УДК 519.816

# ПРО ПОДІБНІСТЬ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА УНІВЕРСАЛЬНІСТЬ АЛГОРИТМІВ

**Н.К. ТИМОФІЄВА**

Розглянуто властивість подібності, яка має місце в комбінаториці та комбінаторній оптимізації. Виявлено різноманітні ознаки, за якими вона визначається для задач, що відносяться до різних класів. Описано задачі комбінаторної оптимізації, які подібні за аргументом цільової функції, а в комбінаториці — за способом утворення та упорядкування комбінаторних конфігурацій. Завдяки цій властивості їхні множини генеруються одним і тим же алгоритмом або його модифікацією. Показано, що деякі задачі комбінаторної оптимізації, що відносяться до різних класів, розділяються на подібні підзадачі, які розв'язуються за однією обчислювальною схемою. Властивість подібності, яка характерна для задач цього класу, визначає їхню універсальність, завдяки якій вони розв'язуються за одним і тим же методом. Вивчення та використання цієї властивості в комбінаторній оптимізації в подальшому дозволить зводити нерозв'язні задачі до розв'язних.

## ВСТУП

У комбінаторній оптимізації можна навести багато прикладів, коли задачі з різних класів розв'язуються за однією і тією ж обчислювальною схемою, наприклад [1–6]. Цю властивість у літературі належним чином не висвітлено, хоча існуючі універсальні методи орієнтовані на розв'язання різноманітних таких задач. Системний аналіз задач комбінаторної оптимізації з використанням цієї теорії показує, що деякі з них, які відносяться до різних класів, розділяються на підзадачі, що розв'язуються за однією обчислювальною схемою або модифікацією одного й того ж алгоритму. Тобто, універсальність закладено саме в їхній природі. Цим можна пояснити, чому вони розв'язуються відомими універсальними методами. Це стосується і генерування комбінаторних множин, серед яких можна виділити такі, що генеруються одним і тим же алгоритмом або його модифікацією. Тому однією з проблем цього наукового напряму є виявлення властивості універсальності задач комбінаторної оптимізації різних класів з метою узагальнення та використання для їхнього розв'язання ефективних підходів, які дають можливість знаходити глобальний або наближений до глобального результат.

Розглянемо цю властивість на прикладі деяких задач із комбінаторики та комбінаторної оптимізації.

**Мета роботи** — Виявлення різноманітних ознак, за якими визначається подібність задач комбінаторної оптимізації різних класів, що дозволяє узагальнювати та використовувати для їхнього розв'язання ефективні методи та алгоритми.

## ПОДІБНІСТЬ ГЕНЕРУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИН

Аргументом цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації є комбінаторні конфігурації (перестановки, сполучення, розбиття $n$-елементної множини на підмножини тощо). В таких задачах як задача комівояжера, розміщення об'єктів, задача про призначення аргументом цільової функції є перестановка. В задачі про рюкзак або задачах, які вимагають побудови блок-схем, пошук оптимального розв'язку проводиться на множині сполучень. Задачі про передачу сигналів, які мають місце в теорії інформатики, оптимальне розподілення оперативної пам'яті під час організації обчислювального процесу, вимагають знання властивостей розбиття числа. Аргументом цільової функції задач із теорії розкладів або задач, пов'язаних із виконанням кінцевих або проміжних комплексів операцій, виступають вибірки різних типів. Великий клас задач розбиття має місце у найрізноманітніших постановках: розбиття множини, розрізування графів, мереж, кластеризація, таксономія, класифікація. Вони полягають в упорядкуванні заданих об'єктів у порівнянно однорідні групи, тобто за розробленими правилами проводиться пошук оптимального розбиття $n$-елементної множини на підмножини. В задачах, що вимагають знаходження оптимальної укладки електричних схем на одній або кількох поверхнях, аргументом цільової функції виступає граф.

Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої базової множини $A=\{a_1,...,a_n\}$. Позначимо її упорядкованою множиною $w^k=(w_1^k,...,w_\eta^k)$, де $\eta\in\{1,...,n\}$ — кількість елементів у $w^k$ (в подальшому η позначатимемо і як $\eta^k$), $W=\{w^k\}_1^q$ — множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс $k$ ($k\in\{1,...,q\}$) у $w^k$ позначає порядковий номер $w^k$ у $W$, $q$ — кількість $w^k$ у $W$.

