УДК 004.942

Я. А. Калиновский
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Критерии представляемости коммутативных гиперкомплексных числовых систем прямой суммой систем низших размерностей

Рассмотрены критерии представляемости коммутативных гиперкомплексных числовых систем прямой суммой систем низших размерностей, позволяющие построить эффективные алгоритмы классификации гиперкомплексных числовых систем.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, коммутативность, изоморфизм, экспонента, базис, прямая сумма.*

Вступление

Множество коммутативных гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) фиксированной размерности даже для одного и того же кольца, над которым они построены, включает большое количество систем. Поэтому при изучении множественности ГЧС весьма важным является вопрос их классификации. Сейчас не существует общепринятой классификации ГЧС. Приведем наиболее значительные признаки, по которым можно классифицировать ГЧС [1]:

1) размерность;
2) принадлежность к классу изоморфизмов;
3) свойства закона композиции;
4) структурные свойства;
5) каноничность;
6) присутствие в базисе единичного элемента;
7) наличие в системе делителей единицы;
8) наличие делителей нуля.

Отношение изоморфизма разбивает все множество ГЧС одной размерности на некоторое количество классов, которые называются классами изоморфизмов. Классификация систем по этому признаку распределяет множество систем на классы очень близких, а по сути эквивалентных по свойствам гиперкомплексных систем [2, 3].

© Я. А. Калиновский

По структурным особенностям ГЧС делятся на два типа:

— прямые суммы или сводимые к ним путем линейного преобразования базиса;

— не сводимые к прямым суммам.

Изучение структурных свойств ГЧС важно в том плане, что знание структуры ГЧС значительно облегчает изучение изоморфизма ГЧС. Как показывают исследования [4–6], последняя задача является во многих случаях весьма трудоемкой. Поэтому в данной работе уделено внимание именно определению критерия представляемости коммутативных гиперкомплексных числовых систем прямой суммой систем низших размерностей.

Примеры определения структурных особенностей ГЧС

В некоторых простых случаях структурные особенности ГЧС видны, что называется, невооруженным глазом. Так, например, сразу видно, что ГЧС $W_1(e,2)$ (здесь и далее по классификации [1]) с таблицей умножения

W_1	e_1	e_2
e_1	e_1	0
e_2	0	e_2

(1)

есть прямая сумма двух систем вещественных чисел $W_1 = \overset{2}{\underset{i=1}{\oplus}} R_i$. В то же время о ГЧС $W(f,2)$ с таблицей умножения

W	f_1	f_1
f_1	f_1	f_2
f_1	f_2	f_1

(2)

на первый взгляд ничего сказать нельзя. Но непосредственной проверкой можно убедиться, что базисы систем $W(f,2)$ и $W_1(e,2)$ связаны линейным преобразованием L:

$$L:\begin{cases} f_1 = e_1 + e_2, \\ f_2 = e_1 - e_2, \end{cases} \tag{3}$$

то есть система $W(f,2)$ также принадлежит к классу прямых сумм.

Рассмотрим более сложный пример. Пусть дана гиперкомплексная система 8-й размерности $\Gamma_1(e,8) = Д(W(h,2), K(g,4))$, полученная умножением размерности ГЧС двойных чисел $W(h,2)$ размерности 2 системой квадриплексных чисел

$K(g,4)$ размерности 4. Это будет ГЧС размерности $n=8$ со следующей таблицей умножения:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$	e_6	$-e_5$	e_8	$-e_7$
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$	e_7	e_8	$-e_5$	$-e_6$
e_4	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	e_8	$-e_7$	$-e_6$	e_5
e_5	e_5	e_6	e_7	e_8	e_1	e_2	e_3	e_4
e_6	e_6	$-e_5$	e_8	$-e_7$	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_7	e_7	e_8	$-e_5$	$-e_6$	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_8	e_8	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1

(4)

Ей изоморфна ГЧС $\Gamma_2(f,8)=Д(W_1(h,2),C\oplus C(g,4))$ со слабозаполненной таблицей умножения диагонального вида, полученная умножением размерности ГЧС двойных чисел $W_1(h,2)$ размерности 2 системой бикомплексных чисел $C\oplus C(g,4)$:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f_1	f_1	f_2	0	0	0	0	0	0
f_2	f_2	$-f_1$	0	0	0	0	0	0
f_3	0	0	f_3	f_4	0	0	0	0
f_4	0	0	f_4	$-f_3$	0	0	0	0
f_5	0	0	0	0	f_5	f_6	0	0
f_6	0	0	0	0	f_6	$-f_5$	0	0
f_7	0	0	0	0	0	0	f_7	f_8
f_8	0	0	0	0	0	0	f_8	$-f_7$

