

УДК 004.942

**Я. А. Калиновский<sup>1</sup>, Я. В. Хицко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Институт проблем регистрации информации НАН Украины  
ул. Н. Шпака 2, 03113 Киев, Украина

<sup>2</sup>Национальный технический университет Украины «КПИ»  
Проспект Победы, 37, 03056 Киев, Украина

## **Применение неканонических гиперкомплексных числовых систем для оптимизации суммарной параметрической чувствительности реверсивных цифровых фильтров**

*Предложен и исследован метод построения оптимального по параметрической чувствительности реверсивного фильтра на основе применения неканонических гиперкомплексных числовых систем (ГЧС). Показано, что использование неканонических ГЧС с большим количеством ненулевых структурных констант позволяет значительно улучшить чувствительность цифрового фильтра.*

**Ключевые слова:** неканоническая гиперкомплексная числовая система, цифровой фильтр, гиперкомплексные числа, амплитудно-частотная характеристика, чувствительность фильтра.

### **Введение и постановка задачи**

Общий подход к использованию гиперкомплексных числовых систем в построении амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) и расчета чувствительности фильтра уже описан в работах [1–10], где применяются в основном канонические ГЧС. В данной работе предпринята попытка разработки методики синтеза цифровых фильтров в более сложных ГЧС, которые содержат большее количество ненулевых структурных единиц в своих таблицах умножения. Как показано в работе, этот подход позволяет синтезировать реверсивные цифровые фильтры с лучшими характеристиками по параметрической чувствительности.

### **Эквивалентирование цифрового фильтра с вещественными коэффициентами и фильтра с гиперкомплексными коэффициентами**

В данной работе используем методику синтеза структуры фильтра путем эквивалентного преобразования цифрового реверсивного фильтра  $n$ -го порядка с ве-

© Я. А. Калиновский, Я. В. Хицко

щественными коэффициентами в цифровой реверсивный фильтр первого порядка с гиперкомплексными коэффициентами, подробно описанную в [4].

Рассмотрим цифровой фильтр 3-го порядка с вещественными коэффициентами, АЧХ которого имеет вид:

$$H_R = \frac{\varphi_3 z^{-3} + \varphi_2 z^{-2} + \varphi_1 z^{-1} + \varphi_0}{\phi_3 z^{-3} + \phi_2 z^{-2} + \phi_1 z^{-1} + 1}. \quad (1)$$

Тогда, следуя методике, описанной в [4], его можно эквивалентировать цифровым фильтром первого порядка с передаточной функцией

$$H_\Gamma = \frac{A + Bz^{-1}}{1 + Cz^{-1}} = \frac{(A + Bz^{-1}) \cdot \overline{(1 + Cz^{-1})}}{N(1 + Cz^{-1})}, \quad (2)$$

но с гиперкомплексными коэффициентами  $A, B, C$ , принадлежащими некоторой ГЧС размерности 3. В (2) сопряжение и норма  $N$  определяются согласно формулам, выведенным в применяемой ГЧС.

Рассмотрим неканоническую ГЧС размерности 3 с таблицей умножения:

$\Gamma(e, 3)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_2$	$e_2$	$-e_1 + e_3$	$-2e_2$
$e_3$	$e_3$	$-2e_2$	$2e_1 - e_3$

(3)

В данной таблице имеется 4 неканонические нулевые константы.

ГЧС  $\Gamma(e, 3)$  с таблицей умножения (3) изоморфна ГЧС  $R \oplus C$  с таблицей умножения:

$R \oplus C$	$E_1$	$E_2$	$E_3$
$E_1$	$E_1$	0	0
$E_2$	0	$E_2$	$E_3$
$E_3$	0	$E_3$	$-E_2$

(4)

Как видно из сравнения систем (3) и (4), вычисления в последней гораздо проще. Этим обстоятельством можно воспользоваться для повышения производительности работы цифрового фильтра.

