УДК 004.942

Я. А. Калиновский[1], Ю. Е. Бояринова[1,2],
А. С. Сукало[3], Я. В. Хицко[2]
[1]Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина
[2]Национальный технический университет Украины «КПИ им. Игоря Сикорского»
Проспект Победы, 37, 03113 Киев, Украина
[3]Национальный университет водного хозяйства и природопользования
ул. Соборная, 11, 33028 Ровно, Украина

Применение изоморфных гиперкомплексных числовых систем для синтеза быстрых алгоритмов линейной свертки

Рассмотрен метод повышения эффективности умножения гиперкомплексных чисел для построения быстрых алгоритмов линейной свертки. Он заключается в переходе к таким изоморфным гиперкомплексным числовым системам (ГЧС), где гиперкомплексное умножение требует меньшего числа вещественных умножений. Синтезированы такие пары изоморфных ГЧС, а также выражения операторов изоморфизма.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, линейная свертка, изоморфизм, умножение, комплексные числа, кватернионы.*

Линейная свертка дискретных сигналов является наиболее общей вычислительной задачей в области цифровой обработки сигналов. Радиолокационные системы, системы звуковой локации, обработка сейсмической информации, неразрушающий контроль и компьютерная томография, обработка изображений — этот, даже очень далекий от полноты перечень областей использования линейной свертки дискретных сигналов, дает представление о важности данной задачи.

Так как сложность вычисления линейной свертки массивов длиной n есть $O(n^2)$ и быстро увеличивается с ростом n, то используются методы «быстрых» вычислений.

Из наиболее распространенных следует упомянуть следующие методы.

1. Свертка с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) со сложностью $O(n\log n)$. В основе БПФ [1, 2] лежит декомпозиция исходной задачи большой размерности в большое количество задач малой размерности. Поэтому весьма важным является разработка таких методов решения задач малой размерности, которые используют, возможно, меньшее число вещественных операций.

2. Переход к кольцу полиномов [1]. Такой переход целесообразен тем, что кольца полиномов хорошо исследованы, и операции в них, особенно умножение, выполняются значительно эффективнее, чем непосредственные вычисления. Сами же переходы требуют минимального расхода вычислительных ресурсов.

В соответствии с теоремой Винограда для линейной свертки [1] нижняя граница количества вещественных умножений равна $2n-1$, что может быть ориентиром при оценке качества алгоритма. Однако, как отмечается в работе [1]: «Во многих случаях в качестве меры сложности вычислений берется количество арифметических операций в алгоритме. Хотя и существует грубое соответствие между общей и арифметической сложностью алгоритма, все же практическая ценность вычислительного метода зависит от многих факторов. Эффективность алгоритма определяется не только числом операций, но и такими параметрами, как число перемещений данных, стоимость вспомогательных операций, общая структурная сложность, различные возможности, представляемые используемой вычислительной системой, искусство программиста. Поэтому упорядочение алгоритмов по их действительной эффективности, выраженной временем выполнения, является весьма трудным делом, так что сравнения, основанные лишь на числе арифметических операций, должны быть «взвешены» с учетом факторов, возникающих при конкретных реализациях этих алгоритмов».

В данной работе рассматривается использование гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) для синтеза алгоритмов линейной одномерной свертки.

Следует отметить, что в работе, наряду с ГЧС, имеющими общепринятые наименования и обозначения (например, система комплексных чисел — C, система кватернионов — H), используются и такие ГЧС, которые не имеют общепринятых наименований и обозначений. Поэтому применим терминологию и обозначения из монографий авторов [4, 5].

Принципы приложения методов ГЧС к вычислению свертки

Как известно, компоненты свертки дискретных сигналов, представляют собой суммы парных произведений компонентов сигнала и ядра свертки. В то же время произведение двух гиперкомплексных чисел также представляют собой суммы парных произведений компонентов этих чисел. Однако одной этой аналогии недостаточно для построения эффективных алгоритмов свертки по многим причинам. Если дискретный сигнал и ядро имеют длину n, и они представляются n-мерными гиперкомплексными числами в некоторой ГЧС, то:

1) свертка имеет $2n-1$ компонентов, а произведение двух гиперкомплексных чисел имеет n компонентов;

2) в каждом компоненте произведения двух гиперкомплексных чисел по n слагаемых, а в компонентах свертки число слагаемых переменное — от 1 до n.