Их изоморфизм определяется следующим линейным преобразованием элементов базисов:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= f_1+f_3+f_5+f_7, & e_5 &= f_1+f_3-f_5-f_7,\\
e_2 &= -f_2+f_4-f_6+f_8, & e_6 &= -f_2+f_4+f_6-f_8,\\
e_3 &= -f_2-f_4-f_6-f_8, & e_7 &= -f_2-f_4+f_6+f_8,\\
e_4 &= -f_1+f_3-f_5+f_7, & e_8 &= -f_1+f_3+f_5-f_7
\end{aligned}
$$

и обратным:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{4}(e_1 - e_4 + e_5 - e_8), & f_5 &= \frac{1}{4}(e_1 - e_4 - e_5 + e_8),\\
f_2 &= \frac{1}{4}(-e_2 - e_3 - e_6 - e_7), & f_6 &= \frac{1}{4}(-e_2 - e_3 + e_6 + e_7),\\
f_3 &= \frac{1}{4}(e_1 + e_4 + e_5 + e_8), & f_7 &= \frac{1}{4}(e_1 + e_4 - e_5 - e_8),\\
f_4 &= \frac{1}{4}(e_2 - e_3 + e_6 - e_7), & f_8 &= \frac{1}{4}(e_2 - e_3 - e_6 + e_7).
\end{aligned} \qquad (5)$$

Таким образом, можно утверждать, что ГЧС $\Gamma_1(e,8)$ является прямой суммой четырех систем комплексных чисел:

$$\Gamma_1 = \bigoplus_{i=1}^{4} C_i, \qquad (6)$$

хотя по внешнему виду таблицы (4) придти к такому выводу непросто.

Прямой метод решения задачи определения возможности представления коммутативной ГЧС прямой суммой систем низших размерностей

Прямой метод решения данной задачи выглядит так. Пусть дана коммутативная ГЧС размерности n. Необходимо взять множество представителей классов изоморфизмов ГЧС размерности n, которые являются прямыми суммами, и определить, является ли данная ГЧС изоморфной представителю одного из классов изоморфизмов. Если является, то данная ГЧС — прямая сумма таких же систем, что и этот представитель. Если же не найдется ни одного класса изоморфизмов, которому данная ГЧС изоморфна, то эта ГЧС не является прямой суммой систем низших размерностей и никаким способом неразложима.

Как видно, этот процесс очень трудоемкий. Кроме того, для его выполнения необходимо иметь перечень всех классов изоморфизмов размерностей $< n$, представители которых являются неразложимыми. Их количество может быть достаточно большим. Необходимо также учитывать, что решение задачи определения изоморфизма двух ГЧС, как отмечалось выше, может быть весьма трудоемким, а тем более ее придется решать много раз.

В данной работе для решения задачи определения возможности представления ГЧС прямой суммой систем низших размерностей предлагается применить представление экспоненциальной функции [1] в рассматриваемой ГЧС. Как показано в [2], по нормализованной форме представления экспоненты можно полностью восстановить структуру рассматриваемой ГЧС с точностью до неразложимых систем низших относительно n размерностей n_1 при условии: $2 < n_1 < n$, что объясняется существованием только двух неразложимых систем: комплексных и дуальных чисел, которые легко идентифицируются при помощи нормализованных форм представления их экспонент.

Метод построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим, прежде всего, метод, позволяющий в общем случае построить представление экспоненты от гиперкомплексного переменного. Это метод построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений [1].

Представление экспоненты в системе $\Gamma(e,n)$ от числа $M \in \Gamma(e,n)$, которое будем обозначать $Exp(M)$, есть частное решение гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{X} = MX \tag{7}$$

при начальном условии

$$Exp(0) = \varepsilon \,, \tag{8}$$

где ε — единичный элемент системы $\Gamma(e,n)$.

