УДК 004.942

Я. А. Калиновский, Т. С. Синькова
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Алгоритмы быстрого вычисления циклической свертки с представлением дискретных сигналов гиперкомплексными числами

Представлены методы синтеза алгоритмов быстрого вычисления циклической свертки числовых массивов длиной 2^n. Эти методы базируются на представлении их в специальных гиперкомплексных числовых системах, которые имеют такие изоморфные им системы, что выполнение гиперкомплексных операций в них требует меньшего количества вещественных операций.

Ключевые слова: *циклическая свертка, гиперкомплексная числовая система, изоморфизм, базис, количество операций.*

Введение

Циклическая свертка дискретных сигналов, наряду с линейной, является наиболее общей вычислительной задачей в области цифровой обработки сигналов. Исследования, представленные в данной статье, являются продолжением исследований, выполненных в работе [1].

В данной работе используются те же обозначения, что и в [1]. Особенно это касается обозначений различных гиперкомплексных числовых систем (ГЧС), используемых для построения алгоритмов быстрого вычисления циклической свертки.

Постановка задачи

Пусть необходимо выполнить циклическую свертку двух числовых массивов длиной $N = 2^n$. Как известно, i-я компонента циклической свертки вычисляется по формуле [2–4]:

$$C[i] = \sum_{k=0}^{N-1} x[(i-k)(\mathrm{mod}\ N)] \cdot y[k]. \tag{1}$$

Будем рассматривать члены сворачиваемых числовых массивов как компоненты гиперкомплексных чисел, принадлежащих некоторой ГЧС Γ_1 размерностью

$\dim \Gamma_1 = 2^n$, то есть числовой массив $\{x[0], x[1], ..., x[N-1]\}$ представляется гиперкомплексным числом

$$X = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] e_i \in \Gamma_1, \qquad (2)$$

где $\{e_0, e_1, ..., e_N\}$ — базис системы Γ_1.

Точно так же:

$$Y = \sum_{i=0}^{N-1} y[i] e_i \in \Gamma_1. \qquad (3)$$

Гиперкомплексное произведение этих чисел будет содержать парные произведения компонентов свертываемых числовых массивов. Однако они будут комбинироваться в суммы не в таком составе, как это нужно для организации компонентов свертки. Кроме того, число вещественных умножений при умножении гиперкомплексных чисел в общем случае равно 2^{2n}, то есть столько же, как и при прямом вычислении свертки, то есть, нет никакого выигрыша.

Таким образом, здесь возникают две проблемы: первая — это снижение количества вещественных операций при умножении гиперкомплексных чисел; вторая — организация выбора парных произведений компонентов свертки. Решение этих двух проблем позволяет синтезировать такие алгоритмы свертки, которые будут по количеству операций эффективнее других алгоритмов выполнения свертки.

Для решения первой проблемы можно перейти в такую ГЧС, изоморфную исходной, таблица умножения которой заполнена слабо. Такие пары ГЧС существуют и описаны в работах [5, 6]. Переход между такими ГЧС требует выполнения только операций сложения вещественных чисел.

Решение второй проблемы зависит от конкретного вида используемых ГЧС и будет рассмотрено ниже.

Существует большое количество методов быстрого вычисления линейной и циклической свертки. С некоторыми из них можно познакомиться в работах [2–4, 7] и многих других

Циклическая свертка с использованием ГЧС

Циклическая свертка двух числовых последовательностей рассчитывается по формуле (1), откуда следует, что для непосредственного расчета 2^n отсчетов циклической свертки необходимо выполнить 2^{2n} умножений и $2^n(2^n-1)$ сложений. Представление числовых последовательностей длиной 2^n гиперкомплексными числами размерности длиной 2^n, принадлежащими ГЧС $W^{(n)}(e, 2^n)$ и дальнейший переход к изоморфной ГЧС $W_1^{(n)}(f, 2^n)$, позволяет значительно снизить количество вещественных операций. Рассмотрим некоторые случаи.

1. $n = 1$.