Кроме этого, следует учесть, что при умножении двух гиперкомплексных чисел количество вещественных умножений N может, в зависимости от типа применяемой ГЧС, изменяться в пределах

$$n \le N \le n^3,$$

тогда как в свертке n^2 парных произведений.

Для уменьшения количества вещественных умножений можно воспользоваться изоморфными ГЧС. В соответствии с теоремой Вейерштрасса-Дедекинда [3], коммутативная полупростая алгебра изоморфна прямому произведению полей. Это означает, что для всякой канонической ГЧС [4] существует изоморфная ей ГЧС, на диагонали таблицы умножения которой находятся либо клетки таблиц умножения поля комплексных чисел, либо какой-либо базисный элемент, а остальные ячейки таблицы умножения — нули. Рассмотрим два простых примера.

Пример 1. Двойная $W(e,2)$ и ортодвойная $W_1(f,2)$ ГЧС.

Таблицы умножения двойных $W(e,2)$ и ортодвойных чисел, и $W_1(f,2)$ имеют вид:

W	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	e_1

W_1	f_1	f_2
f_1	f_1	0
f_2	0	f_2

(1)

Для умножения двух чисел в системе $W\left(e,2\right)$ необходимо выполнить 4 вещественных умножения и 2 сложения, тогда как при переходе к изоморфной системе $R \oplus R = W_1\left(f,2\right)$ — всего 2 умножения.

Действительно, произведение двух гиперкомплексных чисел в ГЧС $W\left(e,2\right)$ имеет вид

$$(a_1e_1 + a_2e_2)(b_1e_1 + b_2e_2) = (a_1b_1 + a_2b_2)e_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)e_2\,, \tag{2}$$

а в ГЧС $R \oplus R = W_1\left(f,2\right)$ —

$$(c_1f_1 + c_2f_2)(d_1f_1 + d_2f_2) = c_1d_1f_1 + c_2d_2f_2\,. \tag{3}$$

Оператор изоморфизма этих систем следующий [4, 5]:

$$L:\begin{cases} e_1 = f_1 + f, \\ e_2 = f_1 - f_2. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, используя вышеприведенные сведения, можно наметить следующий путь уменьшения количества умножений при вычислении выражения (2). Сомножители в левой части (2) перевести из $W\left(e,2\right)$ в $R \oplus R = W_1\left(f,2\right)$, используя (4). Затем перемножить их по формуле (3), и с помощью преобразования, обратного к L

$$L^{-1}:\begin{cases} f_1 = \left(e_1 + e_2\right)/2 \\ f_2 = \left(e_1 - e_2\right)/2 \end{cases} \tag{5}$$

перевести произведение обратно в ГЧС $W\left(e,2\right)$. По определению изоморфизма ГЧС оно будет равно правой части (2). Таким образом, на вычисление (2) требуется только 2 умножения вместо 4. Между прочим, компоненты правой части (2) есть компоненты круговой свертки 2×2.

Из (4) и (5) видно, что «цена» перехода из $W(e,2)$ в $R \oplus R = W_1(f,2)$ и обратно — 6 сложений и 2 деления на 2. Однако так как свертка выполняется с одним и тем же ядром, переход для которого выполняется один раз, то сложений нужно 4. Кроме того, деление на 2 — это короткая операция по сдвигу регистра, и ее можно не учитывать. Даже, как будет показано далее, эти деления также можно выполнить один раз при преобразовании ядра. Значит, при уменьшении числа умножений на 2 необходимо выполнить дополнительно 4 сложения, что дает ощутимую экономию вычислительного ресурса.

