УДК 517.977

КВАЗІОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ІЗ МІНІМАЛЬНОЮ ЕНЕРГІЄЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

І.С. ЛАЗАРЕНКО

Розглянуто однопараметричне сімейство початково-крайових задач для одновимірного рівняння теплопровідності з нелокальними крайовими умовами, які містять дійсний параметр. Крайові умови цієї задачі не є посилено регулярними за жодного значення параметру. Система власних функцій оператора другої похідної, підпорядкованого крайовим умовам не утворює базис Ріса в $L_2(0,1)$ і не є повною. Для параболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами з дійсним параметром розглядається класична задача теорії оптимального керування системами з розподіленими параметрами — керування з мінімальною енергією в спеціальній нормі. В цій роботі вихідну двовимірну задачу з мінімальною енергією замінено двома одновимірними задачами, тобто дано квазіоптимальне наближення розв'язку в задачах із мінімальною енергією для параболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами у випадку розподіленого керування зі спеціальним критерієм якості. Застосовуючи метод відокремлення змінних, отримано розв'язок, який представлено у вигляді рядів по біортогональному базису Рісса, які збігаються до неперервних функцій. Проведено порівняльний аналіз оптимального та квазіоптимального керувань.

ВСТУП

Для розподіленого керування розглянуто задачу з мінімальною енергією в спеціальній нормі. В роботі [1] використання методу відокремлення змінних до цієї задачі дозволило: редукувати вихідну задачу до однієї одновимірної та послідовності двовимірних задач із мінімальною енергією; отримати аналітичні розв'язки вказаних скінченовимірних задач; знайти умови на вихідні дані, які гарантують гладкість керування і класичну розв'язність керованої задачі. В цій роботі двовимірну задачу з мінімальною енергією замінено двома одновимірними задачами з мінімальною енергією, що дає змогу спростити обрахунки і знайти наближений розв'язок вихідної задачі.

Представимо основний результат [1].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У роботі [2] розглянуто однопараметричне сімейство початково-крайових задач для одновимірного рівняння теплопровідності.

Нехай керований процес описується функцією $y(x,t)$, яка задовольняє крайовій задачі

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + u(x,t), \quad (x,t) \in Q_{t_0}^T, \tag{1}$$

$$y(x,t_0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$y(0,t)=0,\ \frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial y(1,t)}{\partial x}+\alpha y(1,t),\quad t>0. \qquad (3)$$

При $\alpha=0$ задача (1)–(3) відома, як задача Самарского–Іонкіна. Останній у своїх роботах, використовуючи метод відокремлення змінних, довів теорему єдиності розв'язку, представивши його у вигляді функціонального ряду і тим самим отримав достатні умови існування класичного розв'язку. Основна складність застосування методу відокремлення змінних полягала в тому, що система власних функцій оператора другої похідної, підпорядкованого крайовим умовам, не утворює базис Рісса в $L_2(0,1)$ й навіть не є повною. Для отримання необхідних результатів система власних функцій поповнювалась приєднаними функціями.

В роботі [2] результати вказані вище розповсюджено на задачі (1)–(3). Для оператора другої похідної $(Lu=-u'')$ з крайовими умовами (3) задача на власні числа в роботі [2] має дві серії розв'язків:

$$\lambda_k^{(1)}=(2\pi k)^2,\quad u_k^{(1)}(x)=\sin(2\pi k x),\ k=1,2,\ldots,$$

$$\lambda_k^{(2)}=(2\gamma_k)^2,\quad u_k^{(2)}(x)=\sin(2\gamma_k x),\ k=1,2,\ldots,$$

де γ_k — розв'язки рівняння

$$tg\gamma=0{,}5\frac{\alpha}{\gamma},\ \ \gamma=0{,}5\sqrt{\lambda}\ .$$

При $\alpha>0$ рівняння додатково має корінь γ_0. Йому відповідають власне значення $\lambda_0=(2\gamma_0)^2$ та власна функція $u_0(x)=\sin(2\gamma_0 x)$.

При $\alpha>0$ від'ємних власних чисел не існує, а при $\alpha<0$ існує єдине власне число $\lambda_0=-(2\gamma_0)^2<0$, де γ_0 — корінь рівняння $\mathrm{th}(\gamma)=-0{,}5\dfrac{\alpha}{\gamma}$. Цьому власному значенню відповідає єдина з точністю до ненульового множника власна функція $u_0(x)=\mathrm{sh}(2\gamma_0 x)$.

