МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

УДК 517.9, 519.816

МЕТОД УЗГОДЖЕНИХ ПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ ПРИ ОЦІНЮВАННІ АЛЬТЕРНАТИВ РІШЕНЬ ЗА ЯКІСНИМ КРИТЕРІЄМ

Н.І. НЕДАШКІВСЬКА

Запропоновано метод, що дозволяє коригувати неузгодженість матриці парних порівнянь, яка отримана в результаті експертного оцінювання альтернатив рішень за якісним критерієм та отримати узгоджені оцінки залежно від властивостей матриці парних порівнянь. Сформульовано та доведено твердження про мультиплікативне та адитивне коригування матриці парних порівнянь без участі експерта. На відміну від відомих методів зі зворотнім зв'язком з експертом, метод підвищення узгодженості без участі експерта призводять до економії фінансових та часових ресурсів. Метод включає пошук та коригування без участі експерта найбільш неузгоджених та помилкових елементів (викидів) матриці парних порівнянь. Розроблений метод призначений для використання в системах підтримки прийняття рішень під час розв'язання задач вибору, розподілу ресурсів, оцінювання альтернатив рішень за множиною кількісних та якісних критеріїв, оцінювання сценаріїв розвитку, в задачах планування та технологічного передбачення.

ВСТУП

Методи парних порівнянь — одні з складових більшості сучасних методологій підтримки прийняття рішень, таких як методології аналізу ієрархічних структур критеріїв та альтернатив рішень [1–4], «лінія», «трикутник», «квадрат» [5], PROMETHEE [6]. Методи парних порівнянь використовуються для розв'язання слабо структурованих задач оцінювання альтернатив рішень за якісним критерієм із залученням експертних оцінок [7–10]. Зокрема, в методах аналізу ієрархій експерт попарно порівнює альтернативи у спеціальній фундаментальній шкалі відносної важливості та в результаті будуються матриці $D_{n\times n}=\{d_{ij} \mid i,j=1,...,n\}$ із властивостями $d_{ij}>0$, $d_{ji}=1/d_{ij}$.

Методи парних порівнянь спрямовані на відновлення коефіцієнтів відносної важливості (ваг) $w\in R_+^n$, $\sum_{i=1}^n w_i=1$ альтернатив рішень за якісним критерієм із матриці парних порівнянь (МПП) $D_{n\times n}$. Розрахунок цих ваг найчастіше заснований на ідеї мінімізації норми відхилень МПП $D_{n\times n}$ від деякої невідомої матриці $C=(w_i/w_j)$, яка в методах парних порівнянь вважається найкращою апроксимацією МПП $D_{n\times n}$. Матриця $C=(w_i / w_j)$ називається узгодженою або теоретичною. Традиційним є метод головного вектору розрахунку ваг із МПП $D_{n\times n}$ [2]. Залежно від вибору функції норми матриці застосовуються також інші методи парних порівнянь: найменших квадратів, зважених найменших квадратів, логарифмічних найменших квадратів тощо [1].

Детальніше розглянемо поняття узгодженості, яке є одним із ключових у методах парних порівнянь. Неузгодженість є проявом суперечності в оцінках експертів і з'являється за необхідності порівняння більш ніж трьох об'єктів. МПП називається порядково або ординально неузгодженою, якщо $\exists a_i, a_j, a_k$ — трійка порівнюваних альтернатив, для якої має місце цикл $a_i \succ a_j \succ a_k \succ a_i$, або в термінах елементів МПП виконується $(d_{ij} > 1) \wedge \wedge (d_{jk} > 1) \wedge (d_{ik} < 1)$. Кардинальною неузгодженістю (в подальшому просто неузгодженістю) називається $\exists i, j, k,$ таких, що $d_{ij} \neq d_{ik} d_{kj}$. Причинами неузгодженості вважаються помилки експертів під час висловлювання оцінок, використання фундаментальної шкали відносної важливості [10], психологічні обмеження людини-експерта [5, 11]. Для оцінювання узгодженості МПП розроблено декілька показників та критеріїв [1]. Один із критеріїв узгодженості полягає в наступному: якщо показник узгодженості МПП не перевищує встановлене для нього порогове значення, то неузгодженість МПП є допустимою; МПП узгоджена, якщо показник узгодженості дорівнює нулю.

Експертні оцінки без допустимої неузгодженості вважаються суперечливими і, відповідно, не можуть бути використані під час прийняття рішення. Традиційний підхід до підвищення узгодженості експертної інформації — це організація зворотного зв'язку з експертом, коли експерту для перегляду повертаються вся недостатньо узгоджена МПП [5, 12] або її найбільш неузгоджені елементи [13]. Процедура перегляду повторюється до тих пір, коли не буде досягнуто допустимого рівня неузгодженості МПП. Розглядають методи знаходження викидів — помилкових елементів МПП, які виникають унаслідок неточного вводу оцінок або випадкових помилок [13]. Проте, внаслідок фінансових та часових обмежень, зворотній зв'язок із експертом не завжди можливий.

Інший підхід — коригувати МПП, змінюючи її елементи за певними алгоритмами без участі експерта так, щоб скоригована МПП була більш узгодженою. Недоліком методу, запропонованого в [11], є те, що коригування МПП із певними властивостями призводить до викривлення наданої експертом інформації в МПП.

У цій роботі пропонуються метод та алгоритм узгоджених парних порівнянь у ході оцінювання альтернатив рішень за якісним критерієм, який дозволяє коригувати неузгодженість МПП, отримати допустимо неузгоджені оцінки парних порівнянь альтернатив рішень, використовуючи наведені вище підходи залежно від властивостей МПП.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай задана $D_{n\times n} = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$ — МПП альтернатив рішень за якісним критерієм.

Необхідно побудувати допустимо неузгоджену МПП та розрахувати ваги $w \in R_+^n$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ альтернатив рішень.

Якщо експерт попарно порівнює альтернативи у шкалі відношень, то говорять про мультиплікативні, а якщо в шкалі інтервалів — то про адитивні парні порівняння. В подальшому в роботі розглянемо лише мультиплікативні парні порівняння.

Мультиплікативною матрицею парних порівнянь (далі МПП) називається додатна, обернено симетрична МПП $D_{n \times n}$: $d_{ij} > 0$, $d_{ji} = 1/d_{ij}$. Сильно узгодженою (далі узгодженою) називається МПП $\widehat{D}_{n \times n}$, для якої виконуються транзитивності: $\widehat{d}_{ij} = \widehat{d}_{ik}\widehat{d}_{kj}$ для $\forall i, j, k = 1, ..., n$. Слабо (порядково) узгодженою називається МПП $\breve{D}_{n \times n}$, для якої виконуються порядкові транзитивності: $(\breve{d}_{ij} > 1) \wedge (\breve{d}_{jk} > 1) \Rightarrow (\breve{d}_{ik} < 1)$. В іншому випадку, якщо $\exists i, j, k$ $(\breve{d}_{ij} > 1) \wedge (\breve{d}_{jk} > 1) \wedge (\breve{d}_{ik} < 1)$, то елемент $\breve{d}_{ik}$ слабо неузгодженої МПП називатимемо викидом.

Твердження. Якщо $D_{n \times n}$ — узгоджена МПП, то $D_{n \times n}$ — слабо узгоджена.

Наступна МПП $D1_{n \times n}$ узгоджена; $D2_{n \times n}$ — неузгоджена; слабо узгоджена; $D3_{n \times n}$ не є слабо узгодженою:

$$D1_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 1/2 & 1 & 3 & 1 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D2_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D3_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/6 & 2 \\ 1/2 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для оцінювання рівня неузгодженості МПП $D_{n \times n}$ використовуються показники CR, GCI, HCR [1], CI^{tr} [14] та k_y [5]. Допустима неузгодженість МПП визначається наступними критеріями.

Критерій узгодженості 1: неузгодженість МПП $D_{n \times n}$ є допустимою, якщо $CR(D_{n \times n}) \le CR^{\text{porog}}$ або $GCI(D_{n \times n}) \le GCI^{\text{porog}}$, або $HCR(D_{n \times n}) \le$ $\le HCR^{\text{porog}}$, або $CI^{\text{tr}}(D_{n \times n}) \le CI^{\text{tr porog}}$ (залежно від того, який показник використовується), де $CR^{\text{porog}}, GCI^{\text{porog}}, HCR^{\text{porog}}, CI^{\text{tr porog}}$ — порогові значення відповідних показників.

Критерій узгодженості 2: якщо $k_y(D_{n \times n}) < T_0$, то МПП $D_{n \times n}$ не містить інформації, тобто, елементи МПП — інформаційний шум; якщо $(k_y(D_{n \times n}) \ge T_0) \wedge (k_y(D_{n \times n}) < T_u)$, то інформація в МПП є, проте вона недостатньо узгоджена; якщо $k_y(D_{n \times n}) \ge T_u$, то неузгодженість МПП $D_{n \times n}$ допустима, де T_0, T_u — порогові значення, які визначаються, відповідно зі спектру, що містить мінімальну кількість інформації та спектру допустимої точності.

ПОКАЗНИКИ УЗГОДЖЕНОСТІ МПП

Нехай $d_{ij} = c_{ij}\varepsilon_{ij}$, де $c_{ij} = w_i / w_j$ — елемент узгодженої МПП, $\varepsilon_{ij} > 0$ — величина збурення. Відношенням узгодженості МПП $D_{n\times n}$ називається $CR(D_{n\times n}) \overset{\text{def}}{=} CI(D_{n\times n}) / MRCI(n)$, де індекс узгодженості $CI(D_{n\times n}) \overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=} -\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i /(n-1)$ — середнє значення не головних власних чисел $D_{n\times n}$ із знаком «–», $CI(D_{n\times n}) = (\lambda_{\max} - n)/(n-1)$, $\lambda_{\max}$ — головне власне число $D_{n\times n}$, $MRCI(n) > 0$ — індекс випадкової узгодженості — середнє значення індексів узгодженості для випадковим чином заповнених МПП розмірності $n \ge 3$ (таблична величина).

Твердження 1. $CR(D_{n\times n}) \ge 0$ та $CR(D_{n\times n}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $D_{n\times n}$ узгоджена.

Геометричним індексом узгодженості називається $GCI(D_{n\times n}) \overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=} S^2(D_{n\times n}) / d.f(n)$, де $S^2(D_{n\times n}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(\ln d_{ij} - \ln(v_i / v_j))^2$, $d.f(n) =$ $= n(n-1)/2 - (n-1)$ — кількість ступенів свободи, вектор ваг $v \in R_+^n$ — розв'язок задачі оптимізації $S^2(D_{n\times n}) \to \min$ за обмежень $\prod_{i=1}^{n} v_i = 1$, $v \in R_+^n$. Аналітичний розв'язок останньої задачі $v_i = \left(\prod_{j=1}^{n} d_{ij}\right)^{1/n}$.

Твердження 2. $GCI(D_{n\times n}) \ge 0$ та $GCI(D_{n\times n}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $D_{n\times n}$ узгоджена.

Гармонічним відношенням узгодженості називається $HCR(D_{n\times n}) \overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=} HCI(D_{n\times n}) / MRHCI(n)$, де $HCI(D_{n\times n}) \overset{\text{def}}{=} (HM(s) - n)(n+1)/(n(n-1))$ — гармонічний індекс узгодженості, $HM(s) = n(\sum_{j=1}^{n}(s_j)^{-1})^{-1}$ — середнє гармонічне величин $s_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}$, $MRHCI(n) > 0$ — індекс випадкової узгодженості — середнє значення гармонічних індексів узгодженості для випадковим чином заповнених МПП розмірності $n \ge 3$ (таблична величина).

Твердження 3. $HCR(D_{n\times n}) \ge 0$ та $HCR(D_{n\times n}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $D_{n\times n}$ узгоджена.

Індексом узгодженості транзитивностей [14] називається $CI^{\text{tr}}(D_{n\times n}) \overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{NT}\sum_{i=1}^{NT} CI^{\text{tr}}(\Gamma_i)$ — середнє значення індексів узгодженості $CI^{tr}(\Gamma_i)$ всіх різних транзитивностей МПП $D_{n\times n}$, якщо $n > 3$, $CI^{\text{tr}}(D_{n\times n}) \overset{\text{def}}{=} \det(D_{n\times n})$, якщо $n = 3$ та $CI^{\text{tr}}(D_{n\times n}) \overset{\text{def}}{=} 0$ в іншому випадку, де $NT = n!/((n-3)!\,3!)$ —

кількість різних транзитивностей МПП $D_{n\times n}$, якщо $n \geq 3$. Транзитивність Г — це слабкий порядок на множині з трьох альтернатив $\{a_i, a_j, a_k\}$.

Твердження 4. $CI^{tr}(D_{n\times n}) \geq 0$ та $CI^{tr}(D_{n\times n}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $D_{n\times n}$ узгоджена.

<u>Спектральним коефіцієнтом узгодженості</u> [5] називається $k_y(D_{n\times n}) = \min\limits_{i=1,\dots,n}(k_y(R_i))$, де $k_y(R_i)$ — спектральний коефіцієнт узгодженості спектра ваг R_i альтернативи a_i.

Твердження 5. $k_y(D_{n\times n}) \geq 0$ і $k_y(D_{n\times n}) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $D_{n\times n}$ узгоджена.

МЕТОД РОЗРАХУНКУ УЗГОДЖЕНИХ ВАГ АЛЬТЕРНАТИВ РІШЕНЬ ЗА ЯКІСНИМ КРИТЕРІЄМ

У роботі запропоновано метод розрахунку ваг альтернатив рішень за якісним критерієм, який складається з етапів оцінювання узгодженості та коригування узгодженості МПП та етапу відновлення ваг з МПП. Особливості цього методу полягають у наступному:

- використовується як традиційне поняття узгодженої МПП, так і нове поняття слабо узгодженої МПП, що дозволяє коректно коригувати МПП залежно від її властивостей;
- здійснюється оцінювання і коригування узгодженості за множиною показників;
- методи знаходження найбільш неузгоджених та помилкових (викидів) елементів МПП є складовою запропонованого методу;
- методи коригування МПП без участі експерта, залежно від властивостей МПП є складовою запропонованого методу.

Структурну схему загального алгоритму методу зображено на рисунку.

Методи підвищення узгодженості МПП використовуються, якщо МПП не є допустимо неузгодженою в сенсі наведених вище критеріїв узгодженості. Для таких МПП пропонуються два різних методи підвищення узгодженості без участі експерта, залежно від того, чи володіє МПП додатковою властивістю слабої узгодженості.

Якщо МПП є слабо узгодженою, то це означає, що всі її порядкові транзитивності виконуються, але не виконуються сильні транзитивності, тобто має місце $d_{ij} = d_{ik} d_{kj} \delta_{ij}$, де $\delta_{ij} > 0$ — величина збурення. В цьому випадку пропонується використовувати мультиплікативний або адитивний методи коригування МПП без участі експерта (п.1).

Якщо МПП слабо неузгоджена, як, наприклад, наведена вище МПП $D3_{4\times 4}$, то її коригування за мультиплікативним або адитивним методами призведе до зміни *всіх* елементів цієї МПП замість того, щоб знайти та змінити лише один найбільш неузгоджений/помилковий елемент (викид). За означенням у слабо неузгодженій МПП існує елемент, що порушує порядкову транзитивність на множині порівнюваних альтернатив. Такий елемент може з'явитися, наприклад, якщо експерт, заповнюючи велику кількість опитувальних форм, помилився під час введення в обернено симетричні позиції МПП. Наприклад, в МПП $D3_{4\times 4}$ викидом є $d_{13} = 1/6$. Більш того, для $D3_{4\times 4}$ виконуються всі транзитивності в означенні сильної узгодженості, крім однієї: $d_{13} \neq d_{12}d_{23}$. Після зміни елементу d_{13} та присвоєння йому значення $d_{13} := 6$ (та обернено симетричному елементу $d_{31} := 1/6$) МПП $D3_{4\times 4}$ стає сильно узгодженою. Тому мультиплікативне або адитивне коригування *всіх елементів* початкової МПП $D3_{4\times 4}$ є неприйнятним, воно призводить до викривлення наданої експертом інформації.

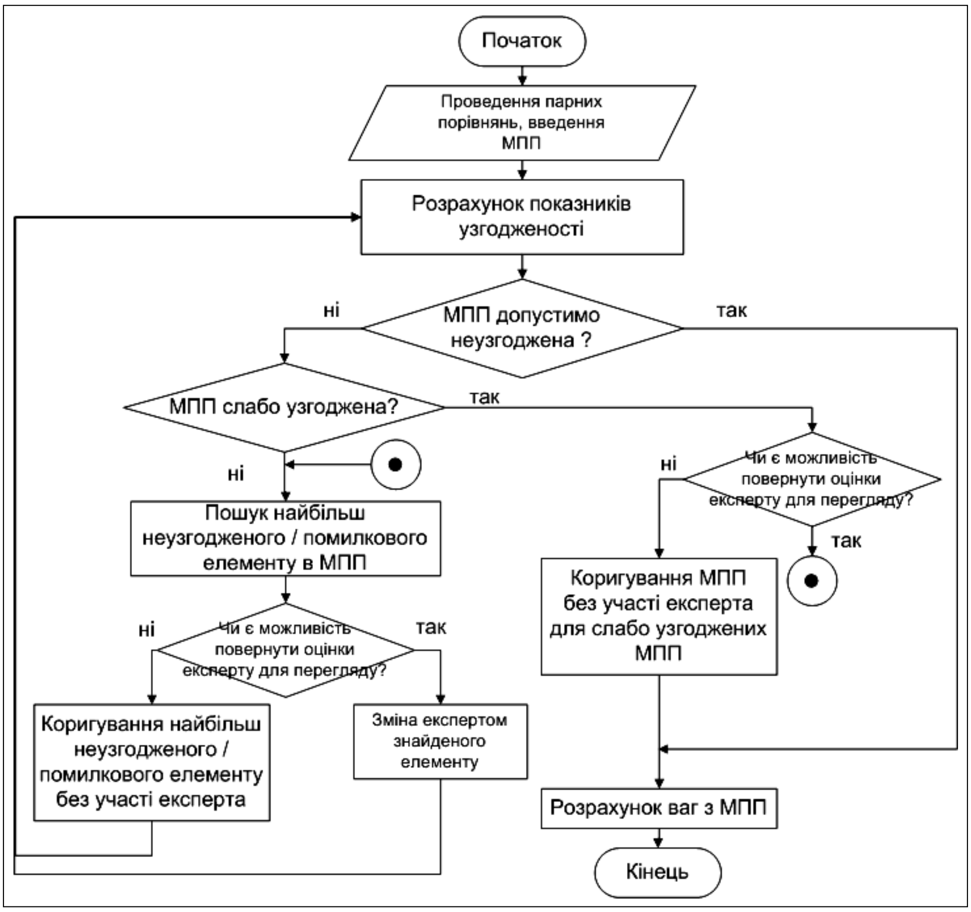

Рисунок. Структурна схема загального алгоритму методу

Таким чином, для коригування МПП, яка не має властивості слабої узгодженості, пропонується шукати її найбільш неузгоджений/ помилковий елемент або викид (п. 2), а потім або повернути його експерту для перегляду, або виконати його коригування без участі експерта (п. 3).

1. Коригування МПП без участі експерта для слабо узгоджених МПП

Складовою розробленого методу є мультиплікативний та адитивний методи коригування МПП без участі експерта. В цих методах коригування, запропонованих у [11], узгодженість МПП вимірюється лише за показником CR. У методах коригувань в цій роботі узгодженість вимірюється також за множиною показників GC, HCR та CI^{tr}. Ці методи базуються на сформульованих і доведених нижче узагальнених твердженнях 6 та 7.

Під час коригуванні МПП за описаними нижче мультиплікативним та адитивним законами покращується узгодженість МПП за показником CR [11]. Узагальнені твердження 6 та 7 показують, що за таких коригувань покращується узгодженість МПП також за показниками GCI, HCR та CI^{tr}.

Твердження 6 (мультиплікативне коригування)**.** Нехай $D^*_{n\times n}=(d^*_{ij})$, $d^*_{ij}=(d_{ij})^{\alpha}\left(\dfrac{w_i}{w_j}\right)^{1-\alpha}$ — скоригована МПП, де $\alpha\in(0,1)$ — параметр коригування. Тоді $CI^*\le CI$, $GCI^*\le GCI$, $HCI^*\le HCI$ та $CI^{\text{tr}*}\le CI^{\text{tr}}$, де CI^*, GCI^*, HCI^* та $CI^{\text{tr}*}$ — відповідно традиційний, геометричний, гармонічний індекси узгодженості та індекс узгодженості транзитивностей скоригованої МПП $D^*_{n\times n}$; CI, GCI, HCI та CI^{tr} — індекси узгодженості початкової МПП $D_{n\times n}$; рівності $CI^*=CI$, $GCI^*=GCI$, $HCI^*=HCI$ та $CI^{\text{tr}*}=CI^{\text{tr}}$ виконуються тоді і тільки тоді, коли $D_{n\times n}$ узгоджена.

Твердження 7 (адитивне коригування)**.** Нехай $D^*_{n\times n}=(d^*_{ij})$ — скоригована МПП, де $d^*_{ij}=\alpha d_{ij}+(1-\alpha)\left(\dfrac{w_i}{w_j}\right)$, якщо $i<j$ та $d^*_{ij}=$ $=\left(\alpha d_{ji}+(1-\alpha)\left(\dfrac{w_j}{w_i}\right)\right)^{-1}$, якщо $i\ge j$, $\alpha\in(0,1)$ — параметр коригування. Тоді $CI^*\le CI$, $GCI^*\le GCI$, $HCI^*\le HCI$ та $CI^{\text{tr}*}\le CI^{\text{tr}}$, де CI^*, GCI^*, HCI^* та $CI^{\text{tr}*}$ — відповідно традиційний, геометричний та гармонічний індекси узгодженості та індекс узгодженості транзитивностей скоригованої МПП $D^*_{n\times n}$; CI, GCI, HCI та CI^{tr} — індекси узгодженості початкової МПП $D_{n\times n}$; рівності $CI^*=CI$, $GCI^*=GCI$, $HCI^*=HCI$ та $CI^{\text{tr}*}=CI^{\text{tr}}$ виконуються тоді і тільки тоді, коли $D_{n\times n}$ узгоджена.

Твердження 6 та 7 для показника CI доведено в [11]. Розглянемо доведення тверджень 6 та 7 для показників GCI, HCI та CI^{tr}.

Доведення твердження 6.

Покажемо, що твердження справджується за показником GCI.

$GCI\,(D_{n\times n})=\dfrac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(\ln d_{ij}-\ln(w_i/w_j))^2$. Нехай $e_{ij}=d_{ij}w_j/w_i$ та $b=2/((n-1)(n-2))>0$ при $n\ge 3$, тоді $GCI^*-GCI=$ $=b\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}((\ln e^*_{ij})^2-(\ln e_{ij})^2)$.

Оскільки $d_{ij}^* = (d_{ij})^\alpha \left(\frac{w_i}{w_j}\right)^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, то $e_{ij}^* = d_{ij}^* w_j / w_i = (e_{ij})^\alpha$. Тоді

$$GCI^* - GCI = b\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n ((\ln e_{ij}^* - \ln e_{ij})(\ln e_{ij}^* + \ln e_{ij})) =$$

$$= b\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \ln e_{ij}^{\alpha-1} \ln e_{ij}^{\alpha+1} = b(\alpha-1)(\alpha+1)\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (\ln e_{ij})^2 \le 0$$

при $b > 0$ та $\alpha \in (0,1)$.

Таким чином, $GCI^* \le GCI$ та рівність $GCI^* = GCI$ виконується тоді й тільки тоді, коли $e_{ij} = 1$ при $\forall\, i, j = 1,...,n$, тобто коли $D_{n\times n}$ узгоджена.

Покажемо, що твердження справджується за показником HCI.

$$HCI(D_{n\times n}) = (HM(s) - n)(n+1)/(n(n-1)),$$

тоді

$$HCI^* - HCI = b(HM^*(s) - HM(s)),\ \text{де}\ b = (n+1)/(n(n-1)) > 0.$$

$$s_j^* = \sum_{i=1}^n (d_{ij})^\alpha (w_i / w_j)^{1-\alpha} \le \sum_{i=1}^n \alpha d_{ij} + (1-\alpha)(w_i / w_j) =$$

$$= \alpha s_j + (1-\alpha) s_j \sum_{i=1}^n (s_i)^{-1} \qquad (1)$$

при $w_j = (s_j)^{-1}$.

$$HCI^* - HCI = bn\left(\left(\sum_{j=1}^n (s_j^*)^{-1}\right)^{-1} - \left(\sum_{j=1}^n (s_j)^{-1}\right)^{-1}\right).$$

Доведемо, що $HCI^* - HCI \le 0$. Так як $s_j > 0$ та $s_j^* > 0$, то для цього достатньо показати виконання нерівності $\sum_{j=1}^n (s_j)^{-1} - \sum_{j=1}^n (s_j^*)^{-1} \le 0$. Ця нерівність випливає з того, що для $\forall j$ $s_j^* = s_j(\alpha + (1-\alpha)\sum_{i=1}^n (s_i)^{-1}) \le s_j$, оскільки $\alpha + (1-\alpha)\sum_{i=1}^n (s_i)^{-1} \le 1$ (доведення нерівності $\sum_{i=1}^n (s_i)^{-1} \le 1$ можна знайти в [1]). Таким чином, $HCI^* \le HCI$.

$HCI^* = HCI$ виконується, коли мають місце рівність у виразі (1) та $\sum_{i=1}^n (s_i)^{-1} = 1$. У виразі (1) рівність $(d_{ij})^\alpha (w_i / w_j)^{1-\alpha} = \alpha d_{ij} + (1-\alpha)(w_i / w_j)$ виконується тоді й тільки тоді, коли $d_{ij} = w_i / w_j$ при $\forall\, i, j = 1,...,n$, тобто коли $D_{n\times n}$ узгоджена. Рівність $\sum_{i=1}^n (s_i)^{-1} = 1$ також виконується тоді й тільки тоді, коли $D_{n\times n}$ узгоджена [1].

Покажемо, що твердження справджується за показником CI^{tr}. Для цього достатньо довести, що $CI^{\mathrm{tr}}(\Gamma_l^*) = \det(\Gamma_l^*) \le CI^{\mathrm{tr}}(\Gamma_l) = \det(\Gamma_l)$, де

$$\Gamma_l = \begin{pmatrix} 1 & d_{ij} & d_{ik} \\ d_{ji} & 1 & d_{jk} \\ d_{ki} & d_{kj} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\Gamma_l) = (d_{ij} d_{jk} / d_{ik}) + d_{ik} / (d_{ij} d_{jk}) - 2,$$

$$\det(\Gamma_l^*) = (d_{ij} d_{jk} / d_{ik})^{\alpha} + (d_{ik} / (d_{ij} d_{jk}))^{\alpha} - 2, \ \alpha \in (0,1).$$

Оскільки $x^{\alpha} + \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} \le x + \frac{1}{x}$ має місце при $x > 0$ та $\alpha \in (0,1)$, маємо, що $\det(\Gamma_l^*) \le \det(\Gamma_l)$, що і треба було довести.

Функції $y = x^{\alpha} + \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$ та $y = x + \frac{1}{x}$ приймають свої мінімальні значення в точці $x = 1$, а $x = d_{ij} d_{jk} / d_{ik} = 1 \ \ \forall i, j, k = 1, \ldots, n$ має місце тоді й тільки тоді, коли $D_{n \times n}$ узгоджена. Таким чином, $CI^{\text{tr}*} = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^{NT} CI^{\text{tr}}(\Gamma_i^*) \le CI^{\text{tr}}$ та рівність $CI^{tr*} = CI^{tr}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $D_{n \times n}$ узгоджена.

Твердження 6 доведено. ■

Доведення твердження 7.

Покажемо, що твердження справджується за показником GCI.

$$GCI^* - GCI = b \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} ((\ln e_{ij}^* - \ln e_{ij})(\ln e_{ij}^* + \ln e_{ij})) =$$

$$= b \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \ln(e_{ij}^* / e_{ij}) \ln(e_{ij} / e_{ji}^*), \ b = 2 / ((n-1)(n-2)) > 0.$$

$$e_{ij}^* = d_{ij}^* w_j / w_i = \alpha e_{ij} + (1 - \alpha) \ \text{ при } i < j,$$

$$e_{ij}^* = (\alpha e_{ji} + (1 - \alpha))^{-1}, \ \text{ при } i \ge j, \ \alpha \in (0,1).$$

$$e_{ij}^* = \alpha e_{ij} + (1 - \alpha) \le e_{ij} \ \text{ при } e_{ij} \ge 1 \text{ та } e_{ij}^* \ge e_{ij} \ \text{ при } 0 < e_{ij} \le 1. \quad (2)$$

$$e_{ji}^* = (\alpha e_{ij} + (1 - \alpha))^{-1} \ge e_{ij} \ \text{ при } 0 < e_{ij} \le 1 \text{ та } e_{ij}^* \le e_{ij} \ \text{ при } e_{ij} \ge 1. \quad (3)$$

Тому $GCI^* - GCI = b \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \ln(e_{ij}^* / e_{ij}) \ln(e_{ij} / e_{ji}^*) \le 0.$

Нерівності (2) та (3) перетворюються на рівності, коли $e_{ij} = 1$ $\forall i, j = 1, \ldots, n,$ тобто коли $D_{n \times n}$ узгоджена.

Покажемо, що твердження справджується за показником HCI. Треба довести, що $\sum_{j=1}^{n} (s_j)^{-1} - \sum_{j=1}^{n} (s_j^*)^{-1} \le 0$ (див. доведення твердження 6), де

$$s_j^* = \sum_{i=1}^{j-1} (\alpha d_{ij} + (1 - \alpha) w_i / w_j) + \sum_{i=j}^{n} (\alpha d_{ji} + (1 - \alpha) w_j / w_i)^{-1}.$$

Для цього використаємо допоміжну нерівність $(\alpha d_{ij}+(1-\alpha)w_j/w_i)^{-1}\le$ $\le \alpha d_{ij}+(1-\alpha)w_i/w_j$, яка доводиться з урахуванням того, що $x+1/x\ge 2$ при $x>0$, де $x=d_{ij}w_j/w_i$. Тоді

$$s_j^* \le \sum\nolimits_{i=1}^{j-1}(\alpha d_{ij}+(1-\alpha)w_i/w_j)+\sum\nolimits_{i=j}^{n}(\alpha d_{ij}+(1-\alpha)w_i/w_j)=$$

$$=\sum\nolimits_{i=1}^{n}(\alpha d_{ij}+(1-\alpha)w_i/w_j)=s_j(\alpha+(1-\alpha)\sum\nolimits_{i=1}^{n}(s_i)^{-1})\le s_j,$$

оскільки $\alpha+(1-\alpha)\sum\nolimits_{i=1}^{n}(s_i)^{-1}\le 1$ (доведення нерівності $\sum\nolimits_{i=1}^{n}(s_i)^{-1}\le 1$ можна знайти в [1]). Таким чином, $HCI^*\le HCI$.

$HCI^*=HCI$, виконується коли $x+1/x=2 \Leftrightarrow x=d_{ij}w_j/w_i=1$ та $\sum\nolimits_{i=1}^{n}(s_i)^{-1}=1$. $d_{ij}=w_i/w_j$ при $\forall i,j=1,...,n$, коли $D_{n\times n}$ узгоджена. Рівність $\sum\nolimits_{i=1}^{n}(s_i)^{-1}=1$ також виконується тоді й тільки тоді, коли $D_{n\times n}$ узгоджена [1].

Покажемо, що твердження справджується за показником CI^{tr}. Треба показати, що $CI^{\text{tr}}-CI^{\text{tr}^*}(\alpha)\ge 0$, де $CI^{tr}=\dfrac{d_{ij}d_{jk}}{d_{ik}}+\dfrac{d_{ik}}{d_{ij}d_{jk}}-2$, $CI^{tr*}(\alpha)=$ $=\dfrac{d_{ij}^*(\alpha)d_{jk}^*(\alpha)}{d_{ik}^*(\alpha)}+\dfrac{d_{ik}^*(\alpha)}{d_{ij}^*(\alpha)d_{jk}^*(\alpha)}-2$ (п.3 доведення твердження 6), елемент скоригованої МПП $d_{ij}^*(\alpha)=\alpha d_{ij}+(1-\alpha)\left(\dfrac{w_i}{w_j}\right)$, якщо $i<j$, $\alpha\in(0,1)$.

Використаємо метод AN розрахунку ваг: $w_i=(\sum\nolimits_k d_{ki})^{-1}$.

Введемо наступні позначення: $x(\alpha)=\dfrac{d_{ij}^*(\alpha)d_{jk}^*(\alpha)}{d_{ik}^*(\alpha)}$, $y=\dfrac{d_{ij}d_{jk}}{d_{ik}}$ та розглянемо функцію $x=x(\alpha)$, $\alpha\in(0,1)$. Ця функція монотонно зростає при $y\ge 1$, монотонно спадає при $y\le 1$ та $x(\alpha=0)=1$, $x(\alpha=1)=y$.

Легко показати, що нерівність $CI^{tr}-CI^{tr*}(\alpha)<0$ не справджується для жодних пар (y,x), оскільки не виконується ні одна з систем нерівностей:

$$\begin{cases}y\ge 1,\\ x<y,\\ x<1/y\end{cases}\vee\begin{cases}y\ge 1,\\ x>y,\\ x>1/y\end{cases}\vee\begin{cases}y<1,\\ x<y,\\ x<1/y\end{cases}\vee\begin{cases}y<1,\\ x>y,\\ x>1/y,\end{cases}$$

отриманих у результаті розв'язання нерівності $CI^{tr}-CI^{tr*}(\alpha)<0$.

Розв'язком нерівності $CI^{tr}-CI^{tr*}(\alpha)\ge 0$, яку потрібно довести, є:

$$\begin{cases}y\ge 1,\\ x\ge y,\\ x\le 1/y\end{cases}\vee\begin{cases}y\ge 1,\\ x\le y,\\ x\ge 1/y\end{cases}\vee\begin{cases}y<1,\\ x\ge y,\\ x\le 1/y\end{cases}\vee\begin{cases}y<1,\\ x\le y,\\ x\ge 1/y,\end{cases}$$

де друга і третя з цих чотирьох умов виконуються.

Твердження 7 доведено. ■

2. Знаходження найбільш неузгодженого / помилкового елементу в МПП

Розглянемо метод пошуку найбільш неузгоджених та помилкових елементів МПП (викидів). У [13] метод пошуку викидів у МПП використовує лише індекс узгодженості CI. У цій роботі використовується множина різних показників узгодженості (ПУ). Метод базується на твердженнях 1–5, згідно з якими на узгоджених МПП ПУ CI, GCI, HCI та CI^{tr} приймають свої мінімальні значення, а спектральний коефіцієнт узгодженості k_y — своє максимальне значення. Метод складається з наступних етапів:

1. Розрахунок МПП $D^i_{(n-1)\times(n-1)}$, отриманої виключенням i-го рядка та i-го стовпчика початкової МПП $D_{n\times n}$ та показника узгодженості $ПУ(D^i_{(n-1)\times(n-1)})$, $\forall i=1,...,n.$

2. Знаходження двох найменших значень показників узгодженості: $i^* = \arg\min\limits_{i=1,...,n} ПУ(D^i_{(n-1)\times(n-1)})$, $j^* = \arg\min\limits_{i=1,...,n,\, i\neq i^*} ПУ(D^i_{(n-1)\times(n-1)})$, тоді елемент $d_{i^* j^*}$ — найбільш неузгоджений/помилковий за ПУ CR, GCI, HCR та CI^{tr}. Знаходження двох найбільших значень показників узгодженості: $i^* = \arg\max\limits_{i=1,...,n} k_y(D^i_{(n-1)\times(n-1)})$, $j^* = \arg\max\limits_{i=1,...,n,\, i\neq i^*} k_y(D^i_{(n-1)\times(n-1)})$, тоді елемент $d_{i^* j^*}$ — найбільш неузгоджений (помилковий) за спектральним показником k_y.

Слід зазначити, що для збереження властивості оберненої симетричності МПП, після зміни елемента $d_{i^* j^*}$ зміні підлягає також обернено симетричний йому елемент $d_{j^* i^*}$.

3. Коригування найбільш неузгодженого / помилкового елементу МПП без участі експерта

Розглянемо $D_{n\times n} = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$ — слабо неузгоджена МПП, для якої відомо, що її елемент $d_{i^* j^*}$ — викид і потребує коригування. Метод коригування викиду в цій МПП без участі експерта складається з етапів:

- Знаходження множини транзитивностей $\Gamma = \{\Gamma_k, k = 1,...,n\}$, що включають $d_{i^* j^*}$: $\Gamma_k = \{d_{i^* k}, d_{kj^*}, d_{i^* j^*}\}$.
- Розрахунок множини значень-кандидатів для $d_{i^* j^*}$ за знайденими транзитивностями: $Z = \{z_k = d_{i^* k} d_{kj^*}, k = 1,...,n\}$ та множини допоміжних скоригованих МПП $\{D^{\mathrm{cor}}_k = (d^{\mathrm{cor}\ k}_{ij})\}$, де $d^{\mathrm{cor}\ k}_{ij} = d_{ij}$, якщо $i \neq i^*, j \neq j^*$ та $d^{\mathrm{cor}\ k}_{i^* j^*} = z_k$.

- Вибір із множини значень-кандидатів Z значення z_{k^*}, яке забезпечує найкращу узгодженість скоригованої МПП:

$$k^* = \arg\min_{k=1,...,n} ПУ(D_k^{\text{cor}}) \text{ за ПУ } CI, GCI, HCI \text{ та } CI^{\text{tr}},$$

$$k^* = \arg\max_{k=1,...,n} k_y(D_k^{\text{cor}}) \text{ за спектральним показником } k_y.$$

- Скориговане значення для заданого $d_{i^* j^*} = z_{k^*}$.

4. Відновлення ваг альтернатив рішень із МПП

Виконано етапи оцінювання узгодженості та коригування узгодженості МПП і маємо $D_{n\times n} = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$ — допустимо неузгоджену МПП альтернатив рішень за якісним критерієм. Для розрахунку вектора ваг $w \in R_+^n$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ альтернатив рішень існують декілька методів [1], які призводять до однакового вектору ваг, якщо МПП узгоджена:

- головного власного вектору, згідно з яким вектор ненормованих ваг v — розв'язок рівняння $Dv = \lambda_{\max} v$, нормовані ваги $w_i = v_i / \sum_{j=1}^n v_j$;
- геометричної середньої, згідно з яким $v_i = (\prod_{j=1}^n d_{ij})^{1/n}$; $w_i = v_i / \sum_{j=1}^n v_j$,
- арифметичної нормалізації, згідно з яким $v_i = (\sum_{j=1}^n d_{ji})^{-1}$, $w_i = v_i / \sum_{j=1}^n v_j$.

ЗАКЛЮЧЕННЯ

У роботі наведено запропонований метод розрахунку ваг альтернатив рішень за якісним критерієм, який складається з етапів оцінювання та коректного коригування узгодженості МПП залежно від її властивостей та етапу відновлення ваг із МПП.

Сформульовано та доведено твердження про мультиплікативне та адитивне коригування МПП без участі експерта, коли для вимірювання узгодженості використовуються декілька показників. Ці твердження показують, що після вказаних коригувань покращується узгодженість не лише за показником CI, а й за показниками GCI, HCI та CI^{tr}. Мультиплікативне та адитивне коригування слід використовувати для слабо узгоджених МПП.

Сформульовано методи пошуку найбільш неузгоджених та помилкових елементів МПП (викидів) за множиною показників узгодженості та коригування викидів без участі експерта. Ці методи слід використовувати, якщо МПП не має властивості слабої узгодженості.

Застосування відомих методів підвищення узгодженості зі зворотнім зв'язком з експертом не завжди можливе. У цій роботі методи дозволяють коригувати МПП залежно від її властивостей без участі експерта і, як наслідок, економити фінансові та часові ресурси.

Метод та алгоритм, що розроблені в роботі, призначені для використання в системах підтримки прийняття рішень при розв'язанні задач вибору, розподілу ресурсів, оцінювання альтернатив рішень за множиною кількісних та якісних критеріїв, оцінювання сценаріїв розвитку, в задачах планування та технологічного передбачення.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І.* Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування: Навчальний посібник. — К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2010. — 371 с.
2. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.: Радио и связь, 1993. — 320 с.
3. *Саати Т.Л.* Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. Изд. 2-е. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 360 с.
4. *Ногин В.Д.* Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2004. — **44**, № 7. — С. 1261–1270.
5. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. — К.: Наукова думка, 2002. — 381 с.
6. *Macharis C., Springael J., Brucker K.D., Verbeke A.* PROMETHEE and AHP: The design of operational synergies in multicriteria analysis. Strenhthening PROMETHEE with ideas of AHP // European Journal of Operational Research. — 2004. — **153**, № 2. — P. 307–317.
7. *Дэвид Г.* Метод парных сравнений. — М.: Статистика, 1978. — 144 с.
8. *Ларичев О.И., Мошкович Е.М.* Качественные методы принятия решений. — М.: Наука, 1996. — 208 с.
9. *Орлов А.И.* Нечисловая статистика. — М.: МЗ-Пресс, 2004. — 513 с.
10. *Жиляков Е.Г.* Адаптивное определение относительных важностей объектов на основе качественных парных сравнений // Экономика и математические методы. — 2006. — **42**, № 2. — С. 111–122.
11. *Xu Z., Da Q.* An approach to Improving Consistency of Fuzzy Preference Matrix // Fuzzy Optimization and Decision Making. — 2003. — **2**, № 1. — P. 3–12.
12. *Тоценко В.Г.* Групповые ранжирования с обратной связью с экспертнами и учетом их компетентности // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 5. — С. 92–99.
13. *Lipovetsky S.,Conklin W.M.* Robust estimation of priorities in the AHP // European Journal of Operational Research. — 2002. — **137**, № 1. — P.110–122.
14. *Peláez J.I., Lamata M.T.* A New Measure of Consistency for Positive Reciprocal Matrices // Computers and Mathematics with Applications. — 2003. — **46**. — P. 1839–1845.

Надійшла 07.03.2013