Пример 2. ГЧС G_{33} ортотройная ГЧС 3R и вещественно-комплексная ГЧС $R \oplus C$.

Таблицы умножения этих ГЧС третьей размерности приведены ниже.

G_{33}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	e_1
e_3	e_3	e_1	e_2

$3R$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	0	0
f_2	0	f_2	0
f_3	0	0	f_3

$R \oplus C$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	0	0
f_2	0	f_2	f_3
f_3	0	f_3	$-f_2$

(6)

ГЧС G_{33} очень подходит для построения алгоритмов свертки 3×3, так как при умножении двух гиперкомплексных чисел третьей размерности получится 9 парных произведений — ровно столько, сколько нужно для построения компонентов свертки 3×3. Однако умножение гиперкомплексных чисел в ней требует те же 9 вещественных умножений. В соответствии с теоремой Вейерштрасса-Дедекинда [3], изоморфными системе G_{33} могут быть либо ГЧС $3R$, которая является прямой суммой трех полей вещественных чисел R, либо ГЧС $R \oplus C$, которая является прямой суммой полей вещественных R и комплексных чисел C.

Рассмотрим изоморфизм G_{33} и $3R$. Если составить в соответствии с [5] систему уравнений изоморфизма этих ГЧС

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\alpha_{ks}\gamma_{ij}^{k} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\alpha_{ik}\alpha_{js}\gamma_{ks}^{r}, \quad i,j,k \in 1,...,3, \tag{7}$$

где γ_{ks}^{r} — структурные константы одной из ГЧС, α_{ks} — искомые коэффициенты линейного оператора изоморфизма ГЧС G_{33} и $3R$, то среди 27 решений системы (7) нет нетривиальных вещественных, то есть в них либо компоненты комплексные, либо детерминант линейного оператора равен нулю. Это означает, что ГЧС G_{33} и $3R$ неизоморфны.

Рассмотрим изоморфизм G_{33} и $R \oplus C$. Система уравнений (7) имеет 21 решение, одно из которых дает такой оператор изоморфизма:

$$e_1 = f_1 + f_2,\;\; e_2 = f_1 - \frac{1}{2} f_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} f_2,\;\; e_2 = f_1 - \frac{1}{2} f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} f_2. \qquad (8)$$

Детерминант этого оператора равен $-\frac{3\sqrt{3}}{2} \neq 0$, то есть это преобразование нетривиально, что означает изоморфизм ГЧС G_{33} и $R \oplus C$. Правда, следует заметить, что умножение гиперкомплексных чисел в ГЧС $R \oplus C$ требует 4 вещественных умножения. Однако, как следует из (8), переход из ГЧС G_{33} в $R \oplus C$ и обратно требует также 4 вещественных умножения (напомним, что деление на 2 — короткая операция). Так что умножение двух гиперкомплексных чисел третьей размерности при переходе из ГЧС G_{33} в $R \oplus C$ и обратно требует 8 вещественных умножений, то есть выигрыш всего лишь 1 умножение при большом количестве дополнительных сложений.

Более перспективным представляется применение системы триплексных чисел T [4, 5], таблица умножения которой имеет вид:

T	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$(e_3 - e_1)/2$	$-e_2$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1

(9)

Эта ГЧС изоморфна ГЧС вещественно комплексных чисел $R \oplus C$. Система уравнений изоморфизма этих ГЧС (7) имеет несколько нетривиальных вещественных решений, одно из которых дает такой оператор изоморфизма:

$$L: \begin{cases} e_1 = f_1 + f_2, \\ e_2 = \pm f_3, \\ e_3 = f_1 - f_2. \end{cases} \qquad L^{-1}: \begin{cases} f_1 = (e_1 + e_3)/2, \\ f_2 = (e_1 - e_3)/2, \\ f_3 = \pm e_2. \end{cases} \qquad (10)$$

Как видно из (10), операторы изоморфизма ГЧС T и $R \oplus C$ не содержат вещественных умножений, а содержат только операции сложения и короткие операции деления на 2. Поэтому операция умножения триплексных чисел может быть сведена к 5 вещественным умножениям. Его даже можно снизить до 4, применяя алгоритм умножения комплексных чисел с тремя вещественными умножениями:

$$(a + bi)(c + di) = (a(c - d) + d(a - b)) + i(b(c + d) + d(a - b)). \qquad (11)$$

Рассмотренные примеры показывают, что выбор для моделирования системы гиперкомплексных чисел является трудно формализуемым процессом. Однако, в одном важном для приложений случае, когда размерность ГЧС равна 2^n, этот процесс значительно упрощается. Рассмотрим, следуя [5], этот процесс подробнее.

Методы генерации изоморфных ГЧС

По внешнему виду таблиц умножения двух произвольных ГЧС очень трудно установить, изоморфны они или нет. Регулярным методом является составление для них системы уравнений изоморфизма (9). Преимуществом этого метода является то, что обе ГЧС обладают желаемой структурой. Однако, во-первых, они могут оказаться неизоморфными, а, во-вторых, как показывает опыт [4], решение системы типа (9) может быть весьма трудным. Система (9) — это система из n^3 нелинейных квадратичных уравнений n^2 с переменными, то есть система переопределенная. Здесь n — размерность ГЧС. Если для $n < 4$ время решения с применением системы символьных вычислений типа Maple невелико, то для $n \geq 4$ оно становится неприемлемым даже при проведении научных исследований. Разработаны алгоритмы, снижающие это время [5, 6], но не кардинально.

Другим методом генерации изоморфных ГЧС является изоморфное преобразование базиса исходной ГЧС [5]. Этот метод прост в реализации, но, как правило, получаются неканонические ГЧС, и весьма труден подбор оператора изоморфизма, который привел бы к нужным по структуре ГЧС. Однако ограниченное применение этот метод находит.

Как показали исследования, наиболее подходящим методом генерации изоморфных ГЧС является основанный на процедуре удвоения Грассмана-Клиффорда метод умножения размерности [5].

Процедура удвоения Грассмана-Клиффорда фактически означает то, что компоненты гиперкомплексного числа для данной ГЧС уже не являются вещественными числами, а числами, принадлежащими к какой-либо ГЧС размерности 2. В общем случае, если размерность системы не только равна 2, тогда размерность полученной ГЧС будет уже не удваиваться по отношению к исходной, а умножаться на размерность той ГЧС, элементами которой будут компоненты исходной ГЧС. Такие процедуры будем называть, в отличие от процедур удвоения, процедурами умножения размерности.

Будем обозначать результат применения процедуры умножения размерности системы $Г_1(e,n)$ системой $Г_2(f,m)$ так: $Д\left(Г_1\left(e,n\right),Г_2\left(f,m\right)\right)$.

При использовании процедуры умножения размерности базис получаемых ГЧС состоит из парных произведений базисных элементов исходных ГЧС. Если первоначальные ГЧС являлись коммутативными, то и базисные элементы результирующей ГЧС будут коммутативны. Следует отметить, что независимо от порядка расположения ГЧС в операторе умножения размерности, полученные базисы будут одинаковыми. Следовательно, будут идентичными и таблицы умножения ГЧС, полученных при перестановке их в операторе умножения размерности.

Поэтому, как показано в [5], можно сформулировать следующие принципы:

1) при использовании процедуры умножения размерности ГЧС-операнды можно коммутировать;

2) умножение размерности одной и той же ГЧС изоморфными ГЧС приводит к изоморфным ГЧС;

3) при умножении размерности пары изоморфных ГЧС другой парой изоморфных ГЧС, получается пара изоморфных ГЧС, и существует невырожденное

линейное преобразование базисов полученной пары, которое представляет собой произведение линейных преобразований первой пары ГЧС.

Если же к одной и той же ГЧС применяются процедуры умножения размерности различными ГЧС, но размерности которых одинаковы, то в результате получаются различные ГЧС одинаковой размерности, но, в общем случае, неизоморфные между собой. Если для умножения размерности применяются изоморфные ГЧС, то и результаты после применения процедуры умножения также будут изоморфными между собой.

Используя эти теоремы, можно построить целый ряд пар изоморфных ГЧС достаточно больших размерностей, а также операторы их изоморфизма.

Построение изоморфных пар ГЧС на основе систем двойных и ортодвойных чисел

На основе ГЧС $W\left(e,2\right)$ и $W_1\left(f,2\right)$ с применением сформулированных выше принципов можно построить изоморфные пары ГЧС размерностей 4. Построение изоморфных пар происходит следующим образом. Пусть:

$$\varGamma_1\left(e,2\right)=W\left(e,2\right)\cong W_1\left(f,2\right)=\varGamma_3\left(f,2\right) \text{ и } \varGamma_2\left(g,2\right)=W\left(g,2\right)\cong W_1\left(h,2\right)=\varGamma_4\left(h,2\right).$$

Между ГЧС $\varGamma_1\left(e,2\right)$ и $\varGamma_3\left(f,2\right)$ существуют изоморфные преобразования вида (4) и (5). Тогда между ГЧС $\varGamma_2\left(g,2\right)$ и $\varGamma_4\left(h,2\right)$ существуют преобразования следующего вида:

$$L_2:\begin{Bmatrix} g_1=h_1+h_2 \\ g_2=h_1-h_2 \end{Bmatrix},\ L_2^{-1}:\begin{cases} h_1=\left(g_1+g_2\right)/2, \\ h_2=\left(g_1-g_2\right)/2. \end{cases} \tag{12}$$

Применим процедуру умножения размерности к системам $\varGamma_1$ и $\varGamma_2$ ($\varGamma_3$ и $\varGamma_4$ соответственно):

$$\varGamma_5\left(eg,4\right)=Д\left(\varGamma_1\left(e,2\right),\varGamma_2\left(g,2\right)\right),\ \varGamma_6\left(fh,4\right)=Д\left(\varGamma_3\left(f,2\right),\varGamma_4\left(h,2\right)\right).$$

То есть ГЧС $\varGamma_5$ и $\varGamma_6$ уже имеют размерность 4. Построим таблицы умножения ГЧС $\varGamma_5$ и $\varGamma_6$. Ввиду коммутативности элементов базиса:

$$e_i g_j\cdot e_r g_s=e_i e_r\cdot g_j g_s=e_m g_n,\ f_i h_j\cdot f_r h_s=f_i f_r\cdot h_j h_s=f_m h_n,\ i,j,r,s=1,2.$$

Если составные базисные элементы базисов переименовать по правилу

$$e_m g_n=e_{2(m-1)+n}, \tag{13}$$

и назвать полученные ГЧС $\varGamma_5$ и $\varGamma_6$ соответственно $W^{(2)}$ и $W_1^{(2)}$, то получатся следующие таблицы умножения:

$W^{(2)}$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_1	e_4	e_3
e_3	e_3	e_4	e_1	e_2
e_4	e_4	e_3	e_2	e_1

$W_1^{(2)}$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	0	0	0
f_2	0	f_2	0	0
f_3	0	0	f_3	0
f_4	0	0	0	f_4

(14)

При этом система $W^{(2)}$ — сильнозаполненная, а система $W_1^{(2)}$ — слабозаполненная.

В соответствии с третьим принципом линейное преобразование L_{56}, связывающее базисы $\{eg\}$ и $\{fh\}$ (оператор изоморфизма), будет

$$L_{56} = L \cdot L_2 ,$$

а обратное преобразование:

$$L_{56}^{-1} = L_{65} = L^{-1} \cdot L_2^{-1} .$$

Выполнив умножение линейных операторов и применив перенумерацию элементов базисов по правилу (12), получим следующий явный вид оператора изоморфизма систем $W^{(2)}$ и $W_1^{(2)}$, а также обратного ему:

$$\begin{array}{ll} e_1 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4, & f_1 = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)/4, \\ e_2 = f_1 - f_2 + f_3 - f_4, & f_2 = (e_1 - e_2 + e_3 - e_4)/4, \\ e_3 = f_1 + f_2 - f_3 - f_4, & f_3 = (e_1 + e_2 - e_3 - e_4)/4, \\ e_4 = f_1 - f_2 - f_3 + f_4. & f_4 = (e_1 - e_2 - e_3 + e_4)/4. \end{array} \quad (15)$$

В выражениях (14) для упрощения идентификаторам базисных элементов систем $W^{(2)}$ и $W_1^{(2)}$ присвоены значения e и f соответственно.

Таким образом, умножение гиперкомплексных чисел размерности 4 в системе $W_1^{(2)}$ можно упростить, перейдя с помощью левого выражения (15) в систему $W_1^{(2)}$, выполнить там умножение по правой таблице умножения (14), и совершить обратный переход по правому выражению (15) в ГЧС $W_1^{(2)}$. При этом, вместо 16 вещественных умножений и 12 сложений нужно выполнить 4 умножения и 24 сложения, и 4 коротких операции сдвига регистров.

Построение изоморфных пар ГЧС на основе систем квадриплексных и ортодвойных чисел

При синтезе структур реверсивных цифровых фильтров с использованием ГЧС [7–10] необходимо применять такие ГЧС, которые построены на основе системы комплексных чисел C. Одной из таких систем является система квадриплексных чисел K. Эта система получается коммутативным автоудвоением системы комплексных чисел. ГЧС K изоморфна системе бикомплексных чисел $C\oplus C$, являющейся прямой суммой двух систем комплексных чисел C. Таблицы умножения этих ГЧС четвертой размерности [4–6] приведены ниже. Изоморфизм этих ГЧС устанавливается фактом наличия нетривиальных решений системы уравнений изоморфизма (7).

K	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_4	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1

$C\oplus C$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	0	0
f_2	f_2	$-f_1$	0	0
f_3	0	0	f_3	f_4
f_4	0	0	f_4	$-f_3$

(16)

Прямой и обратный операторы изоморфизма между этими ГЧС представляют собой одно из нетривиальных решений системы (7). Они имеют вид:

$$L:\begin{cases} e_1 = f_1 + f_3, \\ e_2 = -f_2 + f_4, \\ e_3 = -f_2 - f_4, \\ e_4 = -f_1 + f_3. \end{cases} \quad L^{-1}:\begin{cases} f_1 = (e_1 - e_4)/2, \\ f_2 = (-e_2 - e_3)/2, \\ f_3 = (e_1 + e_4)/2, \\ f_4 = (e_2 - e_3)/2. \end{cases} \tag{17}$$

Таким образом, если при умножении гиперкомплексных чисел в системе K необходимо выполнить 16 вещественных умножений и 12 сложений, то при переходе в ГЧС $C\oplus C$ и использовании алгоритма умножения комплексных чисел (11) необходимо выполнить 6 вещественных умножений, 18 сложений и 4 короткие операции деления на 2.

На основе изоморфизмов

$$K(e,4) \simeq C\oplus C(f,4) \text{ и } W(g,2) \simeq W_1(h,2)$$

можно построить пару изоморфных ГЧС 8-й размерности. Применим процедуру умножения размерности к системам $K(e,4)$, $W(g,2)$:

$$Д\left(K(e,4), W(g,2)\right) = KW(eg,8),$$

и к системам $C\oplus C(f,4)$, $W_1(h,2)$:

$$Д\left(C\oplus C(f,4), W_1(h,2)\right) = CCW(fh,8).$$

Выполнив преобразования, аналогичные описанным выше, получаем таблицы умножения для систем KW и CCW:

KW	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_2	e_2	e_1	e_4	e_3	e_6	e_5	e_8	e_7
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$	e_7	e_8	$-e_5$	$-e_6$
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$	e_8	e_7	$-e_6$	$-e_5$
e_5	e_5	e_6	e_7	e_8	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	$-e_4$
e_6	e_6	e_5	e_8	e_7	$-e_2$	$-e_1$	$-e_4$	$-e_3$
e_7	e_7	e_8	$-e_5$	$-e_6$	$-e_3$	$-e_4$	e_1	e_2
e_8	e_8	$-e_7$	$-e_6$	$-e_5$	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1

и

CCW	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f_1	f_1	0	f_3	0	0	0	0	0
f_2	0	f_2	0	f_4	0	0	0	0
f_3	f_3	0	$-f_1$	0	0	0	0	0
f_4	0	f_4	0	$-f_2$	0	0	0	0
f_5	0	0	0	0	f_5	0	f_7	0
f_6	0	0	0	0	0	f_6	0	f_8
f_7	0	0	0	0	f_7	0	$-f_5$	0
f_8	0	0	0	0	0	f_8	0	$-f_6$

Прямой и обратный операторы изоморфизма между этими ГЧС представляют собой одно из нетривиальных решений системы (7). Они имеют вид:

$$L:\begin{cases} e_1 = f_1 + f_2 + f_5 + f_6, \\ e_2 = f_1 - f_2 + f_5 - f_6, \\ e_3 = -f_3 - f_4 + f_7 + f_8, \\ e_4 = -f_3 + f_4 + f_7 - f_8, \\ e_5 = -f_3 - f_4 - f_7 - f_8, \\ e_6 = -f_3 + f_4 - f_7 + f_8, \\ e_7 = -f_1 - f_2 + f_5 + f_6, \\ e_8 = -f_1 + f_2 + f_5 - f_6. \end{cases} \qquad L^{-1}:\begin{cases} f_1 = (f_1 + f_2 - f_7 - f_8)/4, \\ f_2 = (f_1 - f_2 - f_7 + f_8)/4, \\ f_3 = (-f_3 - f_4 - f_5 - f_6)/4, \\ f_4 = (-f_3 + f_4 - f_5 + f_6)/4, \\ f_5 = (f_1 + f_2 + f_7 + f_8)/4, \\ f_6 = (f_1 - f_2 + f_7 - f_8)/4, \\ f_7 = (f_3 + f_4 - f_5 - f_6)/4, \\ f_8 = (f_3 - f_4 - f_5 + f_6)/4. \end{cases}$$

Таким образом, если при умножении гиперкомплексных чисел в системе KW необходимо выполнить 64 вещественных умножений и 56 сложений, то при переходе в ГЧС CCW необходимо выполнить 16 вещественных умножений, 72 сложения и 8 коротких операции деления на 4.

Построение изоморфных пар ГЧС отличной от 2^n размерности

Комбинируя при умножении размерности ГЧС различных размерностей, можно получить изоморфные пары ГЧС размерности, отличные от степени 2. Например, рассмотрим такие пары изоморфных ГЧС: системы триплексных T и вещественно-комплексных $R \oplus C$ чисел, и системы двойных W и ортодвойных W_1 чисел:

$$T \simeq R \oplus C,\ W \simeq W_1.$$

Выполняем такие процедуры умножения размерности:

$$Д\left(T(e,3), W(g,2)\right) = TW(eg,6),$$

$$Д\left(R \oplus C(f,3), W_1(h,2)\right) = RCW(fh,6),$$

то есть получаем две изоморфных ГЧС шестой размерности:

$$TW \simeq RCW.$$

Выполнив преобразования, аналогичные описанным выше, получаем таблицы умножения для систем TW и RCC:

TW	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_2	e_2	e_1	e_4	e_3	e_6	e_5
e_3	e_3	e_4	$(e_5 - e_1)/2$	$(e_6 - e_2)/2$	$-e_3$	$-e_4$
e_4	e_4	e_3	$(e_6 - e_2)/2$	$(e_5 - e_1)/2$	$-e_4$	$-e_3$
e_5	e_5	e_6	$-e_3$	$-e_4$	e_1	e_2
e_6	e_6	e_5	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1

и

RCC	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	0	0	0	0	0
f_2	0	f_2	0	0	0	0
f_3	0	0	f_3	0	f_5	0
f_4	0	0	0	f_4	0	f_6
f_5	0	0	f_5	0	$-f_3$	0
f_6	0	0	0	f_6	0	$-f_4$

Прямой и обратный операторы изоморфизма между этими ГЧС представляют собой одно из нетривиальных решений системы (7). Они имеют вид:

$$L:\begin{cases} e_1 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4, \\ e_2 = f_1 - f_2 + f_3 - f_4, \\ e_3 = \pm(f_5 + f_6)/2, \\ e_4 = \pm(f_5 - f_6)/2, \\ e_5 = f_1 + f_2 - f_3 - f_4, \\ e_6 = f_1 - f_2 - f_3 + f_4. \end{cases} \qquad L^{-1}:\begin{cases} f_1 = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)/4, \\ f_2 = (e_1 - e_2 + e_3 - e_4)/4, \\ f_3 = (e_1 + e_2 - e_3 - e_4)/4, \\ f_4 = (e_1 - e_2 - e_3 + e_4)/4, \\ f_5 = \pm(e_3 + e_4)/2, \\ f_6 = \pm(e_3 - e_4)/2. \end{cases}$$

Значит, если при умножении гиперкомплексных чисел в 6-мерной ГЧС TW необходимо выполнить 40 вещественных умножений и 30 сложений, то при переходе в ГЧС CCW необходимо выполнить 10 вещественных умножений, 42 сложения и 10 коротких операции деления на 4.

Выводы

Проведенные исследования показали, что выполнение нелинейных операций над гиперкомплексными числами с помощью перехода от сильнозаполненной ГЧС к изоморфной слабозаполненной ГЧС, выполнения операций в ней, и обратного перехода значительно снижает количество необходимых вещественных операций и, особенно, умножения. Так при использовании гиперкомплексных чисел размерности 2^n количество умножений снижается в n раз, а в других случаях более чем в $n/2$ раз. Это говорит о целесообразности применения данных алгоритмов при решении задач обработки цифровых сигналов.

1. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. Москва: Мир, 1989. 449 с.

2. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. Москва: Радио и связь, 1985. 248 с.

3. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. Київ: Вища школа, 1980. 192 с.

3. Синьков М.В., Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А. Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. Киев: Инфодрук, 2010. 388 с.

4. Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е. Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений. Киев: Инфодрук, 2012. 183 с.

5. Калиновский Я.А. Эффективные алгоритмы решения уравнений изоморфизма гиперкомплексных числовых систем с помощью представлений экспонент. *Электронное моделирование*. 2017. Т. 39. № 1. С. 75–90.

6. Toyoshima H. Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters. *Trans. Fundamentals*. 2002. Aug. E85-A. 8. P. 1870–1876.

7. Schutte H.D. Digitalfilter zur Verarbeitung komplexer und hypercomplexer Signale. Dissertation. Paderborn, 1991. 100 p.

8. Schulz D., Seitz J., LustosadaCosta J.P. Widely Linear SIMO Filtering for Hypercomplex Numbers. *IEEE Information Theory Workshop*. 2011. P. 390–394.

9. Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Хицко Я.В. Оптимизация суммарной параметрической чувствительности реверсивных цифровых фильтров с коэффициентами в неканонических гиперкомплексных числовых системах. *Электронное моделирование*. 2015. Т. 37. № 5. С. 117–126.

10. Каліновський Я.О. Розвиток методів теорії гіперкомплексних числових систем для математичного моделювання і комп’ютерних обчислень: дис. … докт. техн. наук. Київ, 2007. 308 с.

11. Калиновский Я.А. Структура гиперкомплексного метода быстрого вычисления линейной свертки дискретных сигналов. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2013. Т. 15. № 1. С. 31–44.

Поступила в редакцию 21.06.2018