Для построения решения гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения (7) его необходимо представить в векторно-матричной форме. При этом

$$\dot{\overline{X}} = (\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)^T \,, \tag{9}$$

а вектор-столбец $\overline{MX}$, полученный из гиперкомплексного числа MX, можно представить в виде матричного произведения некоторой матрицы M размерами $n \times n$, элементы которой есть линейные комбинации компонентов гиперкомплексного числа M, на вектор-столбец $\overline{X}$:

$$\overline{MX} = \mathrm{M}\overline{X} \,. \tag{10}$$

Тогда гиперкомплексное уравнение (7) превратится в систему из n линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая называется ассоциированной системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\overline{X}} = \mathrm{M}\overline{X} \,. \tag{11}$$

Далее необходимо найти характеристические числа $\lambda_1,...,\lambda_n$ матрицы M, то есть решить характеристическое уравнение

$$\det(\mathrm{M} - \lambda E) = 0 \,. \tag{12}$$

Таким образом, характеристические числа — корни этого уравнения $\lambda_1,...,\lambda_n$ будут функциями от компонентов числа $\overline{M}$.

Критерии представляемости коммутативных ГЧС прямой суммой систем низших размерностей

Как следует из [4, 5], представление экспоненты будет суммой n слагаемых, каждое из которых — одночлен, у которого в случае некратных корней два сомножителя: гиперкомплексная произвольная постоянная с вещественными или комплексными коэффициентами и экспонента от вещественного или комплексного характеристического корня. При этом следует отметить, что все комплексные корни могут быть только у ГЧС четной размерности, и они образуют $\frac{n}{2}$ различных комплексно-сопряженных пар, а комплексные константы у одночленов с комплексно-сопряженными характеристическими корнями в показателях экспонент будут также комплексно-сопряженными. В случае n-кратного вещественного корня гиперкомплексные произвольные постоянные — полиномы $(n-1)$-й степени с вещественными коэффициентами, а экспоненты имеют один и тот же показатель — n-кратный вещественный корень. Если же характеристические корни кратные и комплексные, то есть $\frac{n}{2}$ одинаковых пар комплексно сопряженных корней, то полиномы имеют комплексные коэффициенты, и при экспонентах с комплексно-сопряженными показателями их коэффициенты также комплексно сопряжены.

Также в работах [5, 6] показано, что структура нормализованной формы представления ГЧС полностью отражает структуру ГЧС, что можно выразить в следующих критериях.

1. Если все корни характеристического уравнения (12) вещественны и кратны, то ГЧС неразложима в прямую сумму ГЧС низших размерностей.

2. Если размерность n ГЧС — четная, и корни характеристического уравнения (12) представляют собой $\frac{n}{2}$ одинаковых пар комплексно-сопряженных корней, то ГЧС неразложима в прямую сумму ГЧС низших размерностей.

3. Во всех остальных случаях ГЧС разложима в прямую сумму ГЧС низших размерностей. При этом:

— каждому простому вещественному корню в прямой сумме соответствует система вещественных чисел R;

— каждой паре комплексно-сопряженных корней — система комплексных чисел C;

— каждому множеству вещественных корней кратности 2 — система дуальных чисел D;

— каждому множеству вещественных корней кратности n_1 ($2 < n_1 < n$) — неразложимая ГЧС размерности n_1;

— каждому множеству пар комплексно-сопряженных корней кратности n_1 ($2n_1 < n$) — неразложимая ГЧС размерности n_1.

Примеры

В данном разделе будут приведены для некоторых ГЧС их таблицы умножения, корни характеристического уравнения (12) и результаты применения критериев представимости коммутативных ГЧС прямой суммой систем низших размерностей.

1. Система комплексных чисел C.

C	e_1	e_1
e_1	e_1	e_2
e_1	e_2	$-e_1$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = m_1 \pm i m_2$.

Система C неразложима.

2. Система двойных чисел W.

W	e_1	e_1
e_1	e_1	e_2
e_1	e_2	$-e_1$

$\lambda_1 = m_1 + m_2$, $\lambda_2 = m_1 - m_2$.

$W \Rightarrow R_1 \oplus R_1$.

3. Система дуальных чисел D.

D	e_1	e_1
e_1	e_1	e_2
e_1	e_2	0

$\lambda_{1,2} = m_1$.

Система D неразложима.

4. Система триплексных чисел T.

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$(e_3 - e_1/2)$	$-e_2$
e_3	e_e	$-e_2$	e_1

$\lambda_1 = m_1 + m_3$; $\lambda_{2,3} = m_1 - m_3 \pm i m_2$.

$T \Rightarrow R \oplus C$.

5. Система вещественно-комплексных чисел $R \oplus C$.

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	0
e_2	0	e_2	e_3
e_3	0	e_3	$-e_1$

$\lambda_1 = m_1$, $\lambda_{2,3} = m_2 \pm i m_3$.

$R \oplus C$.

6. Система $\Gamma_{31}(e,3)$.

Γ_{31}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	0	0
e_3	e_3	0	0

$\lambda_{1,2,3} = m_1$.