Пусть необходимо вычислить циклическую свертку двух числовых последовательностей: $\{x[0], x[1]\}$ и $\{y[0], y[1]\}$. В соответствии с (1) свертка будет иметь два отсчета:

$$\begin{aligned} z[0] &= x[0]y[0] + x[1]y[1], \\ z[1] &= x[0]y[1] + x[1]y[0]. \end{aligned} \tag{4}$$

Как видно, для вычисления данной свертки необходимо выполнить 4 вещественных умножения и 2 сложения.

Будем рассматривать элементы последовательностей $\{x[0], x[1]\}$ и $\{y[0], y[1]\}$ как компоненты гиперкомплексных чисел, принадлежащие ГЧС размерности 2 — $W(e,2)$:

$$X = x[0]e_0 + x[1]e_1. \tag{5}$$

$$Y = y[0]e_0 + y[1]e_1. \tag{6}$$

В соответствии с таблицей умножения ГЧС $W(e,2)$:

$$XY = (x[0]y[0] + x[1]y[1])e_0 + (x[0]y[1] + x[1]y[0])e_1. \tag{7}$$

Правая часть выражения (7) содержит все компоненты, необходимые для формирования свертки (4). Компонента при e_0 полностью совпадает с отсчетом $z[0]$, а компонента при e_1 — с отсчетом $z[1]$. Но количество вещественных умножений также равно 4, как и в (4). Таким образом, возникает необходимость уменьшить число умножений в (7).

Для уменьшения количества умножений целесообразно перейти из системы $W(e,2)$ в систему $W_1(f,2)$:

$$X_1 = (x[0] + x[1])f_0 + (x[0] - x[1])f_1. \tag{8}$$

$$Y_1 = (y[0] + y[1])f_0 + (y[0] - y[1])f_1. \tag{9}$$

Такой переход требует дополнительно 4 сложения. Однако, учитывая, что обычно числовая последовательность сворачивается с постоянным ядром, переход элементов которого в $W_1(f,2)$ сделан заранее, то можно считать, что переход из системы $W(e,2)$ в систему $W_1(f,2)$ требует только 2 сложения.

Умножение чисел (8) и (9) в соответствии с таблицей умножения $W_1(f,2)$ выглядит так:

$$X_1Y_1 = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 = (x[0] + x[1])(y[0] + y[1])f_0 + (x[0] - x[1])(y[0] - y[1])f_1 \tag{10}$$

и требует всего 2 умножения.

Обратный переход из $W_1(f,2)$ в систему $W(e,2)$ в соответствии с правым преобразованием (2) в [1] будет иметь вид

$$XY = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} e_0 + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2} e_1, \tag{11}$$

что также требует 2 сложения. Деление на 2 — это короткая операция, требующая только сдвига регистра. Поэтому ее можно не учитывать.

Приравнивая правые части (10) и (11), получим:

$$x[0]y[1] + x[1]y[0] = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}, \tag{12}$$

$$x[0]y[0] + x[1]y[1] = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}. \tag{13}$$

Таким образом, для вычисления отсчетов циклической свертки с применением ГЧС в случае $n = 1$ требуется 2 умножения и 4 сложения.

2. $n = 2$.

Циклическая свертка числовых массивов длиной $N = 2^n = 4$ будет иметь четыре отсчета:

$$\begin{aligned}
z[0] &= x[0]y[0] + x[1]y[1] + x[2]y[2] + x[3]y[3],\\
z[1] &= x[0]y[1] + x[1]y[2] + x[2]y[3] + x[3]y[0],\\
z[2] &= x[0]y[2] + x[1]y[3] + x[2]y[0] + x[3]y[1],\\
z[3] &= x[0]y[3] + x[1]y[0] + x[2]y[1] + x[3]y[2].
\end{aligned} \tag{14}$$

Для вычислений (14) необходимо выполнить 16 умножений и 12 сложений.