Рекурентним комбінаторним оператором назвемо сукупність правил, за допомогою яких з елементів базової множини $A$ утворюється комбінаторна конфігурація $w^k$. Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція, арифметичний [7].

**Означення 1.** Дві нетотожні комбінаторні конфігурації $w^k=(w_1^k,...,w_{\eta^k}^k)$ та $w^i=(w_1^i,...,w_{\eta^i}^i)$ назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k=\eta^i$.

**Означення 2.** Підмножину $W_{\eta^k}\subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи — ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Розглянемо комбінаторні конфігурації, множину $W$ яких утворено кількома рекурентними комбінаторними операторами. В цьому випадку одним із операторів виступає або операція вибирання або арифметична. Вони утворюють як ізоморфні так і неізоморфні комбінаторні конфігурації. Тому множина $W$, елементи якої утворено кількома рекурентними комбінаторними операторами, складається з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій.

Оскільки операція транспозиції змінює лише порядок слідування елементів у $w^k \in W$, то множина перестановок $W$ є множиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій.

У множині $W$, елементи якої утворено кількома рекурентними комбінаторними операторами, виділимо підмножину $W^* \subset W$, будь-який елемент якої утворюється одним типом оператора, і підмножини $W^{**} \subset W$, комбінаторні конфігурації яких утворено іншим типом [7]. Назвемо $W^* \subset W$ базовою підмножиною множини $W$.

**Означення 3.** Назвемо подібними задачі з комбінаторики або задачі комбінаторної оптимізації різних класів, які розв'язуються за однією й тією ж обчислювальною схемою або модифікацією одного й того ж алгоритму.

**Лема 1.** Комбінаторні конфігурації подібні, якщо вони утворюються одним і тим же рекурентним комбінаторним оператором, а їхні множини генеруються модифікацією одного й того ж алгоритму.

**Доведення.** Для доведення цього твердження розглянемо утворення комбінаторних конфігурацій. За способом утворення вони розділяються на прості (утворюються одним і лише одним типом рекурентних комбінаторних операторів) і комбіновані (утворюються кількома рекурентними комбінаторними операторами) [7]. До простих комбінаторних конфігурацій віднесемо перестановки, розбиття числа, сполучення та бінарні послідовності. До комбінованих віднесемо розбиття множини на підмножини, розміщення з повтореннями і без повторень.

Сполучення як з повтореннями так і без повторення утворюються єдиною операцією — вибиранням. Перестановки утворюються транспозицією або вибиранням. Розбиття числа утворюються однією операцією — арифметичною. Розбиття $n$-елементної множини на підмножини утворюються двома рекурентними комбінаторними операторами — арифметичним або транспозицією. Розміщення як з повтореннями так і без повторення утворюються двома операціями: вибиранням або транспозицією. Бінарні послідовності можуть утворюватися двома операціями — арифметичною або операцією вибирання. До того ж, кількість бінарних послідовностей у їхній множині дорівнює $2^n$, а кількість сполучень без повторення — відповідно $2^n - 1$.

Виходячи з цього, генерування розбиття $n$-елементної множини на підмножини проводиться алгоритмом розбиття числа і генеруванням перестановок. Упорядкування розміщення без повторення та з повтореннями проводиться алгоритмами генерування сполучень і перестановок. Формування бінарних послідовностей з використанням рекурентного комбінаторного оператора вибирання проводиться за тими ж правилами, що і утворення сполучень без повтореннями.

Таким чином, за способом утворення подібні такі комбінаторні конфігурації: бінарні послідовності та сполучення без повторення; розбиття $n$-елементної множини на підмножини і розбиття натурального числа та перестановки; розміщення без повторення (з повтореннями) і сполучення без повторень (з повтореннями) та перестановки. Ці множини подібні за способом генерування, оскільки вони упорядковуються одним і тим же алгоритмом або його модифікацією (бінарні послідовності й сполучення без повторень генеруються модифікацією одного і того ж алгоритму, базова підмножина $W^* \subset W$ розбиття $n$-елементної множини на підмножини і розбиття натурального числа генеруються одним і тим же алгоритмом). Тобто, наведені вище комбінаторні конфігурації подібні за способом їхнього утворення і упорядкування, що і доводить лему 1.

