УДК 519.6

# ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ И РЯДЫ ТЕЙЛОРА С НЕЧЕТКИМ АРГУМЕНТОМ

**И.Я. СПЕКТОРСКИЙ**

Основным объектом рассмотрения являются функциональные последовательности $f_n(A)$ с нечетким числом $A$ в качестве аргумента; предполагается сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$ равномерно на каждом интервале внутри $\operatorname{supp} A$. Также предполагается, что уравнение $f(x) = y$ относительно $x$ имеет конечное число решений для каждого $y$ на каждом интервале внутри $\operatorname{supp} A$. Предложены достаточные условия сходимости $f_n(A)$ в смысле поточечной сходимости последовательности функций принадлежности $\mu_{f_n(A)}(y)$: доказана сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{f_n(A)}(y) = \mu_{f(A)}(y)$ в точках $y \in \mathbb{R}$, кроме таких $y = f(x)$, что $x$ — точка разрыва $\mu_A(x)$, либо $f'(x) = 0$. Как частный случай последовательности $f_n(A)$, рассмотрено обобщение конструкции ряда Тейлора $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$ для аналитической функции $f(x)$ на случай нечеткого аргумента $x = A$. Сходимость ряда рассматривается в смысле поточечной сходимости последовательности функций принадлежности частичных сумм $\mu_{S_n(A)}(y)$, где $S_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$.

## ВВЕДЕНИЕ

Нечеткие числа как частный случай нечетких множеств представляют мощное средство математического моделирования в условиях неполной информации об исходных объектах [1].

Принцип обобщения, сформулированный Л.А. Заде для произвольных нечетких множеств [1–6], позволяет определить действие произвольной числовой функции конечного числа аргументов на нечеткие числа. В частности, на случай нечетких чисел можно обобщить стандартные арифметические операции «+», «·», «–» и «/».

Особый интерес в настоящее время представляют выпуклые нечеткие числа (см., напр., [3, 4]), которые во многих случаях наиболее точно соответствуют классическому действительному числу. С другой стороны, нечеткие числа легче анализировать благодаря простой структуре множеств уровня. Наконец, класс выпуклых нечетких чисел замкнут относительно непрерывных функций конечного числа аргументов, в частности — относительно арифметических операций «+», «–» и «·».

Для нечетких чисел сохраняются законы коммутативности и ассоциативности операций «+» и «·», однако, в общем случае, не выполняется дистрибутивность «·» относительно «+» (подробнее об алгебраических свойствах нечетких числе [3, 4]).

Наличие ассоциативности «+» и «·» позволяет рассматривать степенные ряды с нечетким аргументом, трактуя сходимость конечных сумм ряда как сходимость последовательности функций принадлежности. В частности, можно говорить о рядах Тейлора с нечетким аргументом, и о сходимости такого ряда (в определенном смысле) к значению исходной функции над заданным нечетким аргументом. Так, в работе [6] рассматриваются ряды Тейлора с нечетким аргументом с компактным носителем. Сходимость таких рядов в работе [6] трактуется в смысле сходимости множеств уровня функций принадлежности частичных сумм по метрике Хаусдорфа. Однако анализ поточечной сходимости последовательности функций принадлежности в ряде случаев может оказаться существенно проще, чем анализ сходимости соответствующих множеств уровня по метрике Хаусдорфа.

**Цель работы —** представить достаточные условия сходимости последовательности функций с нечетким аргументом в смысле поточечной сходимости последовательности функций принадлежности и применить полученный результат к сходимости частичных сумм ряда Тейлора с нечетким аргументом.

В п. 1 и 2 данной работы приведены в основном известные сведения из теории нечетких чисел, необходимые для изложения основного результата. В п. 3 анализируется возможность предельного перехода в последовательности отображений с нечетким аргументом. В п. 4 рассмотрена сходимость рядов Тейлора с нечетким аргументом в смысле поточечной сходимости последовательности функций принадлежности частичных сумм.

## 1. ПОНЯТИЕ НЕЧЕТКОГО ЧИСЛА. ВЫПУКЛЫЕ НЕЧЕТКИЕ ЧИСЛА

Нечеткое число *A* является частным случаем нечеткого множества и определяется своей *функцией принадлежности* $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$. *Носителем* нечеткого числа *A* называют множество $\operatorname{supp} A = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}$. Для заданного $\alpha \in (0;1]$ рассматривают множество уровня $[A]_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \alpha\}$. Очевидно соотношение $\operatorname{supp} A = \bigcup_{\alpha > 0} [A]_\alpha$. Легко понять, что совокупность множеств уровня однозначно определяет функцию принадлежности $\mu_A$ (а значит, и само нечеткое число *A*), так как $\mu_A^{-1}(\alpha_0) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) = \alpha_0\} = [A]_{\alpha_0} \setminus \bigcup_{\alpha > \alpha_0} [A]_\alpha$ для всех $0 < \alpha_0 \leq 1$.

**Замечание 1.** Представление нечеткого числа через множества уровня описывает классическая теорема о декомпозиции [3, 6].

Нечеткое число *A* называют *выпуклым*, если $\mu_A(y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(z))$ для любых $x \leq y \leq z$. Заметим, что выпуклость нечеткого числа не означает выпуклости функции принадлежности (в смысле классического определения выпуклости функций, используемого в анализе).

**Пример 1.** На рис. 1 изображена функция принадлежности выпуклого нечеткого числа *A*. При этом $\mu_A(x)$, очевидно, невыпукла.

Нечеткое число $A$ называют *нормальным*, если $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \mu_A(x) = 1$. Так, нечеткое число $A$ из предыдущего примера (рис. 1) является нормальным. Также нормально нечеткое число с функцией принадлежности $\mu(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R})$, однако нечеткое число с функцией принадлежности $\mu(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ не является нормальным. Заметим, что нормальность и выпуклость иногда требуют при определении нечеткого числа (см., напр., [6]).

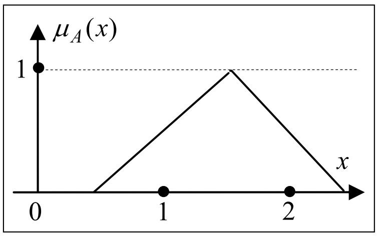


*Рис. 1*. Выпуклое нечеткое число с невыпуклой функцией принадлежности

Выпуклость нечеткого числа непосредственно связана с выпуклостью множеств уровня.

**Лемма 1.** Нечеткое число $A$ является выпуклым тогда и только тогда, когда выпуклы все его множества уровня $[A]_\alpha$ $(\alpha \in (0;1])$.

**Доказательство.**

1. Пусть $A$ выпукло. Тогда для заданного уровня $\alpha \in (0;1]$, заданных чисел $x \le z$ $(x, z \in [A]_\alpha)$ и заданного $y \in [x, z]$ имеем:

$$\mu_A(y) \ge \min(\mu_A(x), \mu_A(z)) \ge \alpha .$$

Таким образом $y \in [A]_\alpha$, что означает выпуклость множества $[A]_\alpha$.

2. Пусть все множества уровня $[A]_\alpha$ $(\alpha \in (0;1])$ выпуклы. Зафиксируем произвольные $x \le y \le z$ и введем $\alpha = \min(\mu_A(x), \mu_A(z))$. Очевидно, что $x \in [A]_\alpha$, $z \in [A]_\alpha$, и, в силу выпуклости множества $[A]_\alpha$, имеем $y \in [A]_\alpha$. Таким образом, $\mu_A(y) \ge \alpha = \min(\mu_A(x), \mu_A(z))$, что означает выпуклость нечеткого числа $A$.

Утверждение леммы полностью доказано. □

Важный класс представляют нечеткие числа с полунепрерывной сверху функцией принадлежности, где под непрерывностью и полунепрерывностью сверху здесь и далее будет подразумеваться непрерывность (полунепрерывность сверху) на $\mathbb{R}$. Полунепрерывность функции $\mu_A$, которая определяется условием

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x\right) \Rightarrow \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu_A(x_n) \le \mu_A(x)\right), \tag{1}$$

можно охарактеризовать в терминах множеств уровня нечеткого числа $A$.

**Лемма 2.** Функция принадлежности нечеткого числа $A$ полунепрерывна сверху тогда и только тогда, когда все множества уровня $[A]_\alpha$ $(\alpha \in (0;1])$ замкнуты.

Утверждение доказано, например в [7] (в эквивалентной формулировке).

**Следствие.** Пусть функция принадлежности нечеткого числа $A$ полунепрерывна сверху. Тогда компактность множества уровня $[A]_\alpha$ при $0 < \alpha \le 1$ эквивалентна ограниченности $[A]_\alpha$.

**Пример 2.** На рис. 2 изображена функция принадлежности выпуклого нечеткого числа $A$. Очевидно, $\mu_A(x)$ полунепрерывна сверху, и все множества уровня нечеткого числа $A$ замкнуты. Так, множество $[A]_{0,4} = [1,5;\infty)$ замкнуто.

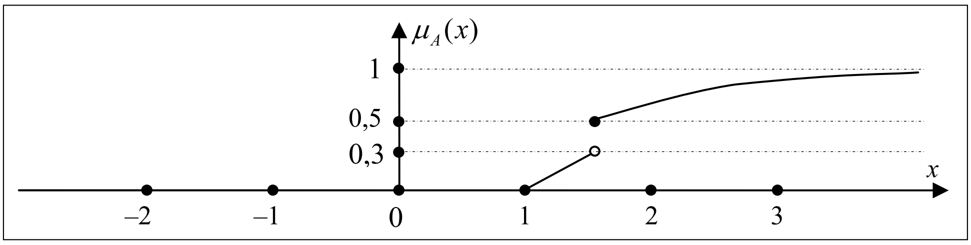


*Рис. 2*. Нечеткое число с полунепрерывной сверху функцией принадлежности

**Пример 3.** Рассмотрим нечеткое число $A$ с функцией принадлежности $\mu_A(x) = e^{-x^2}$. Функция $\mu_A(x)$ полунепрерывна сверху (и даже непрерывна), множества уровня $[A]_\alpha$ ограничены и, в силу следствия из леммы 2, компактны при любом $0 < \alpha \le 1$. Отметим, что носитель $\operatorname{supp} A = \mathbb{R}$ при этом неограничен.

Заметим, что при определении нечеткого числа, наряду с нормальностью и выпуклостью, иногда требуют полунепрерывность сверху для функции принадлежности (см., напр., [6]).

## 2. ОТОБРАЖЕНИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ. СОХРАНЕНИЕ ВЫПУКЛОСТИ

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — произвольная функция с областью определения $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, где символы «$\subset$» и «$\supset$» здесь и далее будут допускать равенство множеств. В соответствии с принципом обобщения Заде [1–6], образ набора нечетких чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$ при отображении $f$ определяется как нечеткое число $B = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) =$$
$$\begin{cases} \sup\limits_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\in D_f: \\ f(x_1,\ldots,x_n)=y}} \min(\mu_{A_1}(x_1),\ldots,\mu_{A_n}(x_n)), & \text{если } \exists (x_1,\ldots,x_n)\in D_f : f(x_1,\ldots,x_n) = y; \\ 0, & \text{если } \forall (x_1,\ldots,x_n)\in D_f : f(x_1,\ldots,x_n) \ne y. \end{cases} \tag{2}$$

**Пример 4.** Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x$. Тогда, в соответствии с (2), для произвольного нечеткого числа $A$ получаем функцию принадлежности для нечеткого числа $-A$: $\mu_{-A}(y) = \mu_A(-y)$ $(y \in \mathbb{R})$.

**Пример 5.** Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Тогда, в соответствии с (2), для произвольного нечеткого числа $A$ получаем функцию принадлежности для нечеткого числа $A^2$: $\mu_{A^2}(y) = \begin{cases} \max(\mu_A(\sqrt{y}), \mu_A(-\sqrt{y})), & y \ge 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$

**Пример 6.** Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$. Тогда, в соответствии с (2), для произвольного нечеткого числа $A$ получаем функцию $\mu_{\sin A}$:

$$\mu_{\sin A}(y)=\begin{cases}\sup\{\mu_A(\arcsin y+2\pi k),\mu_A(\pi-y+2\pi m):k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}\} & |y|\le 1;\\ 0, & |y|>1.\end{cases}$$

**Пример 7.** Пусть $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x_1,x_2)=x_1+x_2$. Тогда, в соответствии с (2), для произвольных нечетких чисел $A_1, A_2$ получаем функцию принадлежности для нечеткого числа

$$A_1+A_2:\ \mu_{A_1+A_2}(y)=\sup_{\substack{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\\ x_1+x_2=y}}\min(\mu_{A_1}(x_1),\mu_{A_2}(x_2)).$$

Из примеров 4–7 видно, что при использовании равенства (2) необходимо решать уравнение $f(x_1,\ldots,x_n)=y$ для каждого $y\in\mathbb{R}$. Если это уравнение имеет небольшое число решений (примеры 4 и 5), то равенство (2) немедленно дает значение $\mu_B(y)$. Но прямое использование равенства (2) весьма проблематично, если уравнение $f(x_1,\ldots,x_n)=y$ имеет бесконечно много решений (примеры 6 и 7), что особенно типично при $n\ge 2$ (пример 7). Приводимая ниже теорема 1 (с предварительной технической леммой) позволяет вычислять множества уровня нечеткого числа $B$ непосредственно по множествам уровня $A_1,A_2,...,A_n$, минуя прямое использование равенства (2).

**Лемма 3.** Пусть все множества уровня нечетких чисел $A_1,A_2,...,A_n$ компактны, и функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Тогда равенство (2) можно записать в виде

$$\mu_B(y)=$$

$$=\begin{cases}\max\limits_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\\ f(x_1,\ldots,x_n)=y}}\min(\mu_{A_1}(x_1),\ldots,\mu_{A_n}(x_n)), & \text{если } \exists(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n: f(x_1,\ldots,x_n)=y;\\ 0, & \text{если } \forall(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n: f(x_1,\ldots,x_n)\ne y.\end{cases} \tag{3}$$

**Доказательство.** Необходимо доказать, что супремум в правой части равенства (2) достигается, и поэтому может быть заменен на максимум.

Пусть $\min(\mu_{A_1}(x_1),\ldots,\mu_{A_n}(x_n))=0$ для любого набора $(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, такого, что $f(x_1,\ldots,x_n)=y$. Тогда $\mu_B(y)=0$ и утверждение леммы справедливо. Аналогично, если $f(x_1,\ldots,x_n)\ne y$ для любого набора $(x_1,\ldots,x_n)\in$ $\in\mathbb{R}^n$, также имеем $\mu_B(y)=0$ и утверждение леммы справедливо.

Наконец, пусть $\min(\mu_{A_1}(x_1),\ldots,\mu_{A_n}(x_n))=\alpha>0$ и $f(x_1,\ldots,x_n)=y$ для некоторого набора $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Тогда равенство (2) можно записать в виде

$$\mu_B(y)=\sup_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\in([A_1]_\alpha\times[A_2]_\alpha\times\cdots\times[A_n]_\alpha):\\ f(x_1,\ldots,x_n)=y}}\min(\mu_{A_1}(x_1),\ldots,\mu_{A_n}(x_n)).$$

Поскольку множество $[A_1]_\alpha \times [A_2]_\alpha \times \dots \times [A_n]_\alpha$ компактно в $\mathbb{R}^n$, а множество $f^{-1}(y) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) = y\}$ замкнуто в силу непрерывности *f*, получаем ограниченность и замкнутость (а значит в силу конечномерности $\mathbb{R}^n$ и компактности) множества $([A_1]_\alpha \times [A_2]_\alpha \times \dots \times [A_n]_\alpha) \cap f^{-1}(y)$. Наконец, функция $\min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n))$ полунепрерывна сверху на $\mathbb{R}^n$ и, в силу аналога теоремы Вейерштрасса (см. [7]), достигает максимума на компакте $([A_1]_\alpha \times [A_2]_\alpha \times \dots \times [A_n]_\alpha) \cap f^{-1}(y)$. □

**Теорема 1.** Пусть все множества уровня нечетких чисел $A_1, A_2, \dots, A_n$ компактны, и функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждого $0 < \alpha \le 1$ множество уровня $[B]_\alpha$ равно образу множеств уровня $[A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \dots, [A_n]_\alpha$:

$$[B]_\alpha = f([A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \dots, [A_n]_\alpha) = \{f(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in$$
$$\in ([A_1]_\alpha \times [A_2]_\alpha \times \dots \times [A_n]_\alpha)\}.$$

**Доказательство.**

Зафиксируем $0 < \alpha \le 1$. Так как условия леммы 3 выполнены, можем воспользовавшись равенством (3), записать эквивалентность

$$(y \in [B]_\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left( \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) = y; \\ \mu_{A_1}(x_1) \ge \alpha; \\ \vdots \\ \mu_{A_n}(x_n) \ge \alpha. \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left( y \in f([A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \dots, [A_n]_\alpha) \right),$$

что доказывает утверждение теоремы. □

**Пример 8.** Рассмотрим нечеткие числа $A_1$ и $A_2$ с функциями принадлежности

$$\mu_{A_1}(x_1) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x_1 - a_1|}{\delta_1}, & |x_1 - a_1| \le \delta_1; \\ 0, & |x_1 - a_1| > \delta_1, \end{cases}$$

$$\mu_{A_2}(x_2) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x_2 - a_2|}{\delta_2}, & |x_2 - a_2| \le \delta_2; \\ 0, & |x_2 - a_2| > \delta_2, \end{cases}$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $\delta_i > 0$ $(i \in \{1; 2\})$. Поскольку все множества уровня $A_1$ и $A_2$ компактны, а отображение $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ является непрерывным на $\mathbb{R}^2$, для вычисления множеств уровня нечеткого числа $B = A_1 + A_2$ можем использовать теорему 1. Для $A_1$ и $A_2$ имеем $[A_i]_\alpha = [a_i - \alpha\delta_i; a_i + \alpha\delta_i]$ $(i \in \{1; 2\})$, и для *B* получаем:

$$[B]_\alpha = [A_1]_\alpha + [A_2]_\alpha = [a_1 + a_2 - (\delta_1 + \delta_2)\alpha; a_1 + a_2 + (\delta_1 + \delta_2)\alpha],$$

где $0<\alpha\le 1$. Теперь по виду $[B]_\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$ легко определить функцию принадлежности нечеткого числа $B=A_1+A_2$:

$$\mu_{A_1+A_2}(y)=\begin{cases}1-\dfrac{|y-(a_1+a_2)|}{\delta_1+\delta_2}, & |y-(a_1+a_2)|\le\delta_1+\delta_2;\\ 0, & |y-(a_1+a_2)|>\delta_1+\delta_2.\end{cases}$$

Графики функций $\mu_{A_1}$, $\mu_{A_2}$ и $\mu_B$ изображены на рис. 3.

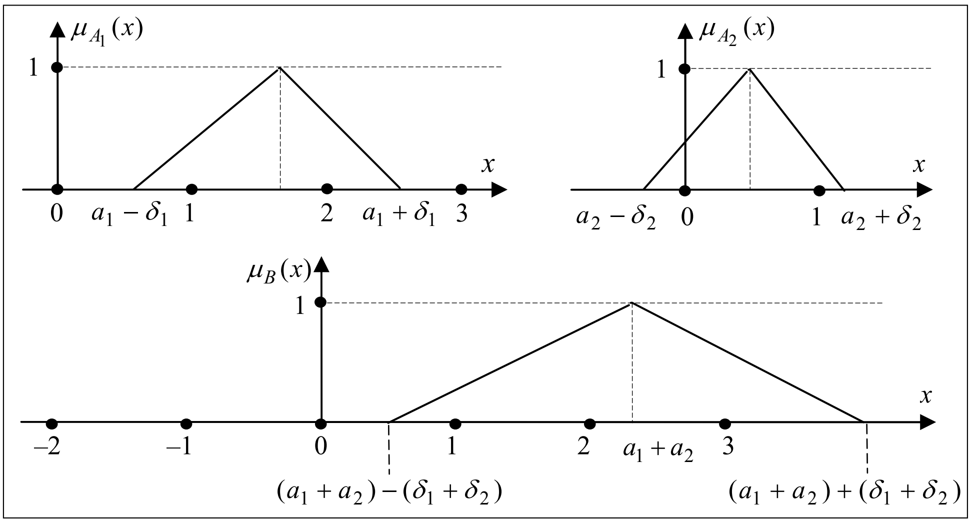


*Рис. 3*. Нечеткие числа $A_1$, $A_2$ и $B=A_1+A_2$: условия теоремы 1 выполнены

**Пример 9.** Рассмотрим нечеткие числа $A_1$ и $A_2$ с функциями принадлежности

$$\mu_{A_1}(x_1)=\begin{cases}\dfrac{x_1}{x_1+1}, & x_1\ge 0;\\ 0, & x_1<0,\end{cases}\qquad \mu_{A_2}(x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_{21}}{x_2-1}, & x_2\le 0;\\ 0, & x_2>0,\end{cases}$$

соответствующие графики схематически изображены на рис. 4.

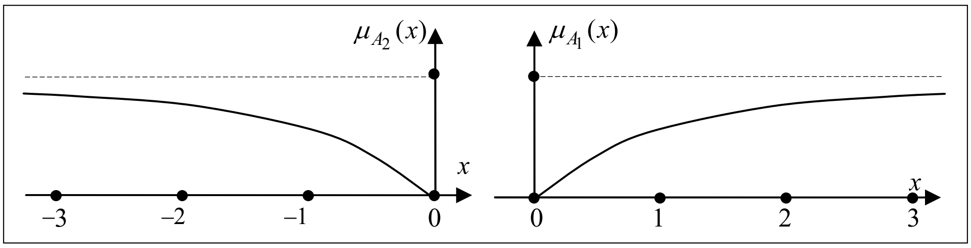


*Рис. 4*. Нечеткие числа $A_1$ и $A_2$: условия теоремы 1 не выполнены

Поскольку множества уровня нечетких чисел $A_1$ и $A_2$ неограничены (а значит, и некомпактны), условия теоремы 1 (как и леммы 3) не выполнены. Применяя формулу 2 (см. также пример 7), получаем:

$$\mu_{A_1+A_2}(y)=\sup_{\substack{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\\ x_1+x_2=y}}\min(\mu_{A_1}(x_1),\mu_{A_2}(x_2))=\sup_{x\ge\max(0,y)}\min\left(\frac{x}{x+1},\frac{y-x}{y-x-1}\right)=1$$

для всех $y \in \mathbb{R}$. Заметим, что равенство, $[A_1 + A_2]_\alpha = [A_1]_\alpha + [A_2]_\alpha$, постулируемое теоремой 1, выполняется для всех $\alpha \in (0;1)$, однако не выполняется для $\alpha = 1$: $[A_1 + A_2]_1 = \mathbb{R}$, $[A_1]_1 + [A_2]_1 = \varnothing$.

Важным фактом является сохранение свойств выпуклости для нечетких чисел и полунепрерывности сверху для их функций принадлежности при непрерывном отображении нечетких чисел. Докажем соответствующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные нечеткие числа, функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathsf{R}^n$ и $B = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Тогда:

- если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выпуклы, то нечеткое число *B* также выпукло;
- если $\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \ldots, \mu_{A_n}$ полунепрерывны сверху и все множества уровня $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ограничены, то $\mu_B$ также полунепрерывна сверху.

**Доказательство.**

1. Пусть нечеткие числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выпуклы. Для доказательства выпуклости *B*, в силу леммы 1, достаточно доказать выпуклость $[B]_\alpha$ для произвольного $0 < \alpha \le 1$. Пусть $c \in [B]_\alpha$, $d \in [B]_\alpha$. Согласно равенству 2, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $a_1 \in [A_1]_{\alpha-\varepsilon}$, $a_2 \in [A_2]_{\alpha-\varepsilon}, \ldots, a_n \in [A_n]_{\alpha-\varepsilon}$ и $b_1 \in [A_1]_{\alpha-\varepsilon}, b_2 \in [A_2]_{\alpha-\varepsilon}, \ldots, b_n \in [A_n]_{\alpha-\varepsilon}$, что $f(a_1, a_2, \ldots a_n) = c$, $f(b_1, b_2, \ldots b_n) = d$. В силу выпуклости $[A_1]_{\alpha-\varepsilon}$, $[A_2]_{\alpha-\varepsilon}, \ldots, [A_n]_{\alpha-\varepsilon}$ имеем: $(a_k + (b_k - a_k)\xi) \in [A_k]_{\alpha-\varepsilon}$ для любых $0 \le \xi \le 1$ и $1 \le k \le n$, и можем ввести ображение $\varphi : [0;1] \to [B]_{\alpha-\varepsilon}$, действующее по правилу $\varphi(\xi) = f(a_1 + (b_1 - a_1)\xi, \ldots, a_n + (b_n - a_n)\xi)$, где $0 \le \xi \le 1$. Поскольку $\varphi$ непрерывна, $\varphi(0) = c$, $\varphi(1) = d$, можем воспользоваться теоремой Коши о промежуточном значении: для любого $y \in [c;d]$ найдется такое $0 \le \xi_y \le 1$, что $\varphi(\xi_y) = y$, т.е. $y \in [B]_{\alpha-\varepsilon}$. Таким образом, $\mu_B(y) \ge \alpha - \varepsilon$, и, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, имеем $y \in [B]_\alpha$. Выпуклость $0 < \alpha \le 1$ $[B]_\alpha$ доказана для произвольного, что, в силу леммы 1, означает выпуклость *B*.

2. Пусть функции $\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \ldots, \mu_{A_n}$ полунепрерывны сверху. Тогда, в силу леммы 2, все множества уровня $[A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \ldots, [A_n]_\alpha$ замкнуты для любого $\alpha \in (0;1]$. По теореме 1, для произвольного $0 < \alpha \le 1$ имеем равенство $[B]_\alpha = f([A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \ldots, [A_n]_\alpha)$, откуда, в силу непрерывности *f* и компактности множеств $[A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \ldots, [A_n]_\alpha$, множество $[B]_\alpha$ также компактно (а значит и замкнуто). Таким образом, все множества уровня нечеткого числа *B* замкнуты, и, в силу леммы 2, функция $\mu_B$ полунепрерывна сверху.

Аналог теоремы 1 доказан в [6] для непрерывной унарной функции $f(x)$. Сохранение выпуклости при операциях «+», «–» и «·» доказано, например, в [3].

**Пример 10.** Рассмотрим нечеткое число *A* с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{\delta}, & |x| \le \delta; \\ 0, & |x| > \delta. \end{cases}$$

Непосредственно из равенства (2) (см. также пример 5) найдем функцию принадлежности числа $\mu_{A^2}(x)$:

$$\mu_{A^2}(x)=\begin{cases}1-\dfrac{\sqrt{x}}{\delta}, & 0\le x\le\delta^2;\\ 0, & x<0 \text{ или } x>\delta^2.\end{cases}$$

Графики функций принадлежности $\mu_A(x)$ и (схематично) $\mu_{A^2}(x)$ приведены на рис. 5.

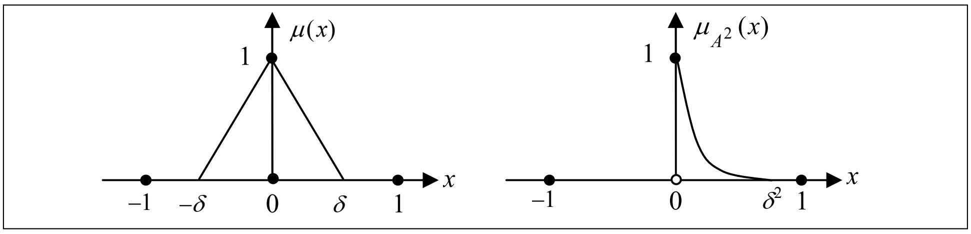


*Рис. 5*. Нечеткие числа $A$ и $A^2$

Отметим, что функция $\mu_{A^2}(x)$ полунепрерывна сверху, но не непрерывна, при непрерывной функции $\mu_A(x)$ и непрерывном отображении $f(x)=x^2$.

**Пример 11.** Рассмотрим нечеткое число $A$ с функцией принадлежности $\mu(x)=1$ ($x\in\mathbb{R}$). Тогда функция $\mu_{e^A}(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ не полунепрерывна сверху; теорема 2 неприменима, так как множества уровня нечеткого числа $A$ неограничены.

**Замечание 2.** Теоремы 1 и 2 легко обобщить на случай, когда функция $f$ непрерывна на множестве $\operatorname{supp}A_1\times\operatorname{supp}A_2\times\cdots\times\operatorname{supp}A_n$. Так, если нечеткие числа $A_1$ и $A_2$ выпуклы, и $0\notin\operatorname{supp}A_2$, то нечеткое число $\dfrac{A_1}{A_2}$ также выпукло.

**Замечание 3.** Очевидно, что свойство нормальности сохраняется при произвольном отображении: если нечеткие числа $A_1,A_2,\dots,A_n$ нормальны, и отображение $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ определено на $\mathbb{R}^n$, то $f(A_1,A_2,\dots,A_n)$ также нормально.

## 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Рассмотрим последовательность отображений $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ($n\ge 1$). Будем предполагать непрерывную дифференцируемость всех функций $f_n$ ($n\ge 1$) на $\mathbb{R}$. Также предполагаем существование пределов $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)=f'(x)$ для всех $x\in\mathbb{R}$, где $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — функция, непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}$. Для выпуклого нечеткого числа $A$ с полунепрерывной сверху функцией принадлежности и ограниченными множествами уровня получаем, в силу теоремы 2, последовательность выпуклых нечетких чисел $A_n$ $(n \geq 1)$, функции принадлежности которых полунепрерывны сверху. Для исследования предельного поведения последовательности функций $\mu_{A_n}$ $(n \geq 1)$ нам понадобится техническая лемма.

**Лемма 4.** Пусть $a < b$, сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ равномерны на $x \in [a;b]$, и существует такое $\delta > 0$, что $|f'(x)| \geq \delta$ для всех $x \in [a;b]$. Тогда для некоторого $N \geq 1$ множество $Y = \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} f_n([a;b])$ содержит некоторую окрестность точки $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, и существует последовательность обратных функций $f_n^{-1} : Y \to [a;b]$ $(n \geq 1)$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ для всех $y \in Y$.

**Доказательство.** Будем предполагать, что $f'(x) \geq \delta > 0$ (случай $f'(x) \leq -\delta < 0$ симметричен и анализируется аналогично). В этом случае $f(b) - f(a) \geq (b-a)\delta$ и, как следует из теоремы Коши о промежуточном значении, $f([a;b]) = [f(a); f(b)]$. В силу равномерной на $[a;b]$ сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ найдется такое $N_1$, что $f_n'(x) \geq \frac{1}{2}\delta$ и $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{3}(b-a)\delta$ для всех $x \in [a;b]$ и $n \geq N_1$. Таким образом, при $n \geq N_1$ имеем:

$$[f_n(a); f_n(b)] \supset [f(a) + \frac{1}{3}(b-a)\delta; f(b) - \frac{1}{3}(b-a)\delta],$$

$$(f(b) - \frac{1}{3}(b-a)\delta) - (f(a) + \frac{1}{3}(b-a)\delta) \geq \frac{1}{3}(b-a)\delta > 0,$$

т.е. $Y \supset [f(a) + \dfrac{1}{3}(b-a)\delta; f(b) - \dfrac{1}{3}(b-a)\delta]$. Кроме того, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - f(a) \geq \dfrac{1}{2}(b-a)\delta$, $f(b) - f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \dfrac{1}{2}(b-a)\delta$, т.е. $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \in [f(a) + \dfrac{1}{3}(b-a)\delta; f(b) - \dfrac{1}{3}(b-a)\delta] \subset Y$.

Существование функций $f_n^{-1} : Y \to [a;b]$ $(n \geq 1)$ следует из теоремы об обратной функции. Зафиксировав $\varepsilon > 0$, выберем $N \geq N_1$ так, чтобы при всех $n \geq N$ и $x \in [a;b]$ выполнялись неравенства $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2 + \dfrac{4}{\delta^2}}$.

Теперь для любых $y_0 \in Y$ и $n \geq N$, введя $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $x_n = f_n^{-1}(y_0)$ и $y_n = f_n(x_0)$, получаем:

$$\left|f_n^{-1}(y_0)-f^{-1}(y_0)\right|=\left|(x_n,y_0)-(x_0,y_0)+(x_0,y_n)-(x_0,y_n)\right|\le$$

$$\le\left|(x_n,y_0)-(x_{0,}y_n)\right|+\left|y_n-y_0\right|,$$

причем расстояние $\left|(x_n,y_0)-(x_{0,}y_n)\right|$ в $\mathbb{R}^2$ можно ограничить длиной кривой графика $f_n(x)$, соединяющей точки $(x_n,y_0)=(f_n^{-1}(y_0),y_0)$ и $(x_{0,}y_n)=$ $=(f_n^{-1}(y_n),y_n)$:

$$\left|(x_n,y_0)-(x_{0,}y_n)\right|=\left|\int\limits_{y_0}^{y_n}\sqrt{1+\left(\frac{d}{dy}f_n^{-1}(y)\right)^2}\,dy\right|\le$$

$$\le\sqrt{1+\frac{4}{\delta^2}}\cdot\left|y_n-y_0\right|\le\left(1+\frac{4}{\delta^2}\right)\cdot\left|y_n-y_0\right|.$$

Таким образом, для $n\ge N$ окончательно получаем:

$$\left|f_n^{-1}(y_0)-f^{-1}(y_0)\right|\le\left(1+\frac{4}{\delta^2}\right)\cdot\left|y_n-y_0\right|+\left|y_n-y_0\right|=\left(2+\frac{4}{\delta^2}\right)\cdot\left|y_n-y_0\right|\le\varepsilon,$$

что доказывает сходимость $\lim\limits_{n\to\infty}f_n^{-1}(y_0)=f^{-1}(y_0)$. □

Для дифференцируемого на $\mathbb{R}$ отображения $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и нечеткого числа *A* введем обозначения:

$$X_{f,\operatorname{supp}A}=\{x\in\operatorname{supp}A: f'(x)=0\};$$

$$X_{A,\operatorname{supp}A}=\{x\in\operatorname{supp}A: x\text{ — точка разрыва функции }\mu_A(x)\}.$$

**Теорема 3.** Пусть *A* — выпуклое нечеткое число, все множества уровня которого компактны; $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(n\ge1)$ — последовательность отображений, непрерывно дифференцируемых на $\operatorname{supp}A$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — отображение, непрерывно дифференцируемое на $\operatorname{supp}A$; для любого $[a;b]\subset\operatorname{supp}A$ выполнены условия:

- $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, причем сходимость равномерна на $[a;b]$;
- $\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)=f'(x)$, причем сходимость равномерна на $[a;b]$;
- для всех $y\in\mathbb{R}$ множество $f^{-1}(y)\cap[a;b]=\{x\in[a;b]: f(x)=y\}$ конечно. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{f_n(A)}(y)=\mu_{f(A)}(y)$ для любого $y\in\mathbb{R}\setminus f(X_{f,\operatorname{supp}A}\cup$ $\cup X_{A,\operatorname{supp}A})$.

**Доказательство**. Зафиксируем произвольные $y_0\in\mathbb{R}\setminus f(X_{f,\operatorname{supp}A}\cup$ $\cup X_{A,\operatorname{supp}A})$ и $\varepsilon>0$. Пусть $f^{-1}(y_0)\cap\operatorname{supp}A\ne\varnothing$; тогда $f^{-1}(y_0)\cap[A]_{\alpha_0}\ne$ $\ne\varnothing$ для некоторого $0<\alpha_0\le1$. По условию, $X_0=f^{-1}(y_0)\cap[A]_{\alpha_0}$ конечно;

пусть $X_0=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ и $X_{0,\delta}=\bigcup_{j=1}^{k}[x_j-\delta;x_j+\delta]$ для $\delta>0$. Поскольку $\mu_A(x)$ непрерывна в каждой точке $x_j\in X_0$, можем выбрать такое $\delta_{0,1}>0$, что $\mu_A(x)>0$ и $\left|\mu_A(x_j)-\mu_A(x)\right|\le\varepsilon$ для $x\in X_{0,\delta_{0,1}}$. Так как $f'(x)$ непрерывна и $f'(x_j)>0$ при $x_j\in X_0$, можем выбрать такое $\delta_{0,2}>0$, что $f'(x)>0$ для $x\in X_{0,\delta_{0,2}}$.

Положим $\delta_0=\min(\delta_{0,1},\delta_{0,2})$, $X_j=[x_j-\delta_0;x_j+\delta_0]$, $Y_j=f(X_j)$ для $x_j\in X_0$, и $Y_0=\bigcap_{j=1}^{k}Y_j$. Для каждого $1\le j\le k$ определена обратная функция $f^{-1,j}:Y_0\to X_j$ и, в силу леммы 4, существует такие $Y\subset Y_0$ и $N\ge 1$, что для каждого $n\ge N$ определена $f_n^{-1,j}:Y\to X_j$, причем $y_0\in Y$ и $\lim\limits_{n\to\infty}f_n^{-1,j}(y)=f^{-1,j}(y)$ для всех $y\in Y$; подчеркнем, что $f^{-1,j}$ и $f_n^{-1,j}$ — обратные функции к сужениям $f$ и $f_n$ $(n\ge 1)$ на $X_j$. Учитывая компактность $\widetilde{X}_0=[A]_{\alpha_0}\setminus\bigcup_{j=1}^{k}(x_j-\delta_0;x_j+\delta_0)$ и неравенство $|f(x)-y_0|>0$ для всех $x\in\widetilde{X}_0$, а также равномерную сходимость $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ на $\widetilde{X}_0$, можем выбрать такое $N_1\ge N$, что $|f_n(x)-y_0|>0$ для всех $x\in\widetilde{X}_0$ и $n\ge N_1$. Таким образом, каждое уравнение $f_n(x)=y_0$ относительно $x$ при $n\ge N_1$ имеет на $[A]_{\alpha_0}$ ровно $k$ корней: $f_n^{-1,j}(y_0)$ $(1\le j\le k)$. Из равенства (2) получаем:

$$\mu_{f_n(A)}(y_0)=\max_{1\le j\le k}\mu_A(f_n^{-1,j}(y_0))\ \text{при}\ n\ge N_1,$$

$$\mu_{f(A)}(y_0)=\max_{1\le j\le k}\mu_A(f^{-1,j}(y_0)).$$

Выбрав такое $N_2\ge N_1$, что $\left|f_n^{-1,j}(y_0)-f^{-1,j}(y_0)\right|\le\delta_0$ при $n\ge N_2$, получаем оценку $\left|\mu_{f_n(A)}(y_0)-\mu_{f(A)}(y_0)\right|\le\varepsilon$ для $n\ge N_2$, что доказывает сходимость $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{f_n(A)}(y_0)=\mu_{f(A)}(y_0)$.

$$f^{-1}(y_0)\cap\operatorname{supp}A=\varnothing.$$

Наконец, в случае имеем, очевидно, $\mu_{f(A)}(y_0)=0$. Для произвольного $0<\alpha_0\le 1$, в силу компактности $[A]_{\alpha_0}$ и равномерной сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ на $[A]_{\alpha_0}$, можем выбрать такое $N$, что $|f_n(x)-y_0|>0$ для всех $x\in[A]_{\alpha_0}$ и $n\ge N$. Таким образом, $f_n^{-1}(y_0)\cap[A]_{\alpha_0}=\varnothing$ и, из равенства (2), $\mu_{f_n(A)}(y_0) \le \alpha_0$ при $n \ge N.$ В силу произвольности $0 < \alpha_0 \le 1$ немедленно получаем, что $\mu_{f_n(A)}(y_0) = 0$ при $n \ge N$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{f_n(A)}(y_0) =$ $= \mu_{f(A)}(y_0) = 0$.

Теорема полностью доказана.□

**Пример 12.** Рассмотрим нечеткое число $A$ с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{2\delta}, & |x| \le \delta, \\ 0, & |x| > \delta. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = x^2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ ($n \ge 1$).

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = x^2$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) = 2x$ равномерно на $\operatorname{supp} A = [-\delta; \delta]$. Непосредственно из равенства (2) найдем $\mu_{A^2}(x)$ и $\mu_{f_n(A)}(x)$:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{2\delta}, & |x| \le \delta^2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } |x| > \delta^2, \end{cases}$$

$$\mu_{f_n(A)}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sqrt{x - \dfrac{(-1)^n}{n}}}{2\delta}, & (-1)^n \le x \le \delta^2 + \dfrac{(-1)^n}{n}; \\ 0, & x < \frac{(-1)^n}{n} \text{ или } x > \delta^2 + \dfrac{(-1)^n}{n}. \end{cases}$$

Графики функций $\mu_A$ и (схематично) $\mu_{A^2}$ и $\mu_{f_n(A)}$ приведены на рис. 6.