Тогда коэффициенты передаточной функции  $H_\Gamma$  имеют вид:

$$A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3; \quad B = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3; \quad C = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3; \quad A, B, C \in \Gamma(e, 3).$$

При подстановке в (2) и преобразовании получим передаточную функцию цифрового фильтра первого порядка с гиперкомплексными коэффициентами в системе  $\Gamma(e,3)$ :

$$H_{\Gamma} = \frac{a_1 + \frac{K}{z} + \frac{M}{z^2} + \frac{L}{z^3}}{1 + \frac{T}{z} + \frac{P}{z^2} + \frac{Q}{z^3}}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} K &= a_2c_2 - a_3c_3 - 3a_1c_3 + 2a_1c_1 + b_1, \\ M &= -2b_3c_3 + c_2a_2c_3 + c_2a_2c_1 - 3a_1c_1c_3 + c_2b_2 - 2a_3c_1c_3 + 4a_3c_3^2 + 2a_1c_2^2 + a_1c_1^2 + 2a_3c_2^2 - 3b_1c_3 + 2a_1c_3^2 + 2b_1c_1, \\ L &= c_2b_2c_3 + b_1c_1^2 - 2b_3c_1c_3 + c_2b_2c_1 + 2b_1c_2^2 - 3b_1c_1c_3 + 2b_1c_3^2 + 2b_3c_2^2 + 4b_3c_3^2, \\ T &= 3c_1 - 3c_2, \\ P &= -6c_1c_3 + 3c_2^2 + 3c_1^2, \\ Q &= 3c_1c_2^2 + 3c_2^2c_3 + c_1^3 - 3c_1^2c_3 + 4c_3^3. \end{aligned}$$

Рассмотрим конкретный пример фильтра третьего порядка с вещественными коэффициентами и передаточной функцией [1]:

$$H = \frac{0,287589 + 0,6888683 \cdot z^{-1} + 0,6888683 \cdot z^{-2} + 0,287589 \cdot z^{-3}}{1 + 0,418204 \cdot z^{-1} + 0,473048 \cdot z^{-2} + 0,061292 \cdot z^{-3}}.$$

Также рассмотрим процесс получения значений коэффициентов  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ .

Используя метод, описанный выше, приравниваем значения коэффициентов знаменателя при одинаковых  $z^{-i}$ , находим значения гиперкомплексных коэффициентов  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ .

Получаем систему:

$$\begin{cases} T = 3c_1 - 3c_2 = 0,418204, \\ P = -6c_1c_3 + 3c_2^2 + 3c_1^2 = 0,473048, \\ Q = 3c_1c_2^2 + 3c_2^2c_3 + c_1^3 - 3c_1^2c_3 + 4c_3^3 = 0,061292, \end{cases} \quad (6)$$

откуда

$$\begin{aligned} c_1 &= 0,1403252267, \\ c_2 &= -0,3718209092, \\ c_3 &= 0,0009238933689. \end{aligned}$$

Подставляем эти значения в числитель передаточной функции (5) и приравниваем к соответствующим коэффициентам из передаточной функции вещественного фильтра:

$$\begin{cases} a_1 = 0,287589, \\ 0,2778787733a_1 - 0,3718209092a_2 - 0,001847786738a_3 + b_1 = 0,6888683, \\ -0,001847786738b_3 - 0,05251937625a_2 + 0,2958055168a_1 - 0,3718209092b_2 + \\ + 0,2762457002a_3 + 0,2778787733b_1 = 0,6888683, \\ -0,05251937625b_2 + 0,2958055168b_1 + 0,2762457002b_3 = 0,287589. \end{cases} \quad (7)$$

Выражаем  $a_1, a_2, b_1, b_3$  через  $a_3, b_2$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,287589, \\ a_2 &= 8,446312201 - 5,370129737a_3 + 7,221392887b_2, \\ b_1 &= 3,749468903 - 1,994878735a_3 + 2,685064869b_2, \\ b_3 &= -2,973890946 + 2,136127855a_3 - 2,68506487b_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, мы получили параметры фильтра как функции от величин  $a_3, b_2$ . Параметрическая чувствительность цифрового фильтра представляет собой чувствительность модуля передаточной функции цифрового фильтра  $|H(w)|$  к вариации коэффициентов передаточной функции фильтра. Функция параметрической чувствительности позволяет провести анализ влияния погрешности коэффициентов на выходной сигнал. Для исследований фильтров с гиперкомплексными коэффициентами необходимо учитывать суммарную возможную погрешность по каждому из коэффициентов передаточной функции.