Елементи допоміжної системи функцій $W_\alpha=\{w_j(x),\ j=0,1,\ldots\}$ мають вигляд:

$$w_{2k-1}(x)=(u_k^{(2)}(x)-u_k^{(1)}(x))(2\delta_k)^{-1}=(\sin\mathrm{c}\,\delta_k x)x\cos(2\pi k x+\delta_k x),$$

$$w_{2k}(x)=u_k^{(1)}(x)=\sin(2\pi k x),\ k=1,2,\ldots,\quad w_0(x)=\frac{u_0(x)}{2\gamma_0},$$

$$\delta_k=\gamma_k-\pi k,\ \ \sin\mathrm{c}\,\gamma=\frac{\sin\gamma}{\gamma}.$$

Таким чином, під час виконання умов (1)–(3) необхідно знайти керування $u^*(x,t)\in C(Q)$, яке переводить вихідну систему в стан

$$y(x,T)=\psi(x) \qquad (4)$$

і мінімізує функціонал

$$I(u)=\int_{t_0}^{T}\|u\|_D^2\,dt. \qquad (5)$$

Відмітимо, що в задачах з мінімальною енергією у випадку локальних крайових умов у якості критерію вибирається функціонал

$$I_1(u)=\int_Q u^2(x,t)dx\,dt,$$

який асоціюється з повною енергією системи. Ці критерії еквівалентні у розумінні

$$\|\phi\|_D^2=(D\phi,\phi)=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k^2.$$

Надалі будемо розглядати задачу з критерієм (5).

Справедлива наступна теорема.

Теорема. Нехай у задачі з мінімальною енергією (1)–(5) функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ належать області визначення оператора L та $\alpha\neq 0$.

Крім того, припустимо, що $\psi(x)\in C^4(0,1)$ та $\varphi(x)\in C^3(0,1)$, тоді

$$\frac{d^2\psi(1)}{dx^2}=\frac{d^2\psi(0)}{dx^2}=0,\ \frac{d^3\psi(1)}{dx^3}-\frac{d^3\psi(0)}{dx^3}=0, \qquad (6)$$

$$\frac{d^2\varphi(1)}{dx^2}+\frac{d^2\varphi(0)}{dx^2}=0, \qquad (7)$$

а числа t_0 та T обираються з умови

$$(1-\exp(-2\min\{\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)}\}(T-t_0)))^2-\frac{4}{\min\{\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)}\}}\geq\varepsilon^2, \qquad (8)$$

де $\varepsilon>0$ — достатньо мале число.

Тоді задача з мінімальною енергією має єдиний неперервний на $\overline{Q}$ розв’язок і цей розв’язок можна представити у вигляді:

$$u^*(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k^*(t)\omega_k(x), \qquad (9)$$

де

$$u_0^*(t)=\frac{2\lambda_0\mu_0\exp(-\lambda_0(T-t))}{1-\exp(-2\lambda_0(T-t_0))}, \qquad (10)$$

$$u_{2k-1}^*(t)=\beta_{k,1}\exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t))-\beta_{k,2}\theta_k(T-t), \qquad (11)$$

$$u_{2k}^*(t)=\beta_{k,2}\exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t)),\ k\geq 1, \qquad (12)$$

а числа $\beta_{k,i}$ єдиним чином визначаються із системи

$$\beta_{k,1}[h_k^{(1)},h_k^{(1)}]+\beta_{k,2}[h_k^{(1)},h_k^{(2)}]=\mu_{2k-1},$$

$$\beta_{k,1}[h_k^{(1)}, h_k^{(2)}] + \beta_{k,2}[h_k^{(2)}, h_k^{(2)}] = \mu_{2k}. \qquad (13)$$

У (10)–(13) позначено

$$\mu_0 = \psi_0 - \varphi_0 \exp(-\lambda_0 (T - t_0)), \qquad (14)$$

$$\mu_{2k-1} = \psi_{2k-1} - \varphi_{2k-1} \exp(-\lambda_k^{(2)} (T - t_0)), \qquad (15)$$

$$\mu_{2k} = \psi_{2k} - \theta_k (T - t_0) \varphi_{2k-1} - \varphi_{2k} \exp(-\lambda_k^{(1)} (T - t_0)), \qquad (16)$$