## ПОДІБНІСТЬ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ, ЦІЛЬОВУ ФУНКЦІЮ ЯКИХ ВИЗНАЧЕНО НА МНОЖИНІ ПЕРЕСТАНОВОК

Сформулюємо загальну математичну постановку задачі комбінаторної оптимізації.

Нехай задано одну $A$ або кілька множин, наприклад $A$ та $B$ [8]. Вагою назвемо величину, яка визначає залежність, що існує між елементами $a_s \in A$ та $b_l \in B$ або між елементами однієї і тієї ж множини — $s \in \{1,...,n\}$, $l \in \{1,...,\tilde{n}\}$, $n$ — кількість елементів множини $A$, $\tilde{n}$ — кількість елементів множини $B$. Покладемо, що $n = \tilde{n}$. Значення ваг між елементами множин $A$ та $B$ задамо однією або двома симетричними або несиметричними матрицями $C$ та $Q(w^k)$, де $Q(w^k)$ — комбінаторна матриця, $w^k \in W$ — перестановка. Якщо значення ваг описуються однією матрицею $C$, то для визначення наявності зв'язків між елементами заданих множин для $k$-го варіанту розв'язку задачі уведемо симетричну або несиметричну $(0,1)$-матрицю $Q(w^k)$. Елемент $g_{sl}(w^k) = 1$, якщо між $a_s \in A$ та $b_l \in B$ або $a_s \in A$ та $a_l \in A$ для варіанту $w^k$ існує зв'язок, та $g_{sl}(w^k) = 0$ в іншому разі; $g_{sl}(w^k) \in Q(w^k)$.

Подамо елементи $h$ наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), ...$ $..., \beta_m(f(m), w^k))$, а елементи $h$ наддіагоналей симетричної матриці $C$ — функцією натурального аргументу $\varphi(j)\big|_1^m = (\varphi(1), ..., \varphi(m))$, де $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ — кількість елементів $h$ наддіагоналей матриць $C$ та $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Якщо матриці $Q(w^k)$ та $C$ — несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)\Big|_1^m$ та $\varphi(j)\big|_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m = n^2$ (або $m = n\tilde{n}$). Функція цілі $F(w^k)$ для цих задач набуває вигляду

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j (f(j), w^k)\, \varphi(j). \qquad (1)$$

До загальної математичної постановки задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в якій є перестановка, зводяться задача комівояжера, задача про призначення, задача розміщення одногабаритних об'єктів на поверхні тощо. Цільова функція для них моделюється виразом (1), за яким проводиться оцінка результату. Завдяки цьому задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в яких є перестановка і на підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій (задача кластеризації) розв'язуються універсальними методами, зокрема методом структурно-алфавітного пошуку за однією і тією ж схемою. В задачі кластеризації на деяких ізоморфних підмножинах цільова функція змінюється так як і в задачі комівояжера.

Опишемо метод структурно-алфавітного пошуку, який ґрунтується на розпізнаванні вхідної інформації та певному впорядкуванні комбінаторних конфігурацій [8]. У ньому використано відомий розв'язний випадок, який задано двома системами перестановок $(a)$ та $(b)$, на яких уведено цільову функцію $\sum ab$ [9]. Для цих систем визначено перестановки, для яких $\sum ab$ набуває найбільшого або найменшого значень. Якщо елементи перестановки із системи $(a)$ впорядковані від більшого елемента до меншого, а із $(b)$ — від меншого елемента до більшого, то значення $\sum ab$ є глобальним мінімумом. Якщо елементи обох таких перестановок упорядковані від меншого елемента до більшого, то значення $\sum ab$ є глобальним максимумом. Цей розв'язний випадок не належить жодному класу із класів задач комбінаторної оптимізації.

З метою використання оговореного розв'язного випадку для розв'язання задач комбінаторної оптимізації методом структурно-алфавітного пошуку встановимо зв'язок між прикладними задачами і оговореним вище розв'язним випадком, увівши системи комбінаторних функцій $H$ та $H'$, де $\beta(f(j), w^k)\Big|_1^m \in H$ — комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $w^k \in W$, утворена з елементів базової множини $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$; $\beta(f(j), w'^i)\Big|_1^m \in H'$ — комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $w'^i \in W'$, утворена з елементів базової множини $\widetilde{A}_m = \{\widetilde{a}_1, ..., \widetilde{a}_m\}$. Якщо $\beta(f(j), w^1)\Big|_1^m = \beta(f(j), w'^1)\Big|_1^m$, де $w^1, w'^1$ — перші перестановки в $W$, $W'$ та $\beta(f(j), w^i)\Big|_1^m \in H$, $\beta(f(j), w'^i)\Big|_1^m \in H'$, то $H \subset H'$. Задачу комбінаторної оптимізації, вхідні дані в якій задано функціями $\beta(f(j), w^k)\Big|_1^m$ та $\varphi(j)\Big|_1^m$, назвемо базовою (або задачею системи $H$). Задачу, вхідні дані в якій задано функціями $\vec{\beta}(f(j), w'^t)\Big|_1^m$, де $\vec{\beta}(f(j), w'^t) \le \vec{\beta}(f(j+1), w'^t)$, та $\bar{\varphi}(j)\Big|_1^m$, де $\bar{\varphi}(j) \ge \bar{\varphi}(j+1)$, утворених із $\beta(f(j), w^k)\Big|_1^m$ та $\varphi(j)\Big|_1^m$, назвемо упорядкованою (або задачею системи $H'$).

Зв'язок між базовою та упорядкованою задачами сформулюємо у вигляді таких теорем.

**Теорема 1** [10]**.** Якщо вхідні дані в задачі системи $H'$ задано комбінаторною і числовою функціями $\beta_j(f(j), \omega'^1)$, $\varphi(j) \in R$, причому $\varphi(j) \le \varphi(j+1)$, $\beta_j(f(j), w'^1) \le \beta_{j+1}(f(j+1), w'^1)$, то найбільшого значення цільова функція (1) набуває для перестановки $w'^1 = (1, ..., m)$, а найменшого — для $w'^k = (m, ..., 1)$.

**Теорема 2** [10]**.** Значення цільової функції для задач комбінаторної оптимізації, аргументом якої є перестановка, знаходиться в межах: $\max\limits_{w'^t \in W'} F(w'^t) \ge F(w^k) \ge \min\limits_{w'^t \in W'} F(w'^t)$, $k \in \{1, ..., n!\}$, $i \ne t$, $i, t \in \{1, ..., m!\}$, $w^k \in W$, $w'^i, w'^t \in W'$.

У разі мінімізації значення цільової функції знаходиться в межах $\min\limits_{w'^t \in W'} F(w'^t) \le F(w^k) < F^*$. У разі максимізації — в межах $F^* < F(w^k) \le$ $\le \max\limits_{w'^t \in W'} F(w'^i)$, де $F^* = \min\limits_{w'^t \in W'} F(w'^t) + \dfrac{\max\limits_{w'^i \in W'} F(w'^i) - \min\limits_{w'^t \in W'} F(w'^t)}{\upsilon}$, $\upsilon$ — коефіцієнт зменшення області пошуку оптимального значення, який уточнюється в процесі розв'язання певної задачі.

Методом структурно-алфавітного пошуку за розробленими правилами за функціями $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m$ та $\bar{\varphi}(j)|_1^m$ знаходимо послідовність локальних оптимумів $F = (F(w^1), ..., F(w^{k^*}))$ таких, що $F(w^{k^*}) = \operatorname{glob} \operatorname*{extr}\limits_{w^k \in W} F(w^k)$, де $\operatorname{extr} = \{\min, \max\}$, $w^k$, $w^{k^*} \in W$ — перестановки, $k, k^* \in \{1, ..., n!\}$.

Наведемо обчислювальну схему пошуку глобального мінімуму для задач, аргументом цільової функції яких є перестановка. Глобальний максимум знаходиться аналогічно.

1. Базову задачу комбінаторної оптимізації зведемо до упорядкованої, задавши в ній вхідні дані функціями $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m$ та $\bar{\varphi}(j)|_1^m$. Перейдемо до п. 2.

2. Уведемо множини $F$, $J$, $P$, де $F$ — множина значень локальних мінімумів, $P$ — множина побудованих перестановок, $l$-му елементу якої відповідає $l$-те значення локального мінімуму із $F$, $J$ — множина номерів позицій значень комбінаторної функції, для яких знайдено локальний мінімум. Покладемо $k = 1$, $l = 1$. Величина $k$ вказує на порядковий номер перестановки $w^k \in W$, що будується, а $l$ — порядковий номер перестановки

у множині $P$ (відповідно значення локального мінімуму у множині $F$ та номера позицій значень комбінаторної функції у множині $J$).