Суммарная параметрическая чувствительность фильтра первого порядка с гиперкомплексными коэффициентами в ГЧС размерности 3 будет иметь вид

$$RCS = \left| \sum_{i=1}^9 \frac{\alpha_i}{|H|} \cdot \frac{\partial |H|}{\alpha_i} \right|, \quad (9)$$

где  $\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_2, \alpha_3 = a_3, \alpha_4 = b_1, \alpha_5 = b_2, \alpha_6 = b_3, \alpha_7 = c_1, \alpha_8 = c_2, \alpha_9 = c_3$ .

В системе (8) параметры  $a_3, b_2$  могут принимать любые значения. Допустим, что  $a_3 = b_2 = 0$ . Тогда, получим суммарную параметрическую чувствительность для фильтра с гиперкомплексными коэффициентами, построенную по формуле (9), график которой представлен на рис. 1.

График отношения суммарной параметрической чувствительности построенного фильтра с гиперкомплексными коэффициентами к суммарной параметрической чувствительности фильтра с вещественными коэффициентами представлен на рис. 2.

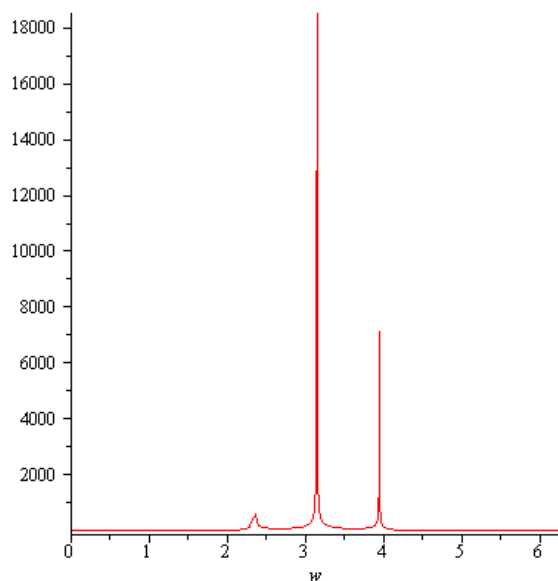


Рис. 1. Суммарная параметрическая чувствительность фильтра с гиперкомплексными коэффициентами

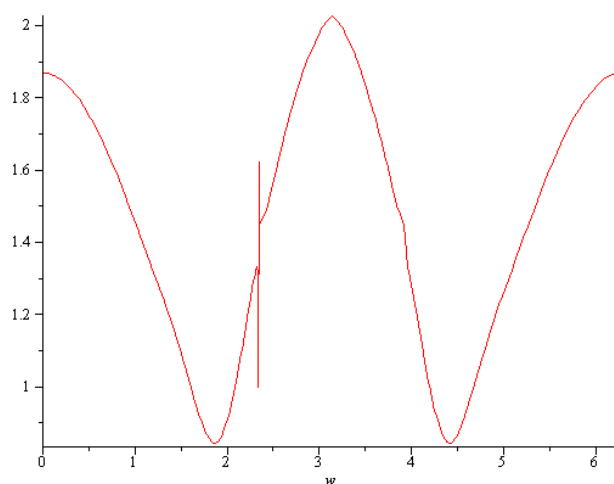


Рис. 2. Отношение суммарной параметрической чувствительности фильтра с гиперкомплексными коэффициентами к суммарной параметрической чувствительности фильтра с вещественными коэффициентами

Как видим, в данном случае, чувствительность гиперкомплексного фильтра оказывается значительно выше, чем вещественного фильтра.