φ_{2k}, ψ_{2k} — коефіцієнти розкладу функцій $\varphi(x)$, $\psi(x)$ у ряди по системі W_α

$$\theta_k(t) = \frac{\exp(-\lambda_k^{(1)} t) - \exp(-\lambda_k^{(2)} t)}{2\delta_k}, \qquad (17)$$

$$(h_k^{(1)}(t))' = (\exp(-\lambda_k^{(2)} (T - t), 0),$$

$$(h_k^{(2)}(t))' = (-\theta_k (T - t), \exp(-\lambda_k^{(1)} (T - t))), \qquad (18)$$

$[.,.]$ — скалярний добуток у гільбертовому просторі $L_2^2(t_0, T) = L_2(t_0, T) \times$ $\times L_2(t_0, T)$.

Значення критерію дано збіжним рядом

$$I(u^*) = I_0(u_0^*) + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(u_{2k-1}^*, u_{2k}^*), \qquad (19)$$

де

$$I_0(u_0^*) = 2\frac{\lambda_0 \mu_0^2}{1 - \exp(-2\lambda_0 (T - t_0))}, \qquad (20)$$

$$I_k(u_{2k-1}^*, u_{2k}^*) = \int_{t_0}^{T} ((u_{2k-1}^*(t))^2 + (u_{2k}^*(t))^2) dt. \qquad (21)$$

Оптимальна траєкторія, що задається рядом

$$y^*(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k^*(t) w_k(x), \qquad (22)$$

де функції $y_k^*(t)$ визначаються як розв'язки задачі Коші

$$\dot{y}_{2k-1}^*(t) + \lambda_k^{(2)} y_{2k-1}^*(t) = u_{2k-1}^*(t), \quad y_{2k-1}^*(t_0) = \varphi_{2k-1}; \qquad (23)$$

$$\dot{y}_{2k}^*(t) + \lambda_k^{(1)} y_{2k}^*(t) = \frac{\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}}{2\delta_k} y_{2k-1}^*(t) + u_{2k}^*(t), \;\; y_{2k}^*(t_0) = \varphi_{2k}, \; k = 1, 2, ...; \qquad (24)$$

$$\dot{y}_0^*(t) + \lambda_0 y_0^*(t) = u_0^*(t), \quad y_0^*(t_0) = \varphi_0; \qquad (25)$$

є класичним розв'язком крайової задачі (1)–(3).

Ця задача редукується до послідовності скінченовимірних задач. При $k = 0$ будемо мати таку задачу: мінімізувати функціонал

$$I_0(u_0) = \int_{t_0}^{T} u_0^2(t)dt \tag{26}$$

за обмеження

$$\int_{t_0}^{T} \exp(-\lambda_0(T-t))u_0(t)dt = \mu_0. \tag{27}$$

При $k > 0$ слід мінімізувати функціонал

$$I_k(u_{2k-1}, u_{2k}) = \int_{t_0}^{T} (u_{2k-1}^2(t) + u_{2k}^2(t))dt \tag{28}$$

за обмеження

$$\int_{t_0}^{T} \exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t))u_{2k-1}(t)dt = \mu_{2k-1},$$

$$\int_{t_0}^{T} [-\theta_k(T-t)u_{2k-1}(t) + \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t))u_{2k}(t)]dt = \mu_{2k}. \tag{29}$$

Задачі (26)–(29) представляють собою скінченновимірні задачі з мінімальною енергією.

Повне доведення теореми представлено в роботі [1].

ПОБУДОВА КВАЗІОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Редуковану двовимірну задачу (28)–(29) можемо наближено замінити двома одновимірними задачами виду:

1) мінімізувати функціонал

$$\hat{I}_{2k-1}(\hat{u}_{2k-1}) = \int_{t_0}^{T} \hat{u}_{2k-1}^2(t)dt \tag{30}$$

за обмеження

$$\int_{t_0}^{T} \exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t))\hat{u}_{2k-1}(t)dt = \hat{\mu}_{2k-1}, \tag{31}$$

2) мінімізувати функціонал

$$\hat{I}_{2k}(\hat{u}_{2k}) = \int_{t_0}^{T} \hat{u}_{2k}^2(t)dt \tag{32}$$

за обмеження

$$\int_{t_0}^{T} \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t))\hat{u}_{2k}(t)dt = \hat{\mu}_{2k}, \tag{33}$$