Представим числовые массивы в виде (2) и (3)

Тогда в соответствии с таблицей умножения ГЧС $W^{(2)}(e,4)$ произведение XY имеет вид

$$XY = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i e_i, \tag{15}$$

где компоненты α_i таковы:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= x[0]y[0] + x[1]y[1] + x[2]y[2] + x[3]y[3],\\
\alpha_1 &= x[0]y[1] + x[1]y[0] + x[2]y[3] + x[3]y[2],\\
\alpha_2 &= x[0]y[2] + x[1]y[3] + x[2]y[0] + x[3]y[1],\\
\alpha_3 &= x[0]y[3] + x[1]y[2] + x[2]y[1] + x[3]y[0].
\end{aligned} \tag{16}$$

Для вычисления компонентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ необходимо, как и в (14), выполнить 16 умножений и 12 сложений. Для уменьшения количества умножений можно, как в (14) перевести числа X и Y из ГЧС $W^{(2)}(e,4)$ в изоморфную диагональную ГЧС $W_1^{(2)}(f,4)$, выполнить там умножение, и полученное произведение перевести обратно в ГЧС $W^{(2)}(e,4)$, получив тем самым число XY, компоненты которого и есть $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. На это необходимо уже всего 4 умножения и 16 сложений.

Если обозначить

$$\beta = x[0]y[1] + x[2]y[3], \quad \gamma = x[1]y[2] + x[3]y[0],$$

то из сравнения (14) и (16) можно установить:

$$z[0] = \alpha_0; \;\; z[1] = \beta + \gamma; \;\; z[2] = \alpha_2; \;\; z[3] = \alpha_1 + \alpha_3 - (\beta + \gamma). \tag{17}$$

Для этих вычислений требуется 4 умножения и 3 сложения. Всего на все вычисления отсчетов циклической свертки четвертого порядка необходимо 8 умножений и 19 сложений.

3. $n = 3$.

Для упрощения вида выкладок и экономии места будем использовать индексную форму записи суммы парных произведений, которая заключается в том, что вместо произведения $x[i]y[j]$ будем записывать только индексы сомножителей через запятую. Для обозначения индексной записи будем ее брать в круглые скобки, а вместо знака равенства ставить значки $\rhd$ и $\lhd$, как показано ниже:

$$\beta = x[0]y[1] + x[2]y[3] \rhd (0,1 + 2,3); \quad (1,2 + 3,0) \lhd x[1]y[2] + x[3]y[0].$$

При такой двухзначной индексации запись приобретает необходимое в данном случае свойство непозиционности, а, значит, и возможность перестановки слагаемых.

Циклическая свертка числовых массивов длиной $2^n = 8$ $\{x[0],...,x[7]\}$ и $\{y[0],...,y[7]\}$ будет иметь 8 отсчетов и в индексной форме записи примет вид:

$$\begin{aligned}
z[0] &\rhd (0,0+1,1+2,2+3,3+4,4+5,5+6,6+7,7),\\
z[1] &\rhd (0,1+1,2+2,3+3,4+4,5+5,6+6,7+7,0),\\
z[2] &\rhd (0,2+1,3+2,4+3,5+4,6+5,7+6,0+7,1),\\
z[3] &\rhd (0,3+1,4+2,5+3,6+4,7+5,0+6,1+7,2),\\
z[4] &\rhd (0,4+1,5+2,6+3,7+4,0+5,1+6,2+7,3),\\
z[5] &\rhd (0,5+1,6+2,7+3,0+4,1+5,2+6,3+7,4),\\
z[6] &\rhd (0,6+1,7+2,0+3,1+4,2+5,3+6,4+7,5),\\
z[7] &\rhd (0,7+1,0+2,1+3,2+4,3+5,4+6,5+7,6).
\end{aligned} \tag{18}$$

Для вычислений в (18) необходимо выполнить 64 умножения и 56 сложений.

Если числовые последовательности $\{x[0],...,x[7]\}$ и $\{y[0],...,y[7]\}$ представить в виде гиперкомплексных чисел из системы $W^{(3)}(e,8)$, то в соответствии с таблицей умножения ГЧС $W^{(3)}(e,8)$ произведение XY имеет вид

$$XY = \sum_{i=0}^{7} \alpha_i e_i \,, \tag{19}$$

где компоненты α_i таковы:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 \rhd (0,0+1,1+2,2+3,3+4,4+5,5+6,6+7,7),\\
&\alpha_1 \rhd (0,1+1,0+2,3+3,2+4,5+5,4+6,7+7,6),\\
&\alpha_2 \rhd (0,2+1,3+2,0+3,1+4,6+5,7+6,4+7,5),\\
&\alpha_3 \rhd (0,3+1,2+2,1+3,0+4,7+5,6+6,5+7,4),\\
&\alpha_4 \rhd (0,4+1,5+2,6+3,7+4,0+5,1+6,2+7,3),\\
&\alpha_5 \rhd (0,5+1,4+2,7+3,6+4,1+5,0+6,3+7,2),\\
&\alpha_6 \rhd (0,6+1,7+2,4+3,5+4,2+5,3+6,0+7,1),\\
&\alpha_7 \rhd (0,7+1,6+2,5+3,4+4,3+5,2+6,1+7,0).
\end{aligned} \tag{20}$$