### Оптимизация параметрической чувствительности

Как видно из системы (8), параметры фильтра  $a_3, b_2$  могут принимать различные значения без изменения передаточной функции. Этим обстоятельством

можно воспользоваться для оптимизации параметрической чувствительности фильтра.

Проведем оптимизацию полученных результатов. Необходимо подобрать такие значения  $a_3, b_2$ , чтобы удовлетворялись условия (7) и при этом оптимизировать некоторый критерий. Для его построения вычислим функцию суммарной чувствительности, выражая все ее компоненты через  $a_3, b_2$ :

$$\begin{aligned}
 RCS = & 2,87589 \cdot 10^5 |(z^2 + 0,2778787733z + 0,2958055168)) / (6,8886829998 \cdot 10^5 z + 6,888683 \cdot 10^5 z^2 + \\
 & + 2,87589 \cdot 10^5 z^2 + 2,875889996 \cdot 10^5 - 0,000043zb_2 - 0,0001za_3 - 0,001z^2a_3 - 0,0004b_2)| + \\
 & + 3,718209092 \cdot 10^5 (8,4463312201 - 5,370129737a_3 + 7,221392887b_2) | ((z^3 + 0,418204z^2 + \\
 & + 0,4730479999z + 0,061292)z) / ((z^2 + 0,2769548799z + 0,4339283669)(6,888682998 \cdot 10^5 z + \\
 & + 6,888683 \cdot 10^5 z^2 + 2,87589 \cdot 10^5 z^3 + 2,875889996 \cdot 10^5 - 0,000043zb_2 - 0,0001za_3 - 0,001z^2a_3 - \\
 & - 0,0004b_2))| + 2 \cdot 10^6 a_3 | z(0,0009238933689z - 0,1381228502) / (6,888683 \cdot 10^5 z + 6,888683 \cdot 10^5 z^2 + \\
 & + 2,87589 \cdot 10^5 z^3 + 2,875889 \cdot 10^5 - 0,000043zb_2 - 0,0001za_3 - 0,001z^2a_3 - 0,0004b_2)| + 10^6 (3,749468903 - \\
 & - 1,994878735a_3 + 2,685064869b_2) | z^2 + 0,2778787733z + 0,2958055168) / (6,888683 \cdot 10^5 z + \\
 & + 0,6888683 \cdot 10^5 z^2 + 2,87589 \cdot 10^5 z^3 + 2,87589 \cdot 10^5 - 0,000043zb_2 - 0,0001za_3 - 0,001z^2a_3 - 0,0004b_2)| + \\
 & + 3,718209092 \cdot 10^5 b_2 | (z^3 + 0,418204z^2 + 0,4730479999z + 0,061292) / ((z^2 + 0,2769548799z + \\
 & + 0,4339283669)(6,888682998 \cdot 10^5 z^2 + 6,888683 \cdot 10^5 z^2 + 2,87589 \cdot 10^5 z^3 + 2,875889996 \cdot 10^5 - \\
 & - 0,000043zb_2 - 0,0001za_3 - 0,001z^2a_3 - 0,0004b_2))| + 2 \cdot 10^6 (-2,973890946 + 2,136127855a_3 - \\
 & - 2,68506487b_2) | (0,0009238933689z + 0,1381228502) / (6,888683 \cdot 10^5 z + 6,888683 \cdot 10^5 z^2 + \\
 & + 2,87589 \cdot 10^5 z^3 + 2,87589 \cdot 10^5 - 0,000043zb_2 - 0,0001za_3 - 0,001z^2a_3 - 0,0004b_2)| + 1,403252267 \cdot 10^5 \times \\
 & \times | (0,20109286z + 0,8080145342z^2 + 0,3967868515z^3 - 0,07118465934 + 2,685064869z^4b_2 - \\
 & - 1,994878735z^4a_3 + 1,502167918z^3b_2 - 1,39254783z^3a_3 + 0,3439826239zb_2 + 1,428773891z^2b_2 - \\
 & - 1,177148979z^2a_3 - 0,3863640851za_3 - 0,287589z^5 + 2,371732304 - 0,0342181936a_3 + 0,02324579b_2) / \\
 & / ((6,888683 \cdot 10^5 z + 6,888683 \cdot 10^5 z^2 + 2,87589 \cdot 10^5 z^3 + 2,87589 \cdot 10^5 - 0,000043zb_2 - 0,0001za_3 - \\
 & - 0,001z^2a_3 - 0,0004b_2)(z^3 + 0,488204z^2 + 0,473048z + 0,061292))| - 3,71820992 \cdot 10^5 | ((3,899734973z + \\
 & + 2,553110588z^2 + 0,9985997616 + 8,446312201z^3 - 5,370129737z^3a_3 + 3z^2b_2 - 0,6453745599a_3 + \\
 & + 0,439283673b_2)(z^3 + 8,446312201z^3 - 5,370129737z^3a_3 + 3z^2b_2 - 0,6453745599a_3 + 0,439283673b_2) \times \\
 & \times (z^3 + 0,418204z^2 + 0,473048z + 0,061292)) / ((z^2 + 0,2769548799z + 0,4339283669)^2 (6,888682998 \times 10^5 z + \\
 & + 6,888683 \times 10^5 z^2 + 2,87589 \times 10^5 z^3 + 2,875889996 \times 10^5 - 0,000043zb_2 - 0,0001za_3 - 0,001z^2a_3 - \\
 & - 0,0004b_2))| + 1847,786738 | (-0,4416591322z - 1,609719097z^2 - 1,098032331z^3 - 0,0741899487 - \\
 & - 2,685064868z^4b_2 + 1,299719855z^4a_3 - 1,502167918z^3b_2 + 0,3697478256z^3a_3 - z^5a_3 - 0,3439826232zb_2 - \\
 & - 1,42877389z^2b_2 + 0,8033734483z^2a_3 + 0,1641200202za_3 - 3,306608615z^4 + 0,0076218562a_3 - \\
 & - 0,0232457908b_2) / ((6,8886823 \cdot 10^5 z + 6,888683 \cdot 10^5 z^2 + 2,87589 \cdot 10^5 z^3 + 2,875889 \cdot 10^5 - 0,000043zb_2 - \\
 & - 0,0001za_3 - 0,001z^2a_3 - 0,0004b_2)(z^3 + 0,418204z^2 + 0,473048z + 0,06129))|
 \end{aligned}$$