де $\hat{\mu}_{2k-1} = \mu_{2k-1}$,

$$\hat{\mu}_{2k} = \mu_{2k} + \int_{t_0}^{T} \theta_k(T-t)\hat{u}_{2k-1}(t)dt.$$

Розв’язок задачі (30)–(31) має вигляд:

$$\hat{u}_{2k-1}(t) = \frac{2\lambda_k^{(2)} \hat{\mu}_{2k-1} \exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t))}{1-\exp(-2\lambda_k^{(2)}(T-t_0))}, \tag{34}$$

$$I_{2k-1}(\hat{u}_{2k-1}) = 2\frac{\lambda_k^{(2)} \hat{\mu}_{2k-1}^2}{1-\exp(-2\lambda_k^{(2)}(T-t_0))}, \tag{35}$$

а розв’язок задачі (32) – (33) задається формулами

$$\hat{u}_{2k}(t) = \frac{2\lambda_k^{(1)} \hat{\mu}_{2k} \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t))}{1-\exp(-2\lambda_k^{(1)}(T-t_0))}, \tag{36}$$

$$I_{2k}(\hat{u}_{2k}) = 2\frac{\lambda_k^{(1)} \hat{\mu}_{2k-1}^2}{1-\exp(-2\lambda_k^{(1)}(T-t_0))}, \tag{37}$$

$$I_k(\hat{u}_k) = I_{2k-1}(\hat{u}_{2k-1}) + I_{2k}(\hat{u}_{2k}).$$

Тим самим формули (34)–(35) та (36)–(37), з одного боку, представляють собою розв’язки задач одновимірної оптимальної стабілізації 1) – 2), а з іншого боку, ці розв’язки формують квазіоптимальну стабілізацію двовимірної задачі.

Тепер слід оцінити помилку за функціоналом такої заміни:

$$\Delta_k I = I_k(\hat{u}_k) - I(u^*).$$

Отримати теоретично таку оцінку для задачі, що розглядається, дуже важко. Тому обмежимося числовим експериментом.

Зафіксуємо число N та обчислимо величину неузгодженості

$$\Delta^N I = \sum_{k=1}^{2N} \Delta_k I.$$

Для $\alpha = 0{,}4,\ t_0 = 0,\ T = 1$ візьмемо функцію $\varphi = -2x^3 + 3x^2 - x$, яка підпорядковується крайовій умові (3), умові теореми (7) та функцію кінцевого стану $\psi = \frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + x^3 - \frac{x}{10}$, яка підпорядковується крайовій умові (3), та умові теореми (6).

Розрахунки показали, що для всіх N, починаючи з $N = 1$:

$$I_k(\hat{u}_k) = 1{,}714285697 \times 10^{-2},$$

$$I(u^*) = 1{,}6728770441 \times 10^{-2},$$

а

$$\Delta^N I = 4{,}14086531 \times 10^{-4}.$$

ВИСНОВКИ

Для параболічних рівнянь із нелокальними крайовими умовами розглянуто класичну задачу теорії оптимального керування з розподіленими параметрами — керування з мінімальною енергією в спеціальній нормі, еквівалентній L_2-нормі. Використання методу відокремлення змінних дозволило редукувати вихідну задачу до однієї одновимірної та послідовності двовимірних задач з мінімальною енергією та отримати її аналітичний розв'язок у вигляді рівномірно збіжного ряду. Для спрощення обчислень редуковану двовимірну задачу заміняємо на дві одновимірні і досліджуємо квазіоптимальні наближення даної задачі з мінімальною енергією. Оскільки теоретично оцінити помилку такої заміни поки що не вдається, обмежуємося в даному дослідженні числовим експериментом.

Таким чином, при фіксованих початкових даних, наведений приклад ілюструє, що вихідна крайова задача, для якої виконуються умови наведеної теореми, може бути замінена на сукупність більш простих в обрахунках задач, які дають достатньо точний результат. А використання квазіоптимального керування в такому випадку дає розв'язок, який є наближенням для розв'язку вихідної задачі з мінімальною енергією.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Капустян В.Е., Лазаренко И.С.* Задачи с минимальной энергией для параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: моделювання, вип. 1. — 2009. — **17**. — № 8. — С. 47–60
2. *Мокин А.Ю.* Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения. — 2009. — **45**. — № 1. — С. 123–137.

Надійшла 23.08.2012