2,\\
e_2f_1 &= 0\cdot e_1g_1 + 0\cdot e_1g_2 + \alpha_{11}e_2g_1 + \alpha_{12}e_2g_2 + 0\cdot e_3g_1 + 0\cdot e_3g_2,\\
e_2f_2 &= 0\cdot e_1g_1 + 0\cdot e_1g_2 + \alpha_{21}e_2g_1 + \alpha_{22}e_2g_2 + 0\cdot e_3g_1 + 0\cdot e_3g_2,\\
e_3f_1 &= 0\cdot e_1g_1 + 0\cdot e_1g_2 + 0\cdot e_2g_1 + 0\cdot e_2g_2 + \alpha_{11}e_3g_1 + \alpha_{12}e_3g_2,\\
e_3f_2 &= 0\cdot e_1g_1 + 0\cdot e_1g_2 + 0\cdot e_2g_1 + 0\cdot e_2g_2 + \alpha_{21}e_3g_1 + \alpha_{22}e_3g_2.
\end{aligned}$$

Вполне очевидно, что детерминант матрицы этого линейного преобразования равен:

$$\Delta = \left(\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \right)^3 .$$

Учитывая (10), $\Delta \neq 0$.

В общем случае получим:

$$\Delta = (\det \|\alpha_{ij}\|)^n \neq 0 .$$

Таким образом, показано существование невырожденного линейного преобразования, переводящего базис $\Gamma_4(ef, nm)$ в базис $\Gamma_5(eg, mn)$. А значит, эти ГЧС изоморфны:

$$Д(\Gamma_1(e,n), \Gamma_2(f,m)) \simeq Д(\Gamma_1(e,n), \Gamma_3(g,m)),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть есть две пары изоморфных между собой систем

$$\Gamma_1(e,n) \simeq \Gamma_3(f,m) \text{ и } \Gamma_2(g,n) \simeq \Gamma_4(h,m),$$

так, что

$$e = L_1 g \text{ , или } e_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} g_j ,\ f = L_2 h \text{, или } f_k = \sum_{l=1}^{m} \beta_{kl} h_l .$$

Что можно сказать о связи между системами $Д(\Gamma_1(e,n),\Gamma_2(f,m))$ и $Д(\Gamma_3(g,n),\Gamma_4(h,m))$, полученными умножениями размерности? Их изоморфизм вытекает из теорем 1 и 2:

$$Д(\Gamma_1(e,n),\Gamma_2(f,m)) \simeq Д(\Gamma_1(e,n),\Gamma_4(f,m)) = Д(\Gamma_4(e,n),\Gamma_1(f,m)) \simeq$$
$$\simeq Д(\Gamma_4(e,n),\Gamma_3(f,m)) = Д(\Gamma_3(e,n),\Gamma_4(f,m)).$$

Возникает вопрос, как построить линейное преобразование, связывающее системы $Д(\Gamma_1(e,n),\Gamma_2(f,m))$ и $Д(\Gamma_3(g,n),\Gamma_4(h,m))$?

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3.

Пусть: $\Gamma_1(e,n) \simeq \Gamma_3(f,n)$ и $\Gamma_2(g,m) \simeq \Gamma_4(h,m)$, $e = L_1 g$, $f = L_2 h$.

Тогда $Д(\Gamma_1(e,n),\Gamma_2(f,m)) = \Gamma_5(ef,mn) \simeq \Gamma_6(gh,mn) = Д(\Gamma_3(g,n),\Gamma_4(h,m))$, и существует невырожденное линейное преобразование, переводящее базис (ef) в базис (gh).

Первая часть утверждения доказана выше. Искомое линейное преобразование строится так:

$$e_i f_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} g_j \cdot \sum_{l=1}^{m} \beta_{kl} h_l = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \alpha_{ij}\beta_{kl} g_j h_l; \quad \forall i = 1,\dots,n; \forall k = 1,\dots,m. \qquad (12)$$

Невырожденность этого линейного преобразования можно доказать так же, как и при доказательстве Теоремы 2.

Таким образом, путь построения высокоразмерных ГЧС состоит в следующем: берется 2 пары изоморфных ГЧС и, в соответствии с Теоремой 2, строится пара изоморфных ГЧС, размерности, равной произведению размерностей исходных ГЧС, а, в соответствии с Теоремой 3, строится оператор изоморфизма, который позволяет выполнять вычисления в слабозаполненной ГЧС и переносить результат в сильнозаполненную ГЧС.

Выводы

В статье изложены и теоретически обоснованы возможности получения высокоразмерных изоморфных ГЧС с помощью процедуры умножения размерностей, рассмотрены свойства процедуры умножения. В дальнейшем будут приведены примеры получения высокоразмерных ГЧС со слабо- и сильнозапоненными таблицами умножения.

1. *Дослідження* та використання гіперкомплексних числових систем в задачах динаміки, кінематіки та кодування інформації застосування / [Синьков М.В., Каліновський Я.О., Боярінова Ю.Є. та ін.] // Пріоритети наукової співпраці ДФФД і БРФФД. — К., 2007. — С. 21–34. — (Бібліотека Держфонду фундаментальних досліджень).

2. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / Синьков М.В., Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

3. *Chaitin-Chatelin F.* Computation with Hypercomplex Numbers [Электронный ресурс] / F. Chaitin-Chatelin, T. Meskauskas, A. Zaoui // GERFACS Technical Report TR/PA/00/69. — Режим доступа: http://www.gerfacs.fr (2000).

4. *Сильвестров В.В.* Системы чисел / В.В. Сильвестров // Соросовский образовательный журнал. — 1998. — № 8. — С. 121–127.

5. *Baez J.C.* The Octonions [Электронный ресурс] / J.C. Baez. — Режим доступа: http://math/ucr.edu/home/baez/Octonions/ octonions.html (2001).

6. *Chaitin-Chatelen F.* Geometry and Algebra [Электронный ресурс] / F. Chaitin-Chatelen, T. Meskauskas, A. Zaoui // CERFACS Technical Report TR/PA/00/74. — Режим доступа: http://www.cerfacs.fr/algor/reports/2000/TR-PA-00-74.ps.gz (2000).

7. *Chaitin-Chatelen F.* The Computing Power of Geometry [Электронный ресурс] / F. Chaitin-Chatelin // CERFACS Technical Report TR/PA/99/74. — Режим доступа: http://www.cerfacs.fr/algor/ reports/2000/ TR-PA-99-74.ps.gz (1999).

8. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Наука, 1973. — 144с.

Поступила в редакцию 01.09.2011