DOI: 10.35681/1560-9189.2024.26.2.316706

УДК 004.94+515.4

О. В. Залевська[1], Г. С. Пуха[2], І. А. Варава[1], О. В. Коваль[1,3], Т. В. Пироговська[1], А. П. Мусієнко[1]
[1]НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»
Берестейський проспект, 37, 03056 Київ, Україна
[2]Особливе конструкторське бюро «Шторм»
НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»
Берестейський проспект, 37, 03056 Київ, Україна
[3]Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Коефіцієнти Чебишева в моделюванні хвильового процесу методом нормальних мод

Розглянуто спосіб урахування часового параметра в тривимірному методі нормальних мод, який застосовується при розробці програмного забезпечення моделювання поширення гідроакустичного поля. Запропоновано перехід від класичного врахування часу до дискретного та навпаки. Введення часової координати розширює можливості дослідження та моделювання хвильових рівнянь. У динамічній системі випромінювач-приймач вага впливу на систему кожної моди є різною. Вплив нормальної хвилі на систему протягом певного періоду часу забезпечується поліноміальними коефіцієнтами Чебишева. Під час статистичного аналізу отриманих даних було розглянуто інтерполяції даних за допомогою лінійної, показникової, квадратичної і логарифмічної функцій. Установлено, що квадратична і експоненціальна функції мають однакові значення параметрів адекватності моделі та точності апроксимації. Запропоновано надалі апроксимувати результуючий ряд квадратичною функцією, яка зменшує обрахунки та навантаження на обчислювальну техніку.

Ключові слова*. метод нормальних мод, часова змінна, гідроакустика, гідроакустичні сигнали, програмне забезпечення моделювання звукових хвиль, інформаційні технології.*

Вступ

Сучасні дослідження світового океану вимагають більшої деталізації та аналізу експериментальних даних, що посилює вимоги до деталізації його опису. З розвитком сучасних інформаційних технологій збільшилися можливості комп'ютерного моделювання звукових хвиль, що сприяє розвитку теоретичних основ досліджень гідроакустики. Під час таких досліджень виникає питання про поведінку звукових хвиль під водою, а саме їхня зміна з впливом часу. Як правило, досліджується розповсюдження не самих звукових хвиль, а динаміка їхніх параметрів, у зв'язку з чим доцільно встановити дискретну та неперервну залежності між рівнянням нормальних мод сигналу, який генерується імпульсним нерухомим джерелом з плином часу. В статті розкривається побудова дискретної моделі процесу утворення і поширення звукових хвиль під водою та дослідження даної моделі на адекватність при здійсненні комп'ютерного моделювання із використанням програмного комплексу моделювання гідроакустичних сигналів, а також оцінюється точність апроксимації побудованої моделі.

Аналіз останніх досліджень

На утворення та поширення звукових хвиль у водах океану мають вплив такі параметри системи як погодні умови, солоність і густина водного середовища, просторові та енергетичні характеристики джерела випромінювання сигналу [1]. Дослідження утворення гідроакустичних каналів, розробка підводного зв'язку та телеметрії, вимагають більшої деталізації у заданні вхідних параметрів [2]. У роботах [3, 4] розглянуто генерацію імпульсів сферичним джерелом біля ідеальної границі та питання інтерференції взаємодії плоских і сферичних хвиль. Постановка хвильового рівняння має передбачати процес поширення акустичних збурень з урахуванням впливу відбитого та розсіяного гідроакустичного поля. Процес вирішення даного питання здійснювався із використанням розробленого програмного комплексу моделювання звукового поля методом нормальних мод. Розробка, моделювання та використання такого підходу потребує введення часової залежності між змінними динамічної системи [4]. Це дозволить проводити більш глибоке дослідження процесу поширення звукових хвиль у підводному каналі, їхній акустичний тиск у вертикальних перетиках середовища та встановлення коефіцієнтів збурення поля під час роботи з джерелом.