За функцією $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m$ за розробленими правилами будуємо перестановку $w^k \in W$. Якщо $w^k \in W$ не змінила порядок значень у $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m$, у множину $F$ заносимо знайдену за виразом (1) величину $F(w^k)$, а в $P$ — відповідно $P_l = w^k$, переходимо до п. 6. В іншому разі покладаємо $F^* = F(w^k)$, $w^{k*} = w^k$.

Знайдемо поточний локальний мінімум. Покладаємо $j = 1$, $\tilde{j} = 1$, $s = 1$, $j_s = j$, $p = 0$. Величина $j$ — номер позиції значення $\vec{\beta}(f(j), w'^t)$, з якої продовжується побудова перестановки, $j_s$ — номер позиції значення комбінаторної функції, з якої починається будуватися чергова перестановка, $\tilde{j}$ — номер позиції значення комбінаторної функції, для якої знаходиться локальний мінімум, $p$ — коефіцієнт, який визначає перехід до пошуку чергового локального мінімуму. Переходимо до п. 3.

3. Покладаємо $k = k + 1$. Побудова чергової перестановки проводиться за значеннями комбінаторної функції, починаючи з $\vec{\beta}(f(j_r), w'^t)$ за правилами, описаними у п.п. 3.1–3.3. Якщо $l = 1$, то $j_r = j_s$, в іншому разі $j_r = J_r$, $J_r \in J$, $r = \overline{1, l-1}$. Переходимо до п. 3.1.

3.1. Для задачі розміщення визначаємо адресу матриці $x, y$, де знаходиться $\vec{\beta}(f(j), w'^t)$. Величини $x, y$ — елементи перестановки $w^k \in W$. Номери позицій цих елементів у перестановці визначаються номерами стовпця і рядка, де знаходиться значення $\bar{\varphi}(j)$, на яке перемножується значення $\vec{\beta}(f(j), w'^t)$. Для задачі комівояжера номери рядка і стовпця матриці, на перетині яких знаходиться $\vec{\beta}(f(j), w'^t)$, є елементами перестановки. У задачі про призначення транспозиція проводиться або рядків або стовпців, тому $x$ вважаємо елементом перестановки, а $y$ — номером позиції елемента перестановки. Переходимо до п. 3.2.

3.2. Покладаємо $j = j + 1$. Якщо $j > m$ або перестановку вже побудовано, переходимо до п. 4. В іншому разі — до п. 3.3.

3.3. Якщо для значення $\vec{\beta}(f(j), w'^t)$ елементи перестановки $w^k$ уже визначено, переходимо до п. 3.2, в іншому разі — до п. 3.1.

4. Для одержаної перестановки $w^k$ знаходимо значення цільової функції $F(w^k)$. Якщо $F(w^k) \geq F^*$ та $k > n^2/2$, переходимо до п. 6. Якщо $F(w^k) \geq F^*$ та $k \leq n^2/2$, покладаємо $p = p + 1$. Якщо $p > \varpi$, переходимо до п. 5 ($\varpi$ — коефіцієнт, що визначає глибину пошуку оптимального розв'язку). В іншому разі покладаємо $j_s = j_s + 1$, переходимо до п. 3. Якщо $F(w^k) < F^*$ та $k \leq n^2/2$, покладаємо $F^* = F(w^k)$, $w^{k*} = w^k$, $\tilde{j} = j_s$, $j_s = j_s + 1$, $j = j_s + 1$, $p = 0$, переходимо до п. 3.

5. Якщо досліджено околи знайдених локальних мінімумів, переходимо до п. 6. В іншому разі покладаємо $F_l = F^*$, $P_l = w^{k*}$, $J_l = \tilde{j}$, $l = l+1$, $j = j_s + 2$, $j_s = j_s - (p-1)$, $s = s+1$, $p = 0$. Переходимо до п. 3.

6. За оптимальний розв'язок, який може збігатися з глобальним, приймаємо $w^k \in W$, для якої цільова функція із множини $F$ набуває найменшого значення.

7. Кінець роботи алгоритму.

Сформулюємо наступну лему.

**Лема 2.** Задачі комбінаторної оптимізації подібні за способом їхнього розв'язання, якщо аргументом цільової функції в них є перестановка.

**Доведення.** Подібність задач комбінаторної оптимізації, в яких аргумент цільової функції є перестановка, випливає з того, що цільова функція в них зводиться до одного виразу (1), вхідні дані моделюються функціями натурального аргументу, а методом структурно-алфавітного пошуку за цими функціями за однією і тією ж схемою знаходиться оптимальний розв'язок для задач різних класів, тобто вони подібні, що і доводить лему 2.

## ПОДІБНІСТЬ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ, У ЯКИХ ЦІЛЬОВА ФУНКЦІЯ ЗАЛЕЖИТЬ ВІД КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Прикладні задачі складні за своєю природою і основна задача, як правило, розділяється на підзадачі, а цільова функція, за якою оцінюється оптимальний розв'язок, залежить від кількох змінних, якими є комбінаторні конфігурації різних типів. Якщо побудувати математичні постановки задач розпізнавання мовленнєвих сигналів та клінічної діагностики з використанням теорії комбінаторної оптимізації, то можна побачити, що вони розділяються на три підзадачі:

- структуризація бібліотеки еталонів;
- пошук у бібліотеці еталонної інформації;
- задача порівняння еталонної та вхідної інформації.

Для обох класів задач аргументом цільової функції в першій підзадачі є розбиття $n$-елементної множини на підмножини, в другій підзадачі — розміщення без повторень, а в третій — сполучення без повторень. Розглянемо ці задачі детальніше.

*Розпізнавання мовленнєвих сигналів* полягає у знаходженні для вхідного сигналу найбільш правдоподібного еталонного з усіх можливих еталонних сигналів. Для розв'язання цієї задачі необхідно провести пошук певного еталону в бібліотеці і порівняти його із вхідним сигналом [11].

Розглянемо задачу порівняння еталонного та вхідного сигналів. Уведемо дві базові множини $A = (a_1, ..., a_n)$ та $B^i = (b_1^i, ..., b_{\tilde{n}}^i)$, де $a_s \in A$ — значення сигналу у відліку $s$, $s = \overline{1, n}$, а $b_l^i \in B^i$ відповідає відліку еталонного сигналу, $l \in \{1, ..., \tilde{n}\}$, $i \in \{1, ..., q^*\}$, $q^*$ — кількість еталонних сигналів. Вхідні дані, якими є ваги між елементами $a_s \in A$ та $b_l^i \in B^i$, задамо несиметричною матрицею $C = \left\| c_{s\,l} \right\|_{n x \tilde{n}}$, номера стовпців якої збігаються з нумерацією елементів $a_s \in A$, а номера рядків — з нумерацією елементів $b_l^i \in B^i$. Оскільки з кожної базової множини $A$ та $B^i$ вибираються по одному елементу в строгому порядку, то отримана комбінаторна конфігурація є розміщення без повторення. Позначимо її $\mu^k \in M$, де $M$ — їхня всіляка множина. Для визначення елементів $a_s \in A$ та $b_l^i \in B^i$, що вибираються з базових множин на $k$-му варіанті розв'язку задачі, уведемо комбінаторну $(0,1)$-матрицю $Q(\mu^k) = \left\| g_{sl}(\mu^k) \right\|_{n x \tilde{n}}$. Якщо $g_{sl}(\mu^k) = 1$, то з множин $A$ та $B^i$ вибрана пара $(a_s, b_l^i)$, в іншому разі значення $g_{sl}(\mu^k) = 0$. Для запису цільової функції в явному вигляді змоделюємо вхідні дані функціями натурального аргументу. Елементи матриці $C$ подамо числовою функцією $\varphi(j)\,|_1^m$, а матриці $Q(\mu^k)$ — комбінаторною $\beta(f(j), \mu^k)|_1^m$, де $m = n \cdot \tilde{n}$.

Задача порівняння еталонного і вхідного мовленнєвих сигналів полягає у знаходженні такого розміщення без повторення $\mu^{k*}$, для якого $F(\mu^{k*}) = \max_{\mu^k \in M} \sum_{j=1}^{m} \varphi(j)\, \beta_j(f(j), \mu^k)$, де $\sum_{j=1}^{m} \varphi(j)\, \beta_j(f(j), \mu^k)$ — інтегральна міра подібності, а $\varphi(j) = u_j(a_s, b_l^i)$ — елементарна міра подібності, яка визначає подібність між елементами еталонного і вхідного сигналів.

Розглянемо задачу пошуку в бібліотеці еталонного сигналу.

В цій підзадачі як ваги між еталонним і вхідним сигналами виступають величини інтегральних мір подібності $F(\mu^{k*})$, числове значення яких подамо матрицею $C'$. Номера стовпців цієї матриці збігаються з номерами еталонних сигналів, розміщених у бібліотеці. Рядок у ній один і відповідає номеру один вхідного сигналу $A$. Оскільки при порівнянні вхідного і еталонного сигналів із множин $A$ та $B$ вибираються два елементи, то утворений об'єкт є сполучення без повторення, який позначимо як $\mu'^k \in M'$, де $M'$ — їхня всіляка множина, $B = (B_1^i, ..., B_q^i)$ — множина еталонних сигналів. Уведемо комбінаторну $(0,1)$-матрицю $Q(\mu'^t) = \left\| g_{1l}(\mu'^t) \right\|_{1 x q}$. Якщо $g_{1l}(\mu'^t) = 1$, то з множин $A$ та $B$ вибрана пара $(A, B_l^i)$, в іншому разі — значення $g_{1l}(\mu'^t) = 0$. Елементи матриці $C'$ подамо числовою функцією $\varphi'(j)|_1^{n-1}$, а матриці $Q(\mu'^t)$ — комбінаторною $\beta'(f'(j), \mu'^t)|_1^{n-1}$.

Задача пошуку еталонного сигналу, який відповідає вхідному, полягає у знаходженні такого сполучення без повторення $\mu'^{t^*}$, для якого

$$F(\mu'^{t^*}) = \max_{\mu'^t \in M} \sum_{j=1}^{n-1} \varphi'(j)\, \beta'_j(f'(j), \mu'^t), \text{ де } \varphi'(j) = \sum_{j=1}^{m} \varphi(j) \beta_j(f(j), \mu^k).$$

*Задача клінічної діагностики.* Побудуємо математичну модель задачі клінічної діагностики як задачу комбінаторної оптимізації. Позначимо $\widetilde{A}=\{\widetilde{a}_1,...,\widetilde{a}_{n^*})$ множину захворювань, описання яких знаходиться в бібліотеці (множина еталонів), де елемент $\widetilde{a}_s \in \widetilde{A}$, $s \in \{1,...,n^*\}$, відповідає певному захворюванню, якому поставлено у відповідність характерні ознаки $V^{(t)}=(v_1^{(t)}, v_2^{(t)},..., v_{q_t'}^{(t)})$, $q_t'$ — кількість ознак $t$-го захворювання. Вхідною інформацією в задачі клінічної діагностики є множина ознак $\widetilde{V}=(\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2,..., \widetilde{v}_{\widetilde{q}})$, що описує одне або кілька захворювань. Позначимо їх $\widetilde{B}=\{\widetilde{b}_1,...,\widetilde{b}_{n^{**}}\}$, де $\widetilde{b}_d \in \widetilde{B}$ — захворювання, яке потрібно визначити, $n^{**}$ — кількість можливих захворювань, а $q_t' \neq \widetilde{q}$ або $q_t' = \widetilde{q}$. Ознаки $\widetilde{v}_r \in \widetilde{V}$ вхідної інформації мають той же зміст, що і описані в еталоні ознаки $v_l^{(t)} \in V^{(t)}$, $r \in \{1,...,\widetilde{q}\}$, $l \in \{1,...,q_t'\}$.

Задача полягає у знаходженні для $\widetilde{B}$ із множиною ознак $\widetilde{V}$ найбільш правдоподібного одного або кількох еталонів із множини $\widetilde{A}=\{\widetilde{a}_1,...,\widetilde{a}_n\}$, тобто за вхідними ознаками встановлюється одне або кілька захворювань $\widetilde{b}_d \in \widetilde{B}$. Ознаки в цій задачі відіграють роль критеріїв, за якими оцінюється її розв'язок. Як і в розпізнаванні мовленнєвих сигналів, для розв'язання цієї задачі необхідно провести пошук певного еталону в бібліотеці й порівняти його із вхідними ознаками.

Розглянемо задачу порівняння ознак еталону $V^{(t)}=(v_1^{(t)}, v_2^{(t)},..., v_{q_t'}^{(t)})$, які визначають $t$-е захворювання, і вхідних ознак $\widetilde{V}=(\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2,..., \widetilde{v}_{\widetilde{q}})$, за якими необхідно встановити діагноз. Позначимо $u_l'(v_s^{(t)}, \widetilde{v}_r)$ елементарну міру подібності між елементами множин $\widetilde{V}$ та $V^{(t)}$. Вважаємо, що міри подібності між елементами $v_s^{(t)} \in V^{(t)}$ та $\widetilde{v}_r \in \widetilde{V}$ є вхідні дані. Їхні числові значення задамо скінченною послідовністю (комбінаторною функцією натурального аргументу, яка залежить від розміщення без повторення $\mu^i$). Задача порівняння еталону і вхідних ознак полягає в знаходженні такого розміщення без повторення $\mu^{i^*}=(\mu_1^{i^*},...,\mu_{q'}^{i^*})$, для якого змодельовані цільові функції набувають максимального значення.

Розглянемо задачу перебору еталонів $\widetilde{A}=\{\widetilde{a}_1,...,\widetilde{a}_{n^*})$. У цій задачі як ваги між елементами $\widetilde{a}_s \in \widetilde{A}$ та вхідними даними $\widetilde{V}$ виступають значення інтегральних мір подібності, одержаних за заданими цільовими функціями при порівнянні ознак еталону і вхідних ознак.

Задача пошуку бібліотечного еталону, який відповідає вхідному, полягає у знаходженні такого сполучення без повторень, для якого значення часткових критеріїв, за якими оцінюється результат розв'язку, були б найбільшими.

Таким чином, як задача клінічної діагностики так і розпізнавання мовленнєвих сигналів розділяються на три підзадачі: структуризація бібліотеки еталонів; пошук у бібліотеці еталонної інформації; порівняння еталонної і вхідної інформації. Аргументом цільової функції в них є різні типи вибірок та розбиття $n$-елементної множини на підмножини.

## ВИСНОВКИ

Задачі комбінаторної оптимізації різних класів, а також множини комбінаторних конфігурацій подібні, якщо вони розв'язуються за однією і тією ж обчислювальною схемою або модифікацією одного і того ж алгоритму. Подібність задач комбінаторної оптимізації встановлюється за аргументом цільової функції, а подібність комбінаторних множин — за способом їхнього утворення і упорядкування. Дослідження прикладних задач комбінаторної оптимізації на подібність дозволить значну їхню частину звести до невеликого числа стандартних схем, можливо канонічних форм. Це дасть змогу створювати адекватні математичні моделі прикладних задач різних класів та вибирати або розробляти для їхнього розв'язання ефективні універсальні методи та алгоритми.

## ЛІТЕРАТУРА


1. *Рейнгольд Э.*, *Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика: пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 476 с.
2. *Липский В.* Комбинаторика для программистов: пер. с польск. — М.: Мир, 1988. — 213 с.
3. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность: пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 510 с.
4. *Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — К.: Наук. думка, 1981. — 281 с.
5. *Беллман Р.* Динамическое программирование: пер. с англ. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. — 400 с.
6. *Михалевич В.С.* Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение // Кибернетика. — 1965. — № 1. — С. 45–56; № 2. — С. 85–89.
7. *Тимофеева Н.К.* О способах образования аргумента целевой функции в задачах комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 6. — С. 96–103.
8. *Тимофієва Н.К.* Теоретико-числові методи розвязання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис. докт. техн. наук / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ. — 2007. — 32 с.
9. *Харди Г.Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства: пер. с англ. — М.: Гос. из-во иностр. лит., 1948. — 456 с.
10. *Тимофеева Н.К.* Определение множества значений целевой функции в задачах дискретной оптимизации // Кибернетика и вычислительная техника. Сложные системы управления: Сб. науч. тр. — К., 1998 . — Вып. 120. — С. 37–43.
11. *Винцюк Т.К.* Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов. — К.: Наукова думка, 1987. — 262 с.


*Надійшла 22.05.2012*