Из сравнения (19) и (20) видно, что два отсчета свертки определяются непосредственно, а именно:

$$z[0] = \alpha_0 ,\; z[4] = \alpha_4 .$$

Остальные отсчеты определяются из следующих соображений. Введем такие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\beta_1 \rhd (1,0+3,2+5,4+7,6)\,, && \beta_6 \rhd (1,4+3,6+5,0+7,2)\,,\\
&\beta_2 \rhd (1,2+5,6)\,, && \beta_7 \rhd (0,3+4,7)\,,\\
&\beta_3 \rhd (3,4+7,0)\,, && \beta_8 \rhd (2,5+6,1)\,,\\
&\beta_4 \rhd (2,0+3,1+6,4+7,5)\,, && \beta_9 \rhd (1,6+5,2)\,,\\
&\beta_5 \rhd (2,4+3,5+6,0+7,1)\,, && \beta_{10} \rhd (3,0+7,4)\,.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&z[1] \rhd \alpha_1 - \beta_1 + \beta_2 + \beta_3\,, && z[5] \rhd \alpha_5 - \beta_6 + \beta_9 + \beta_{10}\,,\\
&z[2] \rhd \alpha_2 - \beta_4 + \beta_5\,, && z[6] \rhd \alpha_6 - \beta_5 - \beta_4\,,\\
&z[3] \rhd \beta_6 + \beta_7 + \beta_8\,, && z[7] \rhd \alpha_3 + \alpha_7 + \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \beta_7 - \beta_8 - \beta_9 - \beta_{10}\,.
\end{aligned}$$

Эти вычисления требуют 28 умножений и 34 сложения.

Для вычисления компонентов $\alpha_0,...,\alpha_7$ необходимо, как и в (18) выполнить 64 умножения и 56 сложений. Для уменьшения количества умножений можно, как и для сверток второго и четвертого порядков, перевести числа X и Y из ГЧС $W^{(3)}(e,8)$ в изоморфную диагональную ГЧС $W_1^{(3)}(f,8)$, выполнить там умножение, и полученное произведение перевести обратно в ГЧС $W^{(3)}(e,8)$, получив тем самым число XY, компоненты которого и есть $\alpha_0,...,\alpha_7$. На это необходимо уже всего 8 умножений и 32 сложения.

Итак, всего для расчета восьми отсчетов циклической свертки требуется 36 умножений и 66 сложений. Однако возможно улучшить этот алгоритм.

Алгоритмы свертки, основанные на циклических сдвигах исходного числового массива

В приведенных выше примерах встречалась ситуация, когда два отсчета циклической свертки полностью совпадали с компонентами произведения гиперкомплексных чисел, являющимися представлениями сворачиваемых числовых массивов. В данном разделе будет показано, что эта ситуация будет встречаться при любой длине сворачиваемых последовательностей 2^n, а также исследованы пути увеличения количества таких совпадений.

Рассмотрим процедуру удвоения Грассмана-Клиффорда [8, 9] в общем случае [6], то есть удвоение системы $W^{(n-1)}(g,2^{n-1})$ системой $W(e,2)$:

$$W^{(n)}(eg,2^n) = Д\left(W\left(e,2\right),W^{(n-1)}(g,2^{n-1})\right) .$$

Схема построения таблицы умножения системы $W^{(n)}(eg,2^n)$ имеет вид:

<table>
<tr><td>$W^{(n)}(eg,2^n)$</td><td>e_1g_1</td><td>e_1g_2</td><td>$\cdots$</td><td>$e_1g_{2^{n-1}}$</td><td>e_2g_1</td><td>e_2g_2</td><td>$\cdots$</td><td>$e_2g_{2^{n-1}}$</td></tr>
<tr><td>e_1g_1</td><td colspan="4" rowspan="4">$e_1e_1W^{(n-1)}(g,2^{n-1})$</td><td colspan="4" rowspan="4">$e_1e_2W^{(n-1)}(g,2^{n-1})$</td></tr>
<tr><td>e_1g_2</td></tr>
<tr><td>…</td></tr>
<tr><td>$e_1g_{2^{n-1}}$</td></tr>
<tr><td>e_2g_1</td><td colspan="4" rowspan="4">$e_1e_2W^{(n-1)}(g,2^{n-1})$</td><td colspan="4" rowspan="4">$e_2e_2W^{(n-1)}(g,2^{n-1})$</td></tr>
<tr><td>e_2g_2</td></tr>
<tr><td>…</td></tr>
<tr><td>$e_2g_{2^{n-1}}$</td></tr>
</table>

(21)

$W^{(n)}(m,2^n)$	m_0	m_1	$\dots$	$m_{2^{n-1}-1}$	$m_{2^{n-1}}$	$m_{2^{n-1}+1}$	$\dots$	m_{2^n-1}
m_0	m_0	m_1			$m_{2^{n-1}}$			
m_1	m_1	m_0				$m_{2^{n-1}}$		
$\dots$			$\dots$				$\dots$	
$m_{2^{n-1}-1}$				m_0				$m_{2^{n-1}}$
$m_{2^{n-1}}$	$m_{2^{n-1}}$				m_0			
$m_{2^{n-1}+1}$		$m_{2^{n-1}}$				m_0		
$\dots$			$\dots$				$\dots$	
m_{2^n-1}				$m_{2^{n-1}}$				m_0

(22)

Перейдем в (21) к односимвольному обозначению базиса и рассмотрим строение главной диагонали таблицы умножения системы $W^{(n)}(m,2^n)=$ $=W^{(n)}(eg,2^n)$, где базис $m=\{m_0,\dots,m_{2^n-1}\}$ есть результат перемножения базисов $e=\{e_1,e_2\}$ и $g=\{g_1,\dots,g_{2^{n-1}}\}$, а также двух ее боковых поддиагоналей, являющихся, в свою очередь, главными диагоналями систем $W^{(n-1)}(g,2^{n-1})$, как показано в (22). Из (22) видно, что если умножаются два числа $X=\sum_{i=0}^{2^n-1}x[i]\,m_i$ и $Y=\sum_{i=0}^{2^n-1}y[i]m_i$, то компоненты произведения $X\cdot Y$ при базисных элементах m_0 и $m_{2^{n-1}}$ будут соответственно такими:

$$\alpha_0=\sum_{i=0}^{2^n-1}x[i]\cdot y[i], \tag{23}$$

$$\alpha_{2^{n-1}}=\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1}x[i]\cdot y[i+2^{n-1}]+\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1}x[i]\cdot y[i-2^{n-1}]. \tag{24}$$

Но такую же структуру имеют и отсчеты циклической свертки $z[0]$ и $z[2^{n-1}]$, то есть, вычислив компоненты α_0 и $\alpha_{2^{n-1}}$, мы тут же без дополнительных операций получаем два отсчета свертки. Можно показать, что других подобных случаев не может быть. Действительно, если упорядочить слагаемые отсчетов циклической свертки 2^n-го порядка по индексам сомножителя x, то индексы второго сомножителя y будут представлять собой циклические ряды упорядоченных индексов от 0 до 2^n-1:

$$
\begin{aligned}
&z[0] : 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ \ldots\ \ 2^n-2\ \ \ 2^n-1,\\
&z[1]\ \ : 1\ \ 2\ \ 3\ \ \ldots\ \ 2^n-2\ \ \ 2^n-1\ 0,\\
&z[2] : 2\ \ 3\ \ \ldots\ \ 2^n-2\ \ \ 2^n-1\ \ 0\ \ 1,\\
&z[3] : 3\ \ \ldots\ \ 2^n-2\ \ \ 2^n-1\ \ 0\ \ 1\ \ 2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&z[2^n-1]:\ 2^n-1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ \ldots\ \ 2^n-2.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

В компонентах произведения $X \cdot Y$ такая цикличность как раз прослеживается только в 0-м и (2^{n-1})-м компонентах. Например, в 1-м компоненте этот ряд индексов сразу начинается «неправильно»: $1\ \ 0\ \ \ldots$.

Как уже отмечено выше, для повышения быстродействия алгоритма свертки целесообразно увеличить количество компонентов произведения $X \cdot Y$, которые совпадали бы с другими отсчетами циклической свертки.

Рассмотрим циклически сдвинутый на ν позиций числовой массив $\{y[i]\}_{i=0}^{2^n-1}$ длиной 2^n. То есть, если исходный массив есть $\{y[i]\}_{i=0}^{2^n-1}$, то сдвинутый — $\{y[(i+\nu) \pmod{2^n})]\}_{i=0}^{2^n-1}$.

Введем следующие обозначения:

— $Y^{(\nu)} \in W^{(n)}(e, 2^n)$ гиперкомплексное число, соответствующее сдвинутому на ν отсчетов числовому массиву;

— $Y_1^{(\nu)} \in W_1^{(n)}(f, 2^n)$ — его образ в $W_1^{(n)}(f, 2^n)$;

— $Y_1^{(\nu)}[k]$ — k-й компонент образа.

Определим компоненты произведения $X \cdot Y^{(\nu)}$ в ГЧС $W^{(n)}(e, 2^n)$ при базисных элементах e_0 и $e_{2^{n-1}}$:

$$
\alpha_0^{(\nu)} = \sum_{i=0}^{2^n-1} x[i] \cdot y[(i+\nu) \pmod{2^n})]. \tag{26}
$$

Если (26) сравнить с (25), то можно установить, что при каждом сдвиге ν определяются два отсчета свертки:

$$
z[\nu] = \alpha_0^{(\nu)}, \tag{27}
$$

$$
z[(2^{n-1}+\nu) \pmod{2^n})] = \alpha_{2^{n-1}}^{(\nu)}. \tag{28}
$$

Из (27) и (28) видно, что целесообразно делать не более 2^{n-1} сдвигов, так как результаты начинают повторяться.

Таким образом, с помощью таких сдвигов можно построить очень простой по структуре алгоритм вычисления циклической свертки, который заключается в следующем. Делается 2^{n-1} сдвигов (с учетом нулевого сдвига) одной из последовательностей. Для каждого сдвига вычисляется произведение сворачиваемых последовательностей путем перехода из $W^{(n)}(e,2^n)$ в $W_1^{(n)}(f,2^n)$ и обратно. На это тратится 2^n умножений, и получаются два отсчета свертки. Итого необходимо 2^{2n-1} умножений, что в 2 раза меньше, чем при непосредственном вычислении свертки (2^{2n}).

Выводы

1. На основе представления сигналов в гиперкомплексной форме возможно построение алгоритмов вычисления циклической свертки, в которых количество умножений в 2 раза меньше по сравнению с прямым ее вычислением.

2. Эти алгоритмы просты по структуре, которая не зависит от длины сворачиваемого массива.

3. Дальнейшее уменьшение количества операций при вычислении циклической свертки возможно при установлении более глубоких симметрий оператора изоморфизма применяемых ГЧС, что является направлением дальнейших исследований в этой области.

1. *Калиновский Я.А.* Структура гиперкомплексного метода быстрого вычисления линейной свертки дискретных сигналов / Я.А. Калиновский // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2013. — Т. 15, № 1. — С. 31–44.

2. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов / Р. Блейхут. — М.: Мир, 1989. — 449 с.

3. *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток / Г. Нуссбаумер. — М.: Радио и связь, 1985. — 248 с.

4. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко.— СПб.: Питер, 2003. — 604 с.

5. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

6. *Калиновский Я.А.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2012. — 183 с.

7. *Гольденберг Л.М.* Цифровая обработка сигналов / Л.М. Гольденберг, Б.Д. Матюшкин, М.Н. Поляк. — М.: Радио и связь, 1985. — 312 с.

8. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

9. *Baez J.C.* The Octonions [Электронный ресурс] / Baez J.C. — Режим доступа: http://math/ucr.edu/home/baez/Octonions/ octonions.html (2001).

Поступила в редакцию 06.02.2014