Поскольку функция чувствительности положительна на всем отрезке  $\omega = 0..2\pi$ , то в качестве критерия оптимальности можно взять сумму значений функции параметрической чувствительности от параметров  $a_3, b_2$  на некоторой совокупности значений  $\omega$ . Выделим на отрезке  $\{0..2\pi\}$  32 равномерно располо-

женные точки и вычислим значения функции в каждой точке с учетом того, что  $z = \sin(\omega) + i \cdot \cos(\omega)$  и построим критерий оптимальности  $S_{RCS}(\omega, a_3, b_2)$ , который необходимо минимизировать.

Привести в данной статье функцию  $S_{RCS}(\omega, a_3, b_2)$  представляется нецелесообразным, так как она слишком громоздка.

Также неудачной оказалась попытка применения градиентного метода оптимизации, так как дифференцирование такой функции по компонентам  $a_3, b_2$  весьма громоздко. Поэтому ее оптимизация представляет собой самостоятельную серьезную задачу.

Для доказательства работоспособности излагаемого метода синтеза цифрового фильтра достаточно найти приближенный оптимум, что можно выполнить построением трехмерного графика функции  $S_{RCS}(\omega, a_3, b_2)$ , для чего использовались процедуры системы аналитических вычислений MAPLE. При этом возможна многоступенчатая процедура: сначала выбирается широкая область поиска, потом она сужается. Соответственно на рис. 3. представлена широкая область поиска, на рис. 4. — суженная.