Система $\Gamma_{31}(e,3)$ неразложима.

7. Система $\Gamma_{31}(f,3)$.

Γ_{32}	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	0
f_3	f_3	0	0

$\lambda_{1,2,3} = m_1$.

Система $\Gamma_{32}(f,3)$ неразложима.

8. Система квадриплексных чисел $K(e,4)$.

K	e_1	e_2	e_3	e
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_4	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1

$\lambda_{1,2} = m_1 - m_4 \pm i(m_2 + m_3)$,

$\lambda_{3,4} = m_1 + m_4 \pm i(-m_2 + m_3)$.

$K \Rightarrow C \oplus C$.

9. Система бикомплексных чисел $C \oplus C$.

$C \oplus C$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	0	0
e_2	e_2	$-e_1$	0	0
e_3	0	0	e_3	e_4
e_4	0	0	e_4	$-e_3$

Корни характеристического уравнения.

$\lambda_{1,2} = m_1 \pm im_2$, $\lambda_{3,4} = m_3 \pm im_4$.

$C \oplus C$.

10. Система гиперкомплексных чисел Γ_{41}.

Γ_{41}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	0	0
e_4	e_4	$-e_3$	0	0

$\lambda_{1,2} = m_1 \pm im_2$, $\lambda_{3,4} = m_1 \pm im_2$.

Γ_{41} — неразложима.

11. Системы гиперкомплексных чисел Γ_{44}, Γ_{45}.

Γ_{44}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	0	0
e_3	e_3	0	e_4	0
e_4	e_4	0	0	0

Γ_{44}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	0	0
e_3	e_3	0	$-e_4$	0
e_4	e_4	0	0	0

$\lambda_{1,2,3,4} = m_1$.

Γ_{44}, Γ_{45} — неразложимы.

12. Система $\Gamma(e,8)$.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$	e_6	$-e_5$	e_8	$-e_7$
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$	e_7	e_8	$-e_5$	$-e_6$
e_4	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	e_8	$-e_7$	$-e_6$	e_5
e_5	e_5	e_6	e_7	e_8	e_1	e_2	e_3	e_4
e_6	e_6	$-e_5$	e_8	$-e_7$	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_7	e_7	e_8	$-e_5$	$-e_6$	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_8	e_8	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1

$$\lambda_{1,2} = n_1 - n_4 + n_5 - n_8 \pm i(-n_2 - n_3 - n_6 - n_7),$$
$$\lambda_{3,4} = n_1 + n_4 + n_5 + n_8 \pm i(n_2 - n_3 + n_6 - n_7),$$
$$\lambda_{5,6} = n_1 - n_4 - n_5 + n_8 \pm i(-n_2 - n_3 + n_6 + n_7),$$
$$\lambda_{7,8} = n_1 + n_4 - n_5 - n_8 \pm i(n_2 - n_3 - n_6 + n_7).$$
$$\Gamma(e,8) \Rightarrow C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4.$$

Выводы

Полученные в работе критерии представляемости коммутативных гиперкомплексных числовых систем прямой суммой систем низших размерностей позволяют классифицировать ГЧС по этому признаку без решения высокоразмерных систем квадратичных уравнений, представляющих собой условия изоморфизма.

1. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Наука, 1973. — 144с.
2. *Чеботарев Н.Г.* Введение в теорию алгебр / Н.Г. Чеботарев. — М.: ЛКИ, 2008. — 90 с.
3. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре / А.Г. Курош. — М.: Наука, 1973. — 400 с.
4. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.
5. *Калиновский Я.А.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2012. — 183 с.
6. *Калиновский Я.А.* Нормализованная форма представления экспоненциальной функции в коммутативных гиперкомплексных числовых системах / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2011. — Т. 13, № 4. — С. 12–22.
7. *Poonen B.* Isomorphism Types of Commutative Algebras of Finite Rank Jver an Algebraically Closed Field / B. Poonen // Computational Arithmetic Geometry (ed. by K. Lauter and K. Ribet), Contemporary Math. — 463 (2008), Amer. Math. Soc. — P. 111–120.
8. *De Graaf W.A.* Classification of Nilpotent Associative Algebras of small Dimension. arXiv:1009.5339v1 [math. RA]. — 27 Sep. 2010. — P. 10.
9. *Петухов С.В.* Гиперкомплексные числа и алгебраическая система генетических алфавитов. Элементы алгебраической генетики / С.В. Петухов // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2011. — Т. 8, № 2(16). — С. 118–139.

Поступила в редакцию 26.11.2012