

УДК 621.791

О. А. Токалин

Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Влияние внутренних напряжений на волновые процессы и поглощение ультразвука при сварке

Теоретически исследовано взаимодействие плоской упругой волны и статических напряжений и деформаций при ультразвуковой сварке оптических элементов. Установлено, что неоднородность статических напряжений приводит к возникновению слабой связи между продольными и поперечными колебаниями в упругой волне, а также к ослаблению продольной (звуковой) компоненты волны. При достаточно больших градиентах статических деформаций вблизи области прижима свариваемых деталей может образовываться область максимального (резонансного) поглощения ультразвука, размеры которой сравнимы с эффективной длиной l_F , зависящей как корень квадратный от отношения величины силы прижима к модулю упругости, что способствует локализации поглощения энергии ультразвука.

Ключевые слова: упругая волна, градиенты напряжения и деформации, слабая связь между продольной и поперечной компонентами, локальность поглощения ультразвука.

Введение

Из практики использования ультразвуковой сварки полимерных материалов хорошо известно, что для получения надежного соединения рекомендуется применение специальных мер для минимизации площади контакта свариваемых материалов. Считается, что это позволяет достигать высокой концентрации энергии в области сварного шва [1, 2]. В случае сварки оптических материалов (таких как поликарбонат, полиметилметакрилат, полистирол) из-за сравнительно высокой жесткости и достаточно хорошей проводимости ультразвуковых волн, энергия ультразвука перераспределяется по объему так, что ее максимум оказывается вне области сварного шва и преимущественно в центральной области свариваемого элемента [3]. Поэтому только лишь минимизация площади соприкосновения не достаточна для концентрации энергии ультразвука. Для локализации поглощения энергии и выделения тепла необходимо поддерживать прижим свариваемых эле-

ментов. Существенную роль в этом играют внутренние напряжения в области сварного шва, которые могут способствовать поглощению энергии ультразвука. Изучение проблемы влияния внутренних напряжений на упругие волновые процессы имеет продолжительную историю [4–7], однако некоторые ее аспекты не потеряли актуальности (см., например [8–10]). При этом в [4] и других работах на ее основе используется не применимая для условий ультразвуковой сварки модель плоских напряжений и деформаций, а в работах школы А.Н. Гузя проблеме затухания волн не уделяется должного внимания. То есть роль внутренних напряжений в затухании упругих колебаний и поглощении энергии упругих волн практически не исследована. Целью настоящей работы является исследование влияния внутренних напряжений и деформаций на упругие волновые процессы при ультразвуковой сварке оптических элементов на основе применимой к реальным условиям трехмерной модели и развитие теоретических основ ультразвуковой технологии.

Постановка задачи

Влияние внутренних напряжений на упругие волновые процессы как нелинейное явление можно исследовать, используя, так называемую, геометрическую нелинейность тензора деформаций, которая не зависит от величины напряжений [11, 12]. С учетом аддитивности векторов смещений, обусловленных волновым процессом, и смещений, обусловленных внутренними напряжениями (которые будем считать статическими), в билинейном приближении суммарный тензор деформаций можно представить в виде суммы трех тензоров:

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^{\Sigma} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} (u_j + U_j) + \frac{\partial}{\partial x^j} (u_i + U_i) + \sum_k \frac{\partial}{\partial x^i} (u_k + U_k) \frac{\partial}{\partial x^j} (u_k + U_k) \right] = \hat{\varepsilon}(\vec{u}) + \hat{\varepsilon}(\vec{U}) + \varepsilon^{\text{int}}, \quad (1)$$

где $\hat{\varepsilon}(\vec{u})$ — тензор динамических (волновых) деформаций; $\hat{\varepsilon}(\vec{U})$ — тензор статических (внутренних) деформаций;

$$\varepsilon_{ij}^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial U_k}{\partial x^i} \frac{\partial u_k}{\partial x^j} + \frac{\partial U_k}{\partial x^j} \frac{\partial u_k}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2} (\partial_i U_k \partial_j u_k + \partial_j U_k \partial_i u_k) \quad (2)$$

— билинейный тензор деформаций, обусловленный взаимодействием динамических и статических напряжений. В формуле (2) и в дальнейшем используются общепринятые сокращения для сумм и производных. Подстановка тензора (1) в волновое уравнение для динамических переменных

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 2\mu \left[\vec{\nabla} \cdot (\hat{\varepsilon}(\vec{u}) + \hat{\varepsilon}^{\text{int}}) + \frac{\nu \hat{E}}{1-2\nu} \vec{\nabla} (\theta_u + \theta^{\text{int}}) \right], \quad (3)$$

где ρ — плотность упругой среды; $\hat{\sigma}$ — тензор напряжений; μ — модуль сдвига; \hat{E} — единичный тензор; ν — коэффициент Пуассона; $\theta_u = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ и $\theta^{\text{int}} = \vec{\nabla} \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$ — следы соответствующих тензоров деформаций (точкой обозначены производные по времени).

чается свертка тензора по какому-либо индексу или в терминах теории поля скалярное произведение векторов; наблой $\vec{\nabla}$ — векторный дифференциальный оператор (градиента), позволяет исследовать влияние внутренних напряжений на протекание упругих волновых процессов при ультразвуковом воздействии.

Анализ волнового уравнения и полученные результаты

Исходное уравнение (3) весьма громоздко для анализа в общем случае и может быть использовано лишь для численного моделирования. Для получения приемлемых результатов в аналитическом представлении необходимо его немного упростить. Ограничиваясь рассмотрением плоских упругих волн, что позволяет сократить размерность уравнения, так как для плоской волны, распространяющейся вдоль орта \vec{m} $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}(l = \vec{m} \cdot \vec{r}, t)$, и, используя разложение плоской волны на продольную $u_l = \vec{m} \cdot \vec{u}$ и поперечную $\vec{u}_t = \vec{u} \times \vec{m}$ составляющие, получим:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_l &= c_l^2 \left\{ u_l'' + u_k'' (\nabla U_k)_l + \gamma^2 \left[\Delta U_k + \frac{(\vec{m} \cdot \vec{\nabla})}{1-2\nu} (\vec{\nabla} U_k)_l \right] u_k' \right\}, \\ \ddot{\vec{u}}_t &= c_t^2 \left\{ \vec{u}_t'' + u_k'' (\vec{\nabla} U_k)_t + u_k' \frac{(\vec{m} \cdot \vec{\nabla})}{1-2\nu} (\vec{\nabla} U_k)_t \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $(\vec{\nabla} U_k)_l = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) U_k$, $(\vec{\nabla} U_k)_t = -[\vec{m} \times \vec{\nabla}] U_k$; $c_{l,t}$ — фазовые скорости продольной и поперечной составляющих упругой волны; $\gamma = c_t/c_l = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$ — их отношение. Штрихами обозначены производные вдоль направления орта \vec{m} . Далее ограничимся наиболее важным случаем осесимметричных внутренних напряжений при совпадении оси симметрии с направлением распространения плоской волны и воспользуемся цилиндрической системой координат, ось Z которой совпадает с осью симметрии. В этом случае система уравнений (4) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= c_t^2 \left[(1 + \partial U) u'' + (\partial W) w'' + (\gamma^{-2} - 1) (u' \partial U' + w' \partial W') \right], \\ \ddot{v} &= c_t^2 v'', \\ \ddot{w} &= c_l^2 \left[U' u'' + (1 + W') w'' + \left(\frac{\gamma^2}{r} \partial r \partial U + U'' \right) u' + \left(\frac{\gamma^2}{r} \partial r \partial W + W'' \right) w' \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $\{u, v, w\} = \vec{u}$ — компоненты вектора динамического смещения; $\{U, V = 0, W\} = \vec{U}$ — компоненты вектора статического смещения в цилиндрической системе координат; $\partial = \partial_r = \frac{\partial}{\partial r}$; штрихами обозначены производные по z . Заметим, что уравнение для азимутальной компоненты динамического вектора

ничем не отличается от классического скалярного волнового уравнения в изотропной однородной среде, поэтому в дальнейшем его можно опустить. Рассматривая волну монохроматической (или используя преобразование Фурье для немонохроматической волны), избавляемся от производных по времени. В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений Гельмгольца, которую удобно представить в матричном виде:

$$A \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}'' + 2B \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}' + k^2 \Gamma \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

где $k^2 = k_l k_t = \omega^2 c_l^{-1} c_t^{-1}$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \partial U & \partial W \\ U' & 1 + W' \end{pmatrix} = \hat{E} + \hat{\varepsilon}(\vec{U}) - \hat{\Omega}(\vec{U});$$

$$\hat{\Omega}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_\phi \\ -\Omega_\phi & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & U' - \partial W \\ \partial W - U' & 0 \end{pmatrix};$$

$$2B = \begin{pmatrix} (\gamma^{-2} - 1) \partial U' & (\gamma^{-2} - 1) \partial W' \\ \Delta_\gamma U & \Delta_\gamma W \end{pmatrix}; \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix};$$

$\Delta_\gamma = \frac{\gamma^2}{r} \partial_r r \partial_r + \partial_z^2$ — дифференциальный оператор, который отличается от обычного гамильтониана лишь наличием множителя γ^2 в первом члене.

Двумерное уравнение Гельмгольца (6) описывает поведение амплитуд колебаний в меридиональных плоскостях при наличии внутренних статических напряжений. Как можно заметить, по своей форме оно соответствует системе уравнений, описывающих поведение слабо связанных мод колебаний, причем за слабую связь отвечают не внутренние напряжения и деформации упругой среды, а их производные. В частности, в случае однородных деформаций $B = 0$ и связи между модами, как и их ослабления или усиления за счет этого нет. Таким образом, за ослабление или усиление волн и перекачку энергии между модами отвечают именно градиенты внутренних напряжений и деформаций.

Для оценки степени влияния внутренних напряжений на волновые параметры приведем уравнение (6) к каноническому виду, используя стандартное экспоненциальное преобразование

$$\begin{aligned} u &= y_1 \exp f_{11} + y_2 \exp f_{12}, \\ w &= y_1 \exp f_{21} + y_2 \exp f_{22}, \end{aligned} \quad (7)$$

с комплексной матрицей F , компоненты которой определяются из условия редукции первых производных и диагонализации матрицы A в уравнении (6). После проведения необходимых вычислений получим следующие выражения для элементов матрицы, которые в свою очередь можно еще более упростить, ограничиваясь линейными по деформациям членами:

$$\begin{aligned}
 f'_{11} &= \frac{1}{1-\delta_A^2} \left[\delta_A^2 \left(\frac{\beta_{12}}{\alpha_{12}} + \frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \right) - \left(\frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}} + \delta_A^2 \frac{\beta_{22}}{\alpha_{22}} \right) \right] \approx -\frac{\gamma^{-2}-1}{2} \frac{\partial U'}{1+\partial U'}, \\
 f'_{22} &= \frac{1}{1-\delta_A^2} \left[\delta_A^2 \left(\frac{\beta_{12}}{\alpha_{12}} + \frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \right) - \left(\delta_A^2 \frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}} + \frac{\beta_{22}}{\alpha_{22}} \right) \right] \approx -\frac{1}{2} \frac{\Delta_\gamma W}{1+W'}, \\
 f'_{12} &= \frac{1}{1-\delta_A^2} \left[\frac{\beta_{12}}{\alpha_{12}} + \delta_A^2 \frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} - \left(\frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}} + \frac{\beta_{22}}{\alpha_{22}} \right) \right] \approx \frac{\gamma^{-2}-1}{2} \frac{\partial W'}{\partial W} + SpF', \\
 f'_{21} &= \frac{1}{1-\delta_A^2} \left[\delta_A^2 \frac{\beta_{12}}{\alpha_{12}} + \frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} - \left(\frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}} + \frac{\beta_{22}}{\alpha_{22}} \right) \right] \approx \frac{\Delta_\gamma U}{2U'} + SpF',
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $\delta_A^2 = \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22}} = \frac{\varepsilon_{rw}^2 - \Omega_\phi^2}{(1+\varepsilon_{rr})(1+\varepsilon_{ww})} \ll 1$ — квадратичный по деформациям коэффициент, величиной которого в первом приближении можно пренебречь; $SpF = f_{11} + f_{22}$ — след матрицы преобразования (7). В результате исходное уравнение (6) приводится к каноническому виду

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'' + K^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{9}$$

где матрица-инвариант K^2 , которая определяет волновые векторы нормальных мод, в линейном приближении соответственно будет:

$$K^2 = \begin{pmatrix} \kappa_t^2 & - \left[\kappa_t^2 + \left(\frac{\beta_{12}}{\alpha_{12}} \right)^2 \right] \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} e^{f_{22}-f_{11}} \\ - \left[\kappa_l^2 + \left(\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \right)^2 \right] \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} e^{f_{11}-f_{22}} & \kappa_l^2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\text{где } \kappa_{t,l}^2 = \frac{k_{t,l}^2}{\alpha_{11,22}} - \left(\frac{\beta_{11,22}}{\alpha_{11,22}} \right)^2.$$

Соответствующее уравнению (9) секулярное (вековое) уравнение имеет вид:

$$\chi^4 + \chi^2 SpK^2 + \det K^2 = 0, \tag{11}$$

где $SpK^2 = \kappa_l^2 + \kappa_t^2$ и $\det K^2 = \kappa_l^2 \kappa_t^2 - \delta_A^2 \left[\kappa_l^2 + \left(\beta_{12}/\alpha_{12} \right)^2 \right] \left[\kappa_l^2 + \left(\beta_{21}/\alpha_{21} \right)^2 \right]$ — соответственно след и определитель матрицы K^2 . Корни секулярного уравнения (11):

$$\begin{aligned} \chi_{1,2}^2 &= -\frac{1}{2} \left(SpK^2 \pm \sqrt{(SpK^2)^2 - 4 \det K^2} \right) \approx \\ &\approx -\kappa_{i,t}^2 \pm \delta_A^2 \frac{\left[\kappa_t^2 + \left(\frac{\beta_{12}}{\alpha_{12}} \right)^2 \right] \left[\kappa_l^2 + \left(\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \right)^2 \right]}{\kappa_t^2 - \kappa_l^2} \approx -\kappa_{i,l}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

с точностью до малых квадратичных поправок совпадают с волновыми числами $k_t \left(1 - \frac{1}{2} \partial U \right)$ и $k_l \left(1 - \frac{1}{2} W' \right)$, так что нормальные моды в линейном по деформациям приближении мало отличаются от невозмущенных компонент упругой волны, поскольку компоненты вектора смещения при разумных напряжениях много меньше длин упругих волн ультразвуковых частот. Соответственно информация о взаимодействии плоской волны с внутренними статическими напряжениями преимущественно заключается в компонентах матрицы F . Таким образом, пренебрегая всеми малыми поправками, значения амплитуд поперечной и продольной компонент упругой волны в области с существенными градиентами внутренних напряжений можно приближенно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= e^{ik_t z} \exp \left(-\frac{\gamma^{-2} - 1}{2} \int dz \frac{\partial U'}{1 + \partial U} \right) + e^{ik_l z} \exp \left(SpF + \frac{\gamma^{-2} - 1}{2} \int dz \frac{\partial W'}{\partial W} \right), \\ w &= e^{ik_t z} \exp \left(SpF + \frac{1}{2} \int dz \frac{\Delta_\gamma U}{U'} \right) + e^{ik_l z} \exp \left(-\frac{1}{2} \int dz \frac{\Delta_\gamma W}{1 + W'} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$SpF = -\frac{1}{2} \int dz \left[(\gamma^{-2} - 1) \frac{\partial U'}{1 + \partial U} + \frac{\Delta_\gamma W}{1 + W'} \right] = -\frac{1}{2} \left[(\gamma^{-2} - 1) \ln(1 + \partial U) + \int dz \frac{\Delta_\gamma W}{1 + W'} \right] \quad (14)$$

— след матрицы F .

Выражение (13) получено из самых общих положений линейной теории упругости, является основным результатом работы и может быть использовано для конкретных расчетов, если распределения деформаций или напряжений известны. Для ультразвуковых волн, которые переносят продольные колебания, изменения, обусловленные взаимодействием с внутренними статическими напряжениями и деформациями, с точностью до малых квадратичных членов можно представить в виде:

$$w = \text{Re} \left[(1 + \partial U)^{-\frac{1}{2}(\gamma^{-2} - 1)} \exp \left(ik_t z + \int dz \frac{\Delta_\gamma U}{2U'} \right) + \exp(ik_l z) \right] \exp \left(-\frac{1}{2} \int dz \frac{\Delta_\gamma W}{1 + W'} \right). \quad (15)$$

Вынесенный за квадратные скобки в выражении (15) экспоненциальный множитель можно рассматривать как фактор ослабления (затухания) волны по амплитуде, а подынтегральное выражение в нем — как «коэффициент ослабления» упругой волны по амплитуде η_l . Кавычки отражают тот факт, что «коэффициент ос-

лабления» не является константой, а зависит в общем случае как от координаты z , измеряемой вдоль распространения волны, так и от координаты r . Отметим, что первый член в квадратных скобках выражения (15) отражает влияние слабой связи между продольной и поперечной модами упругой волны в области неоднородных напряжений и деформаций.

В качестве простого, но важного для понимания характера взаимодействия плоской упругой волны с внутренними напряжениями примера, применим полученные результаты для случая, когда напряжения и деформации создаются в полубесконечной упругой среде силой, приложенной в точке на поверхности. В этом случае распределения деформаций известны и задаются в аналитическом виде (модель Буссинеска [13]), а результаты расчетов можно использовать как функцию Грина в случае распределенной по поверхности нагрузки. Для случая действия перпендикулярной к поверхности силы компоненты вектора смещения имеют вид:

$$U = l_F^2 \frac{r}{R^2} \left(\frac{z}{R} - \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \frac{R}{R+z} \right) = \frac{l_F^2}{R} \xi \left(\zeta - \frac{\gamma^2}{(1-\gamma^2)(1+\zeta)} \right), \quad (16)$$

$$W = \frac{l_F^2}{R} \left(\frac{1}{1-\gamma^2} + \frac{z^2}{R^2} \right) = \frac{l_F^2}{R} \left(\frac{1}{1-\gamma^2} + \zeta^2 \right),$$

где $\zeta = \frac{z}{R}$; $\xi = \frac{r}{R}$; $R = \sqrt{r^2 + z^2}$; $l_F = \sqrt{\frac{F}{4\pi\mu}} = \sqrt{\frac{(1+\nu)F}{2\pi E}}$. Величина l_F имеет смысл некоторой эффективной длины, зависящей от силы воздействия и упругих свойств среды (для оптических полимеров и характерных напряжений прижима сонотрода ее величина составляет примерно 10–100 мкм).

Выполняя дифференцирование и необходимые преобразования, для «коэффициента ослабления» ультразвуковой волны получим следующее выражение:

$$\eta_l = \frac{1}{2} \frac{\Delta_\gamma W}{1+W'} = \frac{l_F^2}{2R^3} \frac{\left[1 - 3(1-\gamma^2)\zeta^2 \right] (1-3\zeta^2) - 6(1-\gamma^2)(\xi\zeta)^2}{1 - \frac{l_F^2}{R^2} \zeta \left(3\zeta^2 - \frac{1-2\gamma^2}{1-\gamma^2} \right)}, \quad (17)$$

которое указывает на то, что существуют особые точки, где «коэффициент ослабления» обращается в бесконечность, и колебания полностью затухают. Это иллюстрируют результаты расчетов по формуле (17), представленные на рис. 1, а–в в виде зависимостей от нормированной на величину эффективной длины l_F глубины для трех различных значений прицельного параметра, соответствующего расстоянию вдоль фронта волны от центральной оси симметрии внутренних напряжений. Расчеты выполнены для оптических полимерных материалов (поликарбоната (ПК) и полиметилметакрилата (ПММА)), у которых отношение фазовых скоростей поперечных и продольных упругих волн составляет около 0,6.

Наличие особых точек и сингулярности «коэффициента ослабления» ультразвука определяются идеализацией исходной модели Буссинеска и соответственно сингулярностью в выражениях для компонент вектора смещения (16). Для

реальных условий возникновения внутренних напряжений сингулярность отсутствует и, следовательно, пики ослабления амплитуды колебаний ограничены. Тем не менее, полученные результаты указывают на то, что в области концентрации внутренних напряжений ослабление ультразвука максимально. Результаты расчетов для границ областей максимального поглощения ультразвука показаны на рис. 2 и рис. 3.

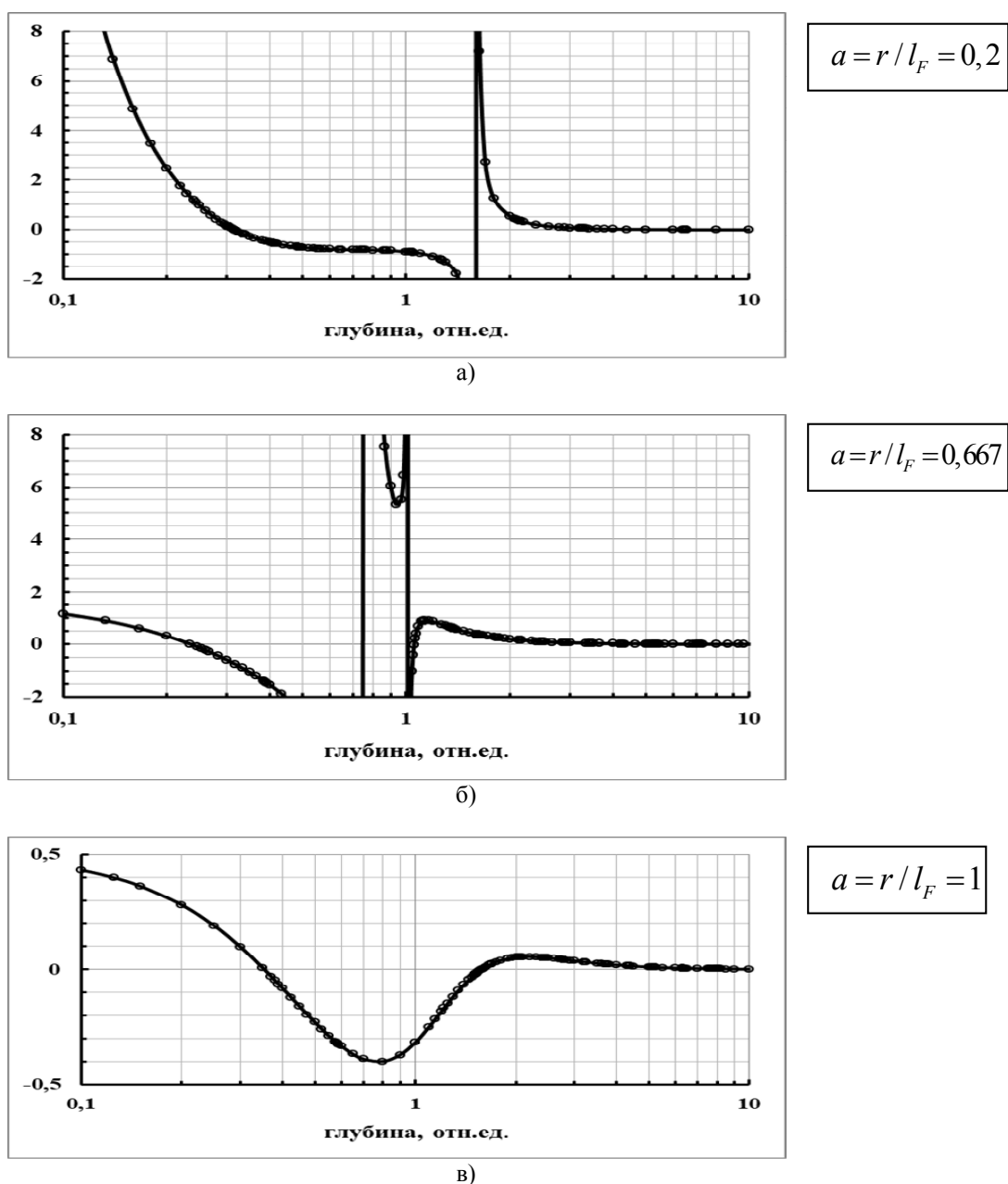


Рис. 1. Зависимости «коэффициента ослабления» ультразвука от глубины для разных расстояний вдоль фронта волны от оси симметрии напряжений

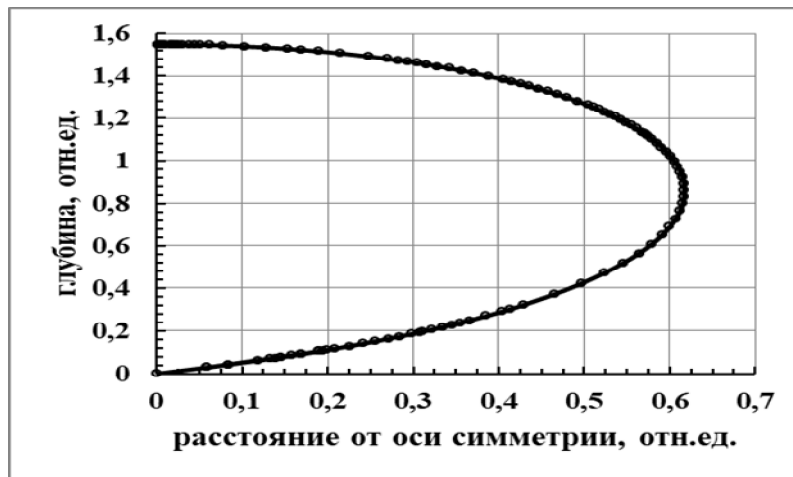


Рис. 2. Граница области максимального поглощения ультразвука в меридиональной плоскости для случая $\gamma^2 = 0,4$ (соответствует ПК и ПММА)

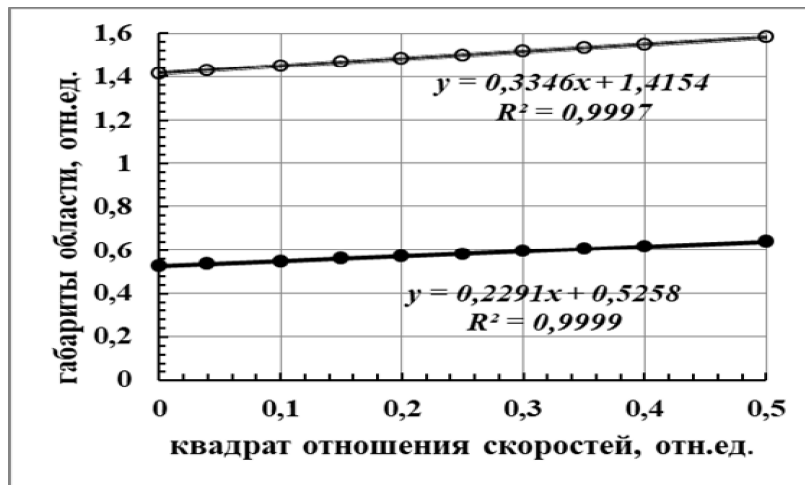


Рис. 3. Зависимости габаритов области максимального поглощения ультразвука от величины квадрата отношения поперечных и продольных упругих волн: светлые круги — по глубине; темные круги — по расстоянию от оси

Как видно из полученных результатов, габариты области максимального поглощения ультразвука, которая расположена вблизи поверхности упругого материала вблизи точки приложения силы, сравнимы с величиной эффективной длины l_F и линейно зависят от квадрата отношения скоростей поперечной и продольной мод γ^2 во всем допустимом диапазоне изменения упругих свойств. Из этого следует, что область, в которой затухание упругой волны максимально, локализована вблизи точки приложения деформирующей силы, что в свою очередь показывает в согласии с результатами [3], что основную роль в процессе ультразвуковой сварки оптических полимерных материалов играет концентрация поглощения энергии ультразвука в области неоднородности статических деформаций.

Выводы

На основании развития общих принципов взаимодействия упругих волн с внутренними напряжениями и деформациями в упругой среде и анализа полученных при некоторых ограничениях теоретических результатов представляется возможным сделать следующие выводы. Уменьшение площади контакта свариваемых ультразвуком оптических полимерных деталей вследствие хорошей проводимости ими ультразвука недостаточно для концентрации теплового воздействия ультразвука при однородном его поглощении. Однако, вследствие взаимодействия упругих волн ультразвука со статическими неоднородными напряжениями в материале свариваемых элементов поглощение ультразвука неоднородно. Причем область максимального поглощения локализована вблизи области контакта прижимаемых свариваемых деталей, что является определяющим условием для образования качественного сварного шва.

1. Волков С.С., Черняк Б.Я. Сварка пластмасс ультразвуком. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Химия. 1986. 256 с.
2. Шестопап А.Н., Васильев Ю.С., Минеев Э.А., Тарасенко В.П., Тарногородский В.П. Справочник по сварке и склеиванию пластмасс. Київ: Техніка, 1986. 192 с.
3. Токалин О.А., Особенности распределения энергии при ультразвуковой сварке микроразмерных оптических элементов. *Регістрація, зберігання і оброб. даних*. 2015. Т. 17. № 2. С. 3–13.
4. Biot M.A. The influence of initial stress on elastic waves. *Journal of applied Physics*. American Institute of Physics. 1940. Vol. 11. No 8. P. 522–530.
5. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г. Об описании влияния конечных деформаций на скорости распространения упругих волн. *Доклады АН СССР*. 1971. Т. 198. № 2. С. 316–318.
6. Guz A.N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *International Applied Mechanics*. 2002. Vol. 38. No 1. P. 35–77.
7. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
8. Singh B. Rayleigh wave in an initially stressed transversely isotropic dissipative half-space. *Journal of Solid Mechanics*. 2013. Vol. 5. No 3. P. 270–277.
9. Лысь Е.В., Роменский Е.И., Чеверда В.А., Эпов М.И. Распространение упругих волн в средах с начальными напряжениями. Интерэкспо ГЕО-Сибирь 2014. X Международный научный конгресс (Новосибирск-2014). Сборник материалов. 2014. Т. 2 С. 158–162. URL: <http://www.ipgg.sbras.ru/ru/science/publications/publ-rasprostranenie-uprugikh-voln-v-sredakh-s-nachalnymi-2014-0416247>
10. Гузь А.Н. Механика движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями. Сб. «Современные проблемы механики» в 3-х т. Т. 1. С. 85–156. Киев: Литера ЛТД, 2015. 550 с.
11. Токалин О.А. Влияние статических внутренних напряжений на прохождение упругих волн в твердом теле. *Регістрація, зберігання і оброб. даних*: зб. наук. праць Щорічної підсумкової наукової конференції/відп. ред. В.В.Петров. Київ, ІПРІ НАН України. 2013. С. 28–35.
12. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. Москва: Наука. 1984. 403 с.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. Изд. 4-е. Москва: Наука. 1987. 250 с.

Поступила в редакцию 31.08.2018