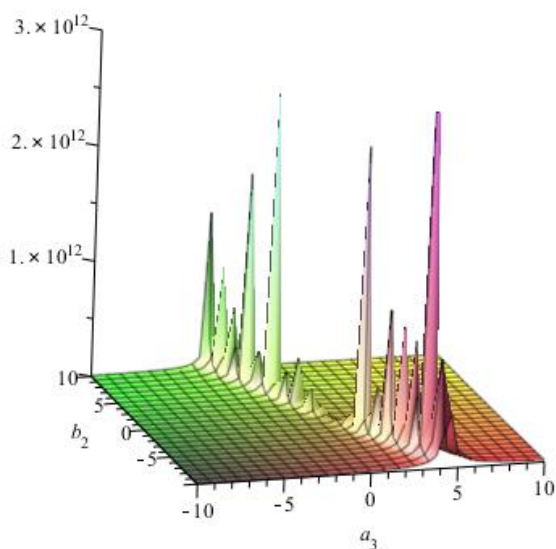


Рис. 3. График  $S_{RCS}(\omega, a_3, b_2)$  для широкой области поиска:  $a_3 \in \{-10..10\}, b_2 \in \{-10..10\}$

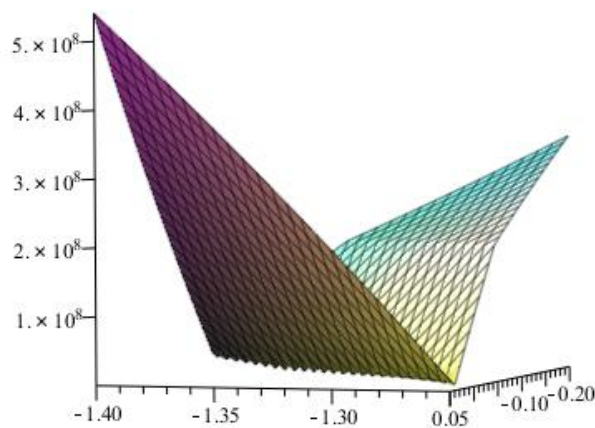


Рис. 4. График  $S_{RCS}(\omega, a_3, b_2)$  для узкой области:  $a_3 \in \{-0,25..0,05\}, b_2 \in \{-1,4..-1,25\}$

На рис. 5 представлен график изменения параметрической чувствительности вблизи одного из полученных локальных минимумов при  $a_3 = -0,2316615$ ,  $b_2 = -1,2783899677$ .

Соотношение чувствительности фильтра с гиперкомплексными коэффициентами в системе  $\Gamma(e, 3)$  к чувствительности вещественного фильтра показано на рис. 6, из которого видно, что чувствительность полученного фильтра с гиперкомплексными коэффициентами ниже, чем чувствительность вещественного фильтра.

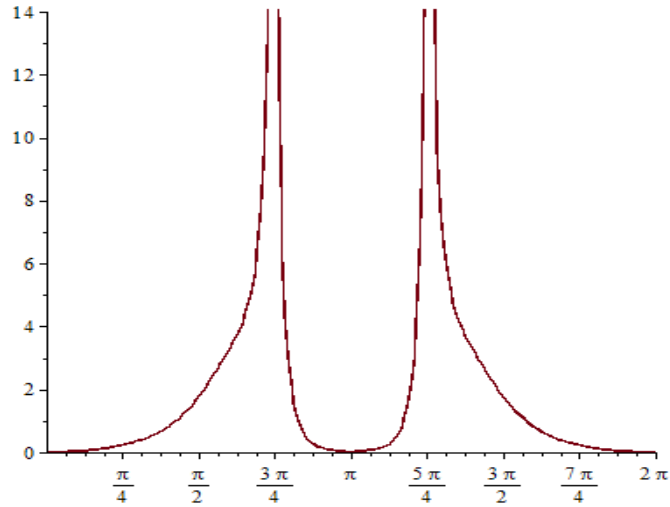


Рис. 5. Суммарная параметрическая чувствительность фильтра с гиперкомплексными коэффициентами после оптимизации

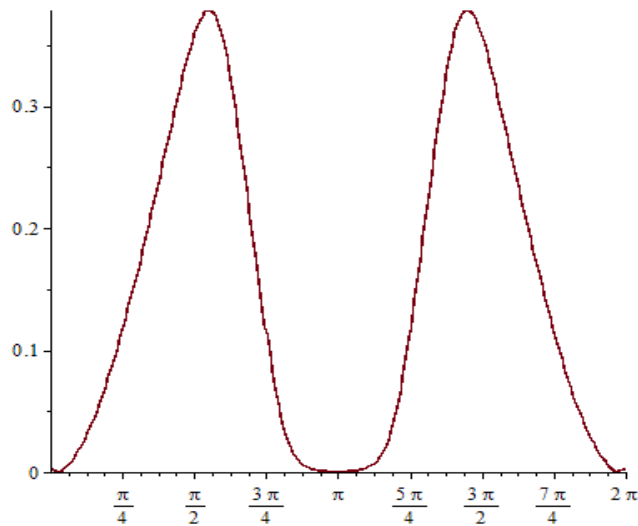


Рис. 6. Соотношение чувствительности фильтра с гиперкомплексными коэффициентами к чувствительности фильтра с вещественными коэффициентами

## Выводы

В работе показано, что применение неканонических ГЧС позволяет снизить суммарную параметрическую чувствительность цифрового фильтра. В то же время, точная оптимизация целевой функции  $S_{RCS}(\omega, a_3, b_2)$  требует дополнительных исследований.

1. Toyoshima H. Design of hypercomplex all-pass filters to realize complex transfer functions / H. Toyoshima, S. Higuchi // Proc. Second Int. Conf. Information, Communications and Signal Processing. — 1999, Dec. — #2B3.4. — P. 1–5.



2. Toyoshima H. Computationally efficient implementation of hypercomplex digital filters / H. Toyoshima // IEICE Trans. Fundamentals. — Aug. 2002. — E85-A, 8. — P. 1870-1876.
3. Toyoshima H. Computationally efficient implementation of hypercomplex digital filters / H. Toyoshima // Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal processing. — 1998. — Vol. 3. — P. 1761-1764 (m5May, 1998).
4. Калиновский Я.А. Высокорамерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2012. — 183 с.
5. Разработка структур эффективных цифровых фильтров с помощью гиперкомплексного представления информации / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова [и др.] // Управління розвитком. — 2006. — № 6. — С. 83-84.
6. Калиновський Я.О. Основи побудови цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами / Я.О. Каліновський, О.В. Федоренко // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2009. — Т. 11, № 1. — С. 52-59.
7. Development of theoretical bases and toolkit for information processing in hypercomplex numerical systems / Kalinovsky J., Sinkov M., Boyarinova Y. [et al.] // Pomiaru. Automatyka. Komputery w gospodarce i ochronie srodowiska. — 2009. — N 1. — P. 18-21.
8. Фундаментальные основы эффективного представления информации и обработки данных на основе гиперкомплексных числовых систем / Я.А. Калиновский, М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова [и др.] // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2010. — Т. 12, № 2. — С. 62-68.
9. Федоренко О.В. Модель цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами / Федоренко О.В. // Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали X Міжн. наук.-техн. конф. — К.: НТУУ «КПІ», 2008. — С. 413.
10. Федоренко О.В. Цифрові фільтри з низькою параметричною чутливістю / О.В. Федоренко // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2008. — Т. 10, № 2. — С. 87-94.
11. Синьков М.В. Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

Поступила в редакцию 22.11.2014