УДК 519.81

МОДИФИКАЦИИ КРИТЕРИЕВ ОБОБЩЕННОЙ ПОЛЕЗНОСТИ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

Е.В. СОБОЛЕВА

В качестве критериев обобщенной полезности для задач многофакторной оптимизации предлагаются экспоненциальная и энтропийная модели, а также модификации (путем введения дополнительных слагаемых с обратными степенями) известных смешанных моделей (аддитивно-мультипликативной и в виде полинома Колмогорова-Габора). Приведены статистические результаты исследования точности и сложности процедур компараторной параметрической идентификации различных моделей обобщенных критериев.

ВВЕДЕНИЕ

Чаще всего процесс принятия решений осуществляется в условиях многокритериальности. Прямой задачей для систем поддержки принятия решений является *синтез* эффективных схем принятия решений на основании многокритериального экспертного оценивания альтернатив выбора. Большинство исследований посвящено тем или иным аспектам решения данной задачи: выбору функций нормирования частных критериев, методам их параметрической идентификации, методикам получения экспертных оценок важности частных критериев [1, 2], исследованию эффективности применения различных структур критериев обобщенной полезности (КОП) [1, 3].

При решении задачи синтеза может возникать необходимость решения обратной задачи [4] — *анализа* схем принятия решений, реализованных экспертом. Такая многоуровневая постановка задач востребована при проведении маркетинговых исследований: анализ схем принятия решений на уровне спроса предоставляет больше информации для синтеза схем принятия решений на уровне предложения. Задача анализа схем принятия решений актуальна также при проектировании систем искусственного интеллекта. Методам параметрической идентификации схем принятия решений посвящен ряд работ [5–7]. Вопрос статистического экспериментального исследования эффективности применения различных структур обобщенных критериев, которое может быть осуществлено с использованием математической постановки задачи их параметрической идентификации, в литературе освещен недостаточно.

Объект данного исследования — процесс принятия решения на множестве альтернатив, характеризующихся множеством частных критериев, осуществляемый путем сведения последних в единый обобщенный критерий.

Предмет исследования — эффективность идентификации схем принятия решений различными моделями обобщенных критериев.

Цель работы — проанализировать ограниченности областей применения известных структур КОП; предложить новые более универсальные модели, имеющие меньшее число параметров; изложить результаты экспериментального исследования эффективности известных и предложенных моделей обобщенных критериев для идентификации схем принятия решений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Экспериментальное исследование эффективности (Э) использования различных моделей КОП (P) осуществимо посредством решения задач (z) структурно-параметрической идентификации ситуаций принятия решений.

$$P_i \xrightarrow[z_{j=1..1000}:\ K(\mathrm{X}_j,\ R_j)\to \min\limits_{P,\ \Lambda}]{} Э_i,$$

где K — критерий идентификации; $\mathrm{X}_j = \{x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}\}_j$ — множество альтернатив выбора j-й ситуации принятия решения, представленных набором нормированных значений четырех частных критериев (генерируются случайным образом); R_j — принятое решение, представленное в виде бинарного отношения эквивалентности альтернатив: $R_j = \{(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6)\}_j$ (задается на области Парето); $\Lambda = \{\lambda_{l=1..m}, d\lambda\}$ — множество параметров КОП, состоящее из множества весовых коэффициентов частных критериев и множества дополнительных параметров.

В нашем случае, идентификация ситуации принятия решения осуществляется путем перебора всего множества структур обобщенных критериев, и посредством параметрической оптимизации КОП, реализованной в рамках подхода «компараторной идентификации» [4]. В рамках данного подхода, из отношения эквивалентности, используя функционал обобщенного критерия, получаем систему уравнений, которая решается относительно вектора параметров совместно с условиями нормирования.

$$P(\Lambda, x_1) - P(\Lambda, x_2) = 0,$$
$$P(\Lambda, x_3) - P(\Lambda, x_4) = 0,$$
$$P(\Lambda, x_5) - P(\Lambda, x_6) = 0,$$
$$\sum_l \lambda_l = 1,\ \lambda_l \ge 0. \qquad (1)$$

В общем случае система (1) несовместна и не имеет единственного точного решения. В качестве решения, учитывающего уклонения от всего множества ограничений, использован [5] $\Lambda^o = \arg\min \sum_{v=1}^{4} \left| F_v(\Lambda) - b_v \right|$, где $F(\Lambda)$ — функционал-вектор левых частей равенств системы (1); $b = \{0,0,0,1\}$ — вектор правых частей.

Поскольку задача параметрической оптимизации в данной постановке не может быть сведена к задаче линейного программирования для всех структур КОП, то как один из наиболее эффективных для решения такого рода задач, использован метод, основанный на идее покоординатной оптимизации. Особенность применения метода в данном приложении [7] заключается в том, что в качестве координат принимаются соотношения пар коэффициентов (параметров КОП), что позволяет обойтись без пересчетов с целью выполнения нормирующего равенства.

Принятые в работе показатели эффективности ($Э$) использования различных моделей КОП: максимальное и среднее значения критерия идентификации; максимальная и средняя относительные погрешности ($\delta K = \left|K^o - \widetilde{K}^o\right| / \widetilde{K}^o$, где K^o и $\widetilde{K}^o$ — минимальные значение критерия, полученные с помощью текущей и наилучшей в данном случае структур КОП); среднее время решения задачи ($t_{\text{сред}}$) параметрической оптимизации; количество идентифицируемых ситуаций выбора, когда данная структура КОП оказалась лучшей (W).

АНАЛИЗ ОБЛАСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ ИЗВЕСТНЫХ ОБОБЩЕННЫХ КРИТЕРИЕВ

Задача идентификации ситуации многокритериального выбора может быть интерпретирована как задача поиска функции отображения пространства частных критериев на некоторую поверхность обобщенного критерия строго в соответствии с упорядочением точек-альтернатив выбора, установленным принятым решением. Анализ семейства поверхностей, соответствующих различным структурам КОП, позволяет выявить принципиальное различие областей их применения в дополнение к известным достоинствам и недостаткам [1].

В качестве обобщенных многофакторных оценок альтернатив выбора используются аддитивные, мультипликативные [1] и смешанные функции, включающие в себя аддитивные и мультипликативные составляющие:

- в виде суммы аддитивной и мультипликативной функций [3]:

$$P(x) = a \sum_i \lambda_i \xi_i + (1-a) \prod_i \xi_i^{\lambda_i}, \qquad (2)$$

где a — дополнительный параметр ($0 \le a \le 1$);

- построенная на основе полинома Колмогорова-Габора (3), объединяющая аддитивные и мультипликативные члены в виде произведения пар (при необходимости, троек и т.д.) нормализованных характеристик альтернатив [4]:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \xi_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{m} \lambda_{ij} \xi_i \xi_j + \ldots \, . \qquad (3)$$

С целью анализа моделей были исследованы поверхности, образуемые функциями обобщенной полезности в пространстве двух частных критериев, а также линии уровня таких поверхностей (линии «эквиполезности») (рис. 1). Значения весовых коэффициентов на рис. 1: $\lambda_1 = 0{,}8$ и $\lambda_2 = 0{,}2$ для аддитивной, мультипликативной моделей и аддитивно-мультипликативной (АМ) модели (2), $a = 1/2$; для модели (3) в виде полинома Колмогорова-Габора (ПКГ) второй степени были взяты равные значения коэффициентов $\lambda_i, \lambda_{ij} = 1/5$.

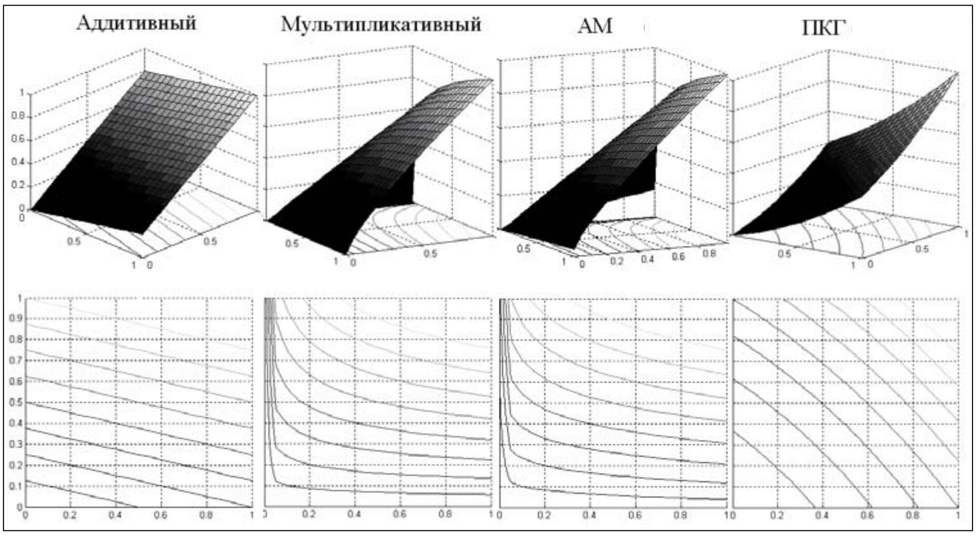

Рис. 1. Известные обобщенные критерии

Известные смешанные модели обобщенных критериев принципиально отличаются друг от друга классом идентифицируемых ситуаций выбора (рис. 2).

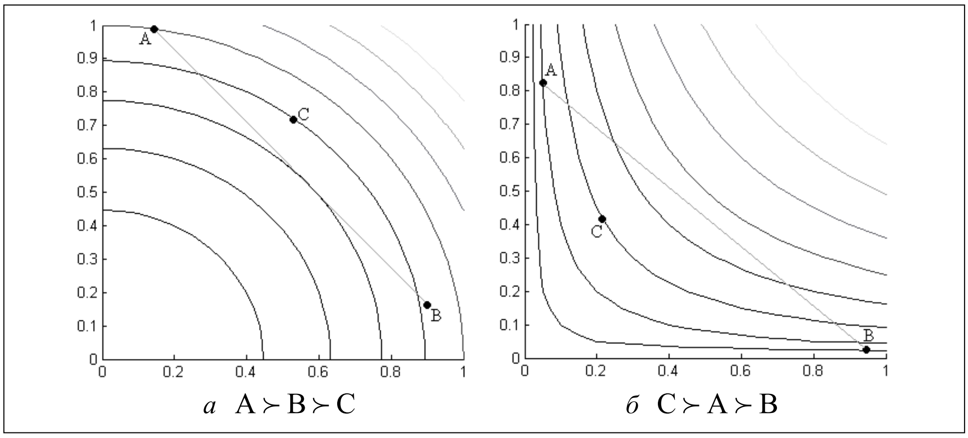

Рис. 2. Варианты ситуаций выбора в пространстве двух частных критериев, где нанесены линии уровня обобщенного критерия в виде ПКГ (*а*), нанесены линии уровня мультипликативного обобщенного критерия (*б*)

В случае, когда менее предпочтительный вариант находится в пространстве частных критериев дальше от начала координат, чем гиперплоскость, проходящая через более предпочтительные (рис. 2, *а*), то ситуация выбора может быть идентифицирована моделью в виде полинома Колмогорова-Габора (причем, исключительную роль в этом играют члены со степенью больше единицы). А в случае, когда более предпочтительный (по мнению эксперта) вариант находится в пространстве частных критериев ближе к началу координат, чем гиперплоскость, проходящая через менее предпочтительные (рис. 2, *б*), то ситуация выбора может быть идентифицирована исключительно мультипликативной составляющей моделей обобщенной полезности. При этом показатели степени для частных критериев как параметры мультипликативного обобщенного критерия, смещают зону его чувствительности либо ближе к началу координат (когда показатели степени меньше 1, как в обобщенном критерии (2)), либо дальше от начала координат (когда показатели степени больше 1, как в (3)).

Таким образом, на адекватность модели критерия обобщенной полезности влияет топологическое распределение анализируемых альтернатив в пространстве частных критериев — выпуклость либо вогнутость области Парето относительно каждой пары координат. Ситуация выбора в случае выпуклости либо вогнутости области Парето может быть идентифицирована несовпадающими классами обобщенных критериев. Актуальным является поиск моделей критериев обобщенной полезности, имеющих минимальное количество параметров, и в то же время позволяющих охватить более широкий спектр задач.

ПРЕДЛАГАЕМЫЕ МОДЕЛИ КРИТЕРИЕВ ОБОБЩЕННОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

С целью минимизации числа параметров, предлагаются две нелинейные модели КОП, не имеющие дополнительных параметров: экспоненциальная и энтропийная.

Сложная экспоненциальная функция использовалась в качестве функции полезности частных критериев [8]. Применив простую экспоненциальную функцию для построения критерия обобщенной полезности, получаем следующую модель:

$$P(x)=\sum_i (1-e^{-\lambda_i' \xi_i}), \tag{4}$$

где $\lambda_i' = 1-\lambda_i$ — весовые коэффициенты частных критериев, $\sum_i \lambda_i' = 1$.

Функция обобщенной полезности, построенная по принципу информационной энтропии (4), отражает смысловое наполнение понятия «полезность» как информационной категории:

$$P(x)=\sum_i \lambda_i \cdot {\xi_i}^{\lambda_i}. \tag{5}$$

Предложенные модели обобщенных критериев (4)–(5), в отличие от модели (1), не имеют дополнительных параметров, при этом гиперповерхности, описываемые ими в пространстве частных критериев, сходны, следовательно, пересекается и класс задач, для которых модели (1), (3)–(4) адекватны.

С целью охвата более широкого круга задач, функцию (2) аддитивно-мультипликативной (АМ) обобщенной полезности предлагается дополнить второй мультипликативной составляющей с обратными степенями, т.е.

большими единицы (6), а модель в виде ПКГ (3) дополнить полиномиальными членами с дробными степенями того же порядка:

$$P(x) = a\sum_i \lambda_i \xi_i + b\prod_i \xi_i^{\lambda_i} + (1-a-b)\prod_i \xi_i^{1/\lambda_i}, \tag{6}$$

где b — дополнительный параметр ($b \ge 0$, $0 \le a+b \le 1$) и $\lambda_i \ne 0$.

В качестве модификации (в направлении универсализации и минимизации числа параметров) модели обобщенного критерия, построенного в виде полинома Колмогорова-Габора (2), может быть взят следующий вариант, в котором добавлены члены с дробными степенями и отсутствуют произведения несовпадающих частных критериев:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \xi_i + \sum_{j=2}^{u}\sum_{i=1}^{m} (\lambda_{i+m(2j-3)} \xi_i^u + \lambda_{i+m(2j-2)} \xi_i^{1/u}), \tag{7}$$

где u — определяет сложность модели (степень базового ПКГ).

Графическое представление поверхностей предложенных моделей обобщенной полезности представлены на рис. 3, где изображена обобщенная полезность для двух частных критериев ($m = 2$). Значения весовых коэффициентов на рис. 3: $\lambda_1 = 0{,}8$ и $\lambda_2 = 0{,}2$ для моделей (3–5); $a, b = 1/3$ для модели (5); u = 2, $\lambda_j = 1/6$, $j = \overline{1{,}6}$ для модели (7).

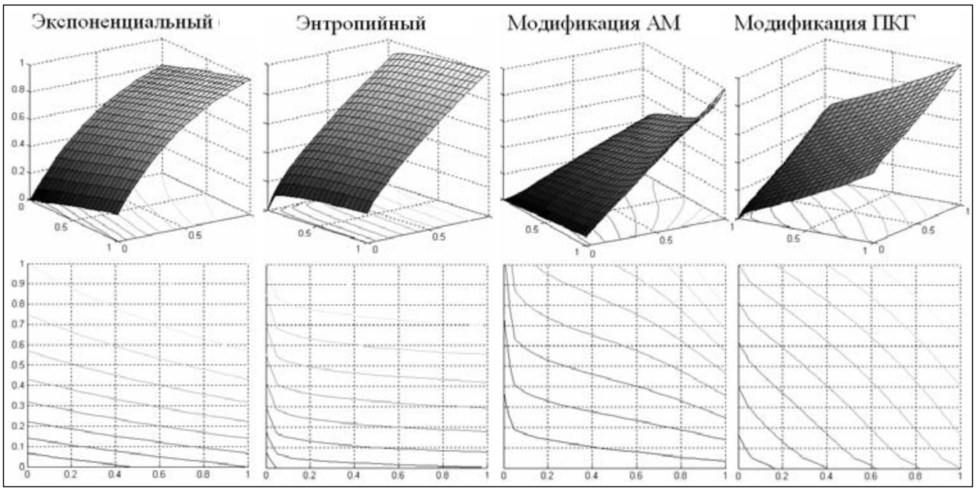

Рис. 3. Предлагаемые КОП

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Исследование эффективности использования различных моделей КОП осуществлялось посредством специально разработанного программного модуля в среде пакета математических программ. В каждом из 1000 проведенных экспериментов на идентичных исходных данных для различных моделей обобщенных критериев осуществлялась их параметрическая оптимизация (решение системы (1)) методом, основанным на идее покоординатного спуска. Сложность моделей в виде ПКГ (3), (7) была ограничена второй степенью $(u = 2)$.

Показатели эффективности использования различных структур КОП для решения задачи идентификации схем принятия решений приведены в таблице. Также в таблице указана мощность вектора оптимизируемых параметров, выраженная через число частных критериев (m) (и через значение параметра сложности для моделей (3), (7)).

Таблица. Результаты экспериментов

Модель	$Card(\Lambda)$	$K_{\text{макс}}$	$K_{\text{сред}}$	$\delta K_{\text{макс}}$	$\delta K_{\text{сред}}$	$t_{\text{сред}}$,с	W
Аддитивная	m	0,85	0,25	0,50	0,13	0,0050	28
Мультипликативная	m	1,83	0,51	1,46	0,39	0,0059	2
АМ (2)	$m+1$	1,00	0,28	0,73	0,17	0,0076	21
Модель на основе ПКГ(3)	$C_{m+u}^{u}-1$	0,82	0,26	0,47	0,14	0,0189	25
Экспоненциальная (4)	m	0,76	0,21	0,43	0,10	0,0049	53
Энтропийная (5)	m	0,46	0,13	0,27	0,02	0,0045	657
Модификация АМ (6)	$m+2$	0,64	0,19	0,44	0,07	0,0162	161
Модификация ПКГ (7)	$m(2u-1)$	0,78	0,23	0,46	0,12	0,0140	53

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Впервые предложенные экспоненциальная и энтропийная модели КОП имеют минимальное количество параметров, поэтому задача их параметрической идентификации имеет такую же временную сложность, как и для простых моделей (аддитивной и мультипликативной). Однако, за счет нелинейности они занимают промежуточную и более востребованную нишу относительно класса задач, и как результат конкурируют по точности с простейшими моделями.

Предложенные модификации известных моделей обобщенных критериев значительно увеличивают точность базовых моделей, при этом количество параметров увеличено на единицу для аддитивно-мультипликативной модели (соответственно, растет временная сложность) и сокращено для модели в виде полинома Колмогорова-Габора (временная сложность уменьшается). Особенностью предложенной модификации аддитивно-мультипликативной модели обобщенного критерия (6) является невозможность равенства нулю весовых коэффициентов полезности частных критериев. В работе был исследован упрощенный вариант модификации модели в виде полинома Колмогорова-Габора (7), который при необходимости может быть дополнен произведениями несовпадающих частных критериев.

По результатам исследований наилучшей моделью обобщенного критерия является энтропийная модель (5). Эта модель превосходит исследованные известные модели и предложенные в данной работе модификации обобщенных критериев по всем анализируемым показателям. По временной сложности параметрической идентификации с ней сравнима экспоненциальная модель. Достоинством модификации модели в виде ПКГ (7), как и базовой модели [4], является возможность приведения ее к аддитивной форме большей размерности и перехода к задаче линейного программирования. Модификация аддитивно-мультипликативной модели (6) уступает предложенным моделям по всем показателям, однако повышает точность базовой модели.

ВЫВОДЫ

Для задачи идентификации схем принятия решений обоснована ограниченность областей эффективного применения известных структур критериев обобщенной полезности на множестве упорядочиваний альтернатив выбора (решения) в пространстве значений частных критериев; предложены модификации обобщенных критериев, значительно увеличивающие точность идентификации; произведены экспериментальное исследование и сравнительный анализ эффективности использования известных и предложенных структур обобщенных критериев.

Дальнейшие исследования могут быть посвящены решению более общей задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брахман Т.Р.* Многокритериальность и выбор альтернативы в технике. — М.: Радио и связь, 1984. — 287 с.
2. *Анфилатов В.С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А.* Системный анализ в управлении. — М.: Финансы и статистика, 2003. — 368 с.
3. *Петров К.Э.* Мультипликативно-аддитивная функция оценки полезности // Радиоэлектроника и информатика. — 2000. — № 4. — С. 35–36.
4. *Овезгельдыев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э.* Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации. — К.: Наук. думка, 2002. — 164 с.
5. *Бескоровайный В.В., Трофименко И.В.* Параметрическая идентификация мультипликативных моделей для многофакторного выбора решений // Зб. наук. пр. Харк. ун-ту повітряних сил. — Х.: ХУПС, 2005. — Вип. 5(5). — С. 74–78.
6. *Петров Э.Г., Булавин Д.А., Петров К.Э.* Решение задачи структурно-параметрической идентификации модели индивидуального многофакторного оценивания методом группового учета аргументов // АСУ и приборы автоматики. 2004. — Вып. 129. — С. 4–13.
7. *Бескоровайный В.В., Петров Э.Г., Трофименко И.В.* Метод решения общей задачи компараторной идентификации моделей многофакторного оценивания // Бионика интеллекта. — 2006. — Вып. 2 (65). — С. 3–7.
8. *Harrington E.C.* The desirability function // Industrial Quality Control. — 1965. — № 21. — P. 494–498.

Поступила 07.06.2010