Такий підхід до моделювання потребує аналізу класичних моделей дослідження хвильових процесів. У роботі [5] розглянуто двовимірну аналітичну модель хвильового рівняння в циліндричному хвилеводі. Оцінку похибки такого підходу наведено авторами в роботі [6]. У [7] визначено оцінку відстані від випромінювача до початку координат та опис акустичного поля лише через дискретні структури. В ході роботи [7] розглянуто аналітичний розв'язок для неоднорідного гідроакустичного поля на основі методу нормальних мод. Такий підхід враховує вплив донного прошарку на характеристики поля.

Найбільш ефективне застосування методу нормальних мод є для випромінювачів, що генерують звук на низькій частоті. В роботі [8] показано, що шум корабля, який віддаляється, можна віднести до низькочастотного. Під час подібних досліджень звукових хвиль і їхнього випромінювача досить часто використовується тиск та акустична енергія [9], що визначені в кожній точці середовища. В [9] розглянуто спектри судового шуму та шуму перевезення із використанням методу нормальних хвиль. Для оцінки точності методу використано дані, які отримані для профілю Мунка. Дно розглядається як шар з різною швидкістю та щільністю, тож метод можливо застосовувати для більш широкого спектра задач.

У більшості розглянутих задач перехід до тривимірної моделі методу нормальних хвиль має певну проблематику, що пов'язана зі стійкістю нелінійних нормальних мод [10]. Тривимірна модель, при застосуванні методу, не враховує в явному вигляді змінну часу. Вважається, що застосування методу нормальних мод можливе за умови, що моди є незмінними протягом певного часового періоду [11]. Проте, при дослідженні випромінювання точкового джерела циліндричного хвилеводу, врахування часової змінної є необхідним.

Постановка задачі

Для моделювання звукового поля в морському середовищі використовується метод нормальних мод. Завдяки циліндричній симетрії випромінювання хвилі описується функцією, що задовольняє рівняння Гельмгольца [12]:

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c^2}\Phi = \frac{\delta(r-r_0)\delta(z-z_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r}, \quad (1)$$

де

ω — частота звукового поля;

$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа;

δ — дельта функція Дірака;

$c(r, z, \varphi)$ — розподіл швидкості звуку в хвилеводі;

(r_0, z_0, φ_0) — координати випромінювача.

Поверхня хвилеводу є вільною і відповідає граничним умовам:

$$\Phi|_{x=0} = 0; \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right|_{z=h_1} = 0. \quad (2)$$

Розв'язок рівняння (1) необхідно зобразити із використанням методу нормальних мод з уведенням часової змінної.

Головна частина

Розглянемо двовимірну задачу поширення звукового поля від точкового джерела в неоднорідному хвилеводі з неперервною швидкістю звуку.

Задача зводиться до знаходження розв'язку двовимірного рівняння Гельмгольца в циліндричній системі координат (r, z) зі звуковою швидкістю $c(z)$ та щільністю $\rho(z)$ [9]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right) + \rho(z)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right) - \frac{\omega^2}{c(z)}p = -\frac{\delta(r)\delta(z-z_0)}{2\pi r}, \quad (3)$$

$$P|_{z=0} = 0; \left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=h} = 0. \quad (4)$$

Розв'язуючи задачі (3), (4) методом нормальних мод, отримуємо функцію вигляду

$$P(r,z) = \sqrt{\frac{2\rho}{h}}\sum_{m=1}^{\infty}\sin(\gamma_n z_0)\sin(\gamma_n z)H_0^1(k_m r), \quad (5)$$

де

$$\gamma_n = \frac{\pi(0{,}5-m)}{n},\ m = 0,\ 1,\ 2,\ldots \quad H_0^1(k_m r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_m r}}\, e^{i(k_m r - \frac{\pi}{4})}.$$

При даному підході кожен доданок є відповідною нормальною модою, що не змінюється протягом певного часу. При введенні змінної часу доцільно було би просумувати знайдені моди. Такий підхід забезпечить зв'язок між нормальними модами, але не забезпечить вплив кожної моди на систему в цілому. Тому постає необхідність введення коефіцієнтів, що забезпечували би вплив нормальної хвилі на систему. Як такі коефіцієнти запропоновано використати коефіцієнти полінома Чебишева, а саме:

$$T_k(x) = \cos\left(k\cos^{-1}(x)\right), k = 0,1,2, \ldots$$

Розширення можливо провести за допомогою будь-якої гладкої функції на проміжку [–1,1], тобто розв'язок задачі (1), (2) можливо зобразити у вигляді

$$(r, z, t) =$$

$$= \sqrt{\frac{2\rho}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(k\cos^{-1}(x)\right)\sin(\gamma_n z_0)\sin(\gamma_n z) H_0^1(k_m r)\, e^{-i\omega t}. \qquad (6)$$

Маємо дискретний ряд з урахуванням часової змінної. Інтерполюємо значення, що отримані за допомогою (6) лінійною, квадратичною, експоненціальною функціями та сплайном для можливості встановлення неперервної функції апроксимації.

Для отримання даних для інтерполяції використаємо наступні значення:

$$k_m = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - ((m + 0{,}5)\frac{\pi}{D})^2}\ ,$$

де ω — частота поширення звукової хвилі; C — швидкість поширення звукової хвилі. $C = 1500$ м/с; $\omega = 25$ Гц; глибина — 100 м; початкове положення випромінювача (0,0,50), дальність хвилеводу — 5 000 м, діаметр — 50 м. Тоді довжина звукової хвилі буде рівною 60 м. Крок за часом рівний 0,1 с, по z — 300 м.

Як правило, будь-яке статистичне дослідження починається та закінчується аналізом виду і форми показників. Узагальнене статистичне дослідження, незалежно від його мети та обсягу, завжди завершується обчисленням і аналізом статистичних показників різних видів і форм вираження. Статистичні показники використовуються для створення, передачі та зберігання інформації про розмір, пропорції, зміни в часі та інші закономірності досліджуваних явищ. Показники, які статистично характеризують досліджувану сукупність у цілому або окремі її частини, називаються узагальнюючими показниками та розрізняються за способом обчислення (первинні та похідні), часовою ознакою (інтервальні та моментні) та аналітичними функціями. Узагальнені показники можуть бути представлені абсолютними, відносними та середніми величинами. Важливою умовою статистичного аналізу є комплексне використання всіх видів узагальнюючих показників.

Статистичне дослідження методу в процесі комп'ютерного моделювання проводилося за допомогою врахування наступних змінних, факторів і методів.

1. Вагові показники.
2. Відносні показники.

3. Довірчі інтервали для середнього та дисперсії.
4. Середня похибка.
5. Перевірка гіпотез про вид розподілу даних.
6. Вибір і перевірка функцій інтерполяції.
   6.1. Похибка апроксимації.
   6.2. Аналіз точності визначення параметрів рівнянь.
   6.3. Похибка та точність показників апроксимації.
   6.4. Експоненціальна інтерполяція.
      6.4.1. Знаходження коефіцієнтів рівняння.
      6.4.2. Оцінка адекватності побудованої моделі.
      6.4.3. Прогнозування за допомогою створеної моделі.
   6.5. Сплайн-інтерполяція.
   6.6. Квадратична інтерполяція.
   6.7. Лінійна інтерполяція.
   6.8. Логарифмічна інтерполяція.

Пункти 6.4.1–6.4.3 повторювалися для всіх видів інтерполяції.

Для здійснювання моделювання використовувався програмний комплекс моделювання гідроакустичного поля (рис. 1). Програмний комплекс складається з 5 пакетів: HydroAcModComp, HydroAcModCompViewModels, ModCompGeoFunction, SQLData, NormalModes. Реалізація обрахунків моделювання методом нормальних мод здійснена в пакеті NormalModes.

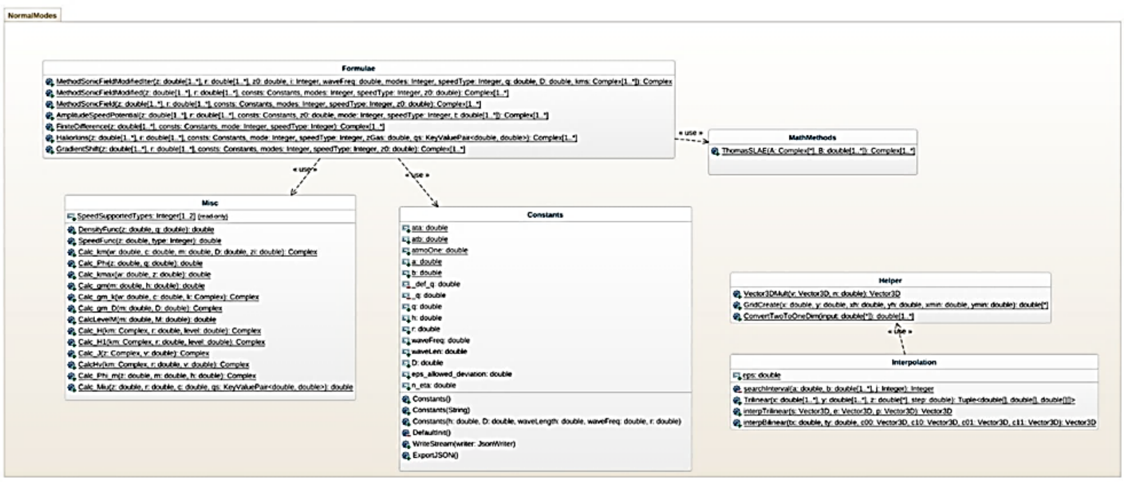

Рис. 1. Архітектура пакету реалізації методу нормальних мод

Основна реалізація обчислень знаходиться в класі Formulae. Клас складається з таких методів:

1) MethodSonicField(double[] z, double[] r, Constants consts, int modes = 7, int speedType = 1, double z0 = 0.1) — метод, в якому реалізовано розрахунок нормальних мод при заглибленому випромінювачі на глибину z0. За замочуванням, глибина занурення випромінювача 100 м, а кількість мод для обрахунку — 7;

2) MethodSonicFieldModified(double[] z, double[] r, Constants consts, int modes = 7, int speedType = 1, double z0 = 0.1) — модифікований метод обрахунку нормальних мод, який для обрахунку використовує метод MethodSonicFieldModifiedIter.

За замовчуванням, випромінювач знаходиться на глибині 100 м, кількість мод для обрахунку — 7. Обчислення проводиться через розпаралелювання обчислення нормальних мод;

3) AmplitudeSpeedPotential(double[] z, double[] r, Constants consts, double? z0 = null, int mode = 1, int speedType = 1, double[] t = null) — метод, який використовує потенціал швидкості для моделювання;

4) FiniteDifference(double[] z, Constants consts, int mode = 1, int speedType = 1) — метод моделювання нормальних мод, який використовує кінцево-різницеву дискретизацію;

5) Haliorkins(double[] z, double[] r, Constants consts, int mode = 1, int speedType = 1, double? zGas = null, KeyValuePair<double, double>[] qs = null) — метод, який реалізовує розрахунок за формулами Гальоркіна.

Результат роботи програмного забезпечення зображено на рис. 2. Розроблене програмне забезпечення дозволяє задавати такі параметри середовища як: батиметрія, шляхом обирання ділянки дна для експерименту; профіль швидкості звуку, який відображає зміну відповідно до глибини; температуру, солоність, густину води у зоні експерименту; координати приймача, траєкторію джерела хвиль в експерименті.

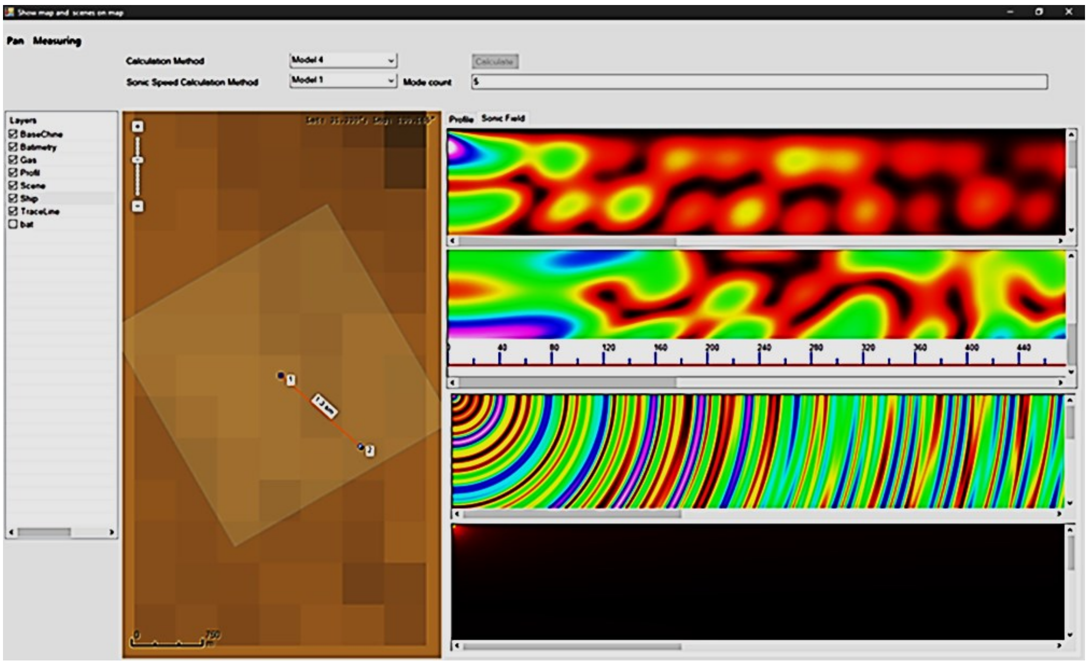

Рис. 2. Результат моделювання за використання програмного забезпечення

Дані про оцінку адекватності побудованих моделей у вигляді похибки апроксимації і похибки відображено в таблиці.

Аналізуючи дані, що наведені в таблиці, можливо зробити висновок, що апроксимація квадратичною та експоненціальною функціями майже рівноцінні. Враховуючи швидкість комп'ютерної обробки цих функцій для апроксимування, рекомендовано вибирати квадратичну функцію. Зобразимо графіки, що підтверджують статистичну гіпотезу (рис. 3–5).

Параметри адекватності побудованих моделей

Апроксимуюча функція	Похибка апроксимації (у відсотках)	Точність апроксимації
Лінійна	26,9	0.56
Квадратична	14,83	0,9
Сплайн	15,36	0,72
Експоненціальна	14,81	0,88
Логарифмічна	21,2	0,63

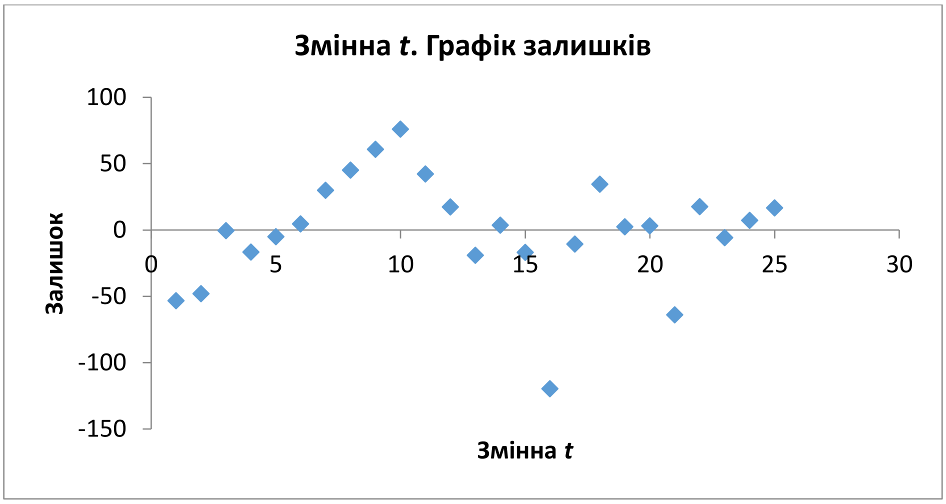

Рис. 3. Графік залишків змінної *t* при квадратичній інтерполяції

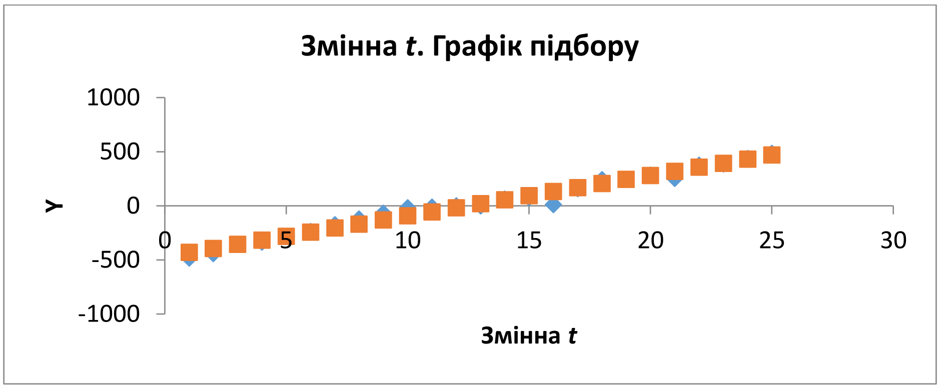

Рис. 4. Графік підбору змінної *t*

Кожне отримане значення ряду відхиляється від його середнього значення на 27,137; це в свою чергу засвідчує про однорідність отриманих даних. Перевірка гіпотез за критеріями Пірсона вказує на те, що значення As (асиметрія) та Ex (ексцентриситет симетрії) підтверджують гіпотезу про нормальний розподіл даних. Нормальний розподіл даних може слугувати як один із критеріїв вибору функції апроксимування для отриманих даних і введеної функції часу.

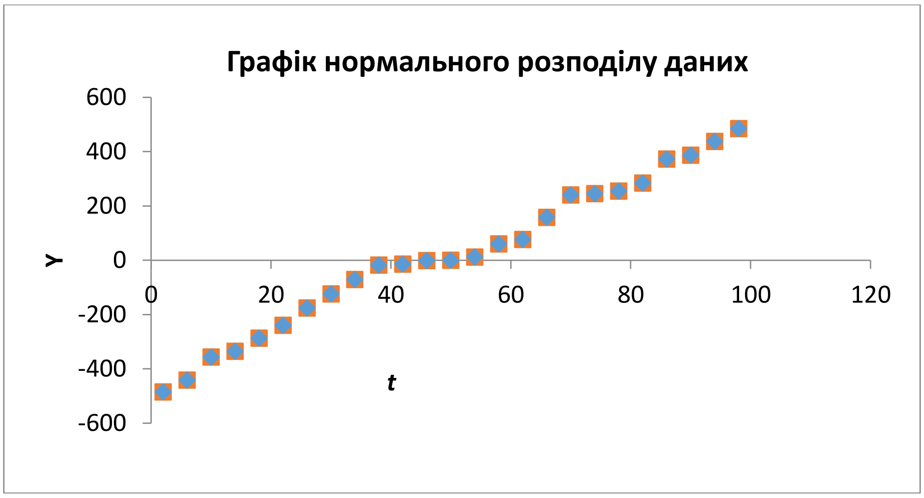

Рис. 5. Графік нормального розподілу даних і прогнозовані значення

Висновки та перспективи

Із використанням програмного забезпечення моделювання гідроакустичного поля було проведено комп'ютерне моделювання, за результатами якого отримані залежності дозволяють ввести часовий параметр у розв'язок хвильового рівняння методом нормальних хвиль. Це забезпечує можливість прогнозування розвитку звукової хвилі з плином часу та не потребує додаткових досліджень часової змінної. Наявність часової змінної дозволяє проводити більш глибокий аналіз фізичних та акустичних властивостей звукових полів: поширення їх у підводному каналі, визначення акустичного тиску при вертикальних перетинах середовища в будь-який момент часу, встановлення коефіцієнта збурення, в тому числі і залежно від часу. Перехід до тривимірної моделі рівняння нормальної хвилі з урахуванням часу дозволяє врахувати в наступних дослідженнях зміну параметрів нелінійного процесу з часом. Це дає можливість спрогнозувати взаємодію звукової хвилі з випромінювачем.

1. Brillouin L. Wave Propagation and Group Velocity. Academic Press, 1960. 166 p. URL: https://www.elsevier.com/books/wave-propagation-andgroup-velocity/brillouin/978-1-4832-3068-9

2. Brekhovskikh L. Waves in Layered Media. Academic Press, 1976. 520 p. URL: https://www.elsevier.com/books/waves-in-layered-media/ brekhovskikh/978-0-12-130560-4

3. Mann J.A., Tichy J., Romano A.J. Instantaneous and time- averaged energy transfer in acoustic fields. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1987. **82**(1). P. 17–30. doi: http://doi.org/ 10.1121/1.395562.

4. Mobarakeh P.S., Grinchenko V.T., Popov V.V., Soltannia B., Zrazhevsky G.M. Contemporary Methods for the Numerical-Analytic Solution of Boundary-Value Problems in Noncanonical Domains. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. **247**(1). P. 88–107. doi: http://doi.org/10.1007/s10958-020-04791-4.

5. Korzhyk O., Naida S., Kurdiuk S., Nizhynska V., Korzhyk M., Naida A. Use of the pass-through method to solve sound radiation problems of a spherical electro-elastic source of zero order. *EUREKA: Physics and Engineering* 2021. **5**. P. 133–146. doi: http://doi.org/10.21303/2461-4262.2021.001292.

6. Mobarakeh P.S., Grinchenko V.T. Construction Method of Analytical Solutions to the Mathematical Physics Boundary Problems for NonCanonical Domains. *Reports on Mathematical Physics*. 2015. **75**(3). P. 417–434. doi: http://doi.org/10.1016/s0034-4877(15)30014-8.

7. Kazak M.S., Petrov P.S. On Adiabatic Sound Propagation in a Shallow Sea with a Circular Underwater Canyon. *Acoustical Physics*. 2020. **66**(6). P. 616–623. doi: http://doi.org/10.1134/s1063771020060044.

8. Dyubchenko M.E. The influence of axisymmetric modes of vibrations on the sensitivity and directivity characteristics of a piezoceramic For reading only sphere. *Acoustic Journal*. 1984. **30**(4). P. 477–481. URL: http://www.akzh.ru/ pdf/1984_4_477-481.pdf

9. Leiko O., Derepa A., Pozdniakova O., Starovoit Y. Acoustic fields of circular cylindrical hydro-acoustic systems with a screen formed from cylindrical piezoceramic radiators. *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*. 2018. **15**(1). P. 41–46. URL: http://rjav.sra.ro/index.php/rjav/article/view/49.

10. Aronov B. Coupled vibration analysis of the thin-walled cylindrical piezoelectric ceramic transducers. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2009. **125**(2). P. 803–818. doi: http://doi.org/10.1121/1.3056560.

11. Papkova J. I., Papkov S. O., Yaroshenko A. A. . Energy characteristics of the hydroacoustic field in a nonuniform marine medium with a cylindrical body floating on the surface. *Physical Oceanography — Springer Science* + *Business Media*. 2006. Vol. 16, No. 3. P. 168–176

12. Papkova Yu.I. Method of normal modes for a three-dimensional model of a hydroacoustic waveguide. *Dynamic systems*. 2013. No. 3–4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metod-normalnyh-mod-dlya-trehmernoy-modeli-gidroakusticheskogo-volnovoda (Last accesses: 13.07.2022).

Надійшла до редакції 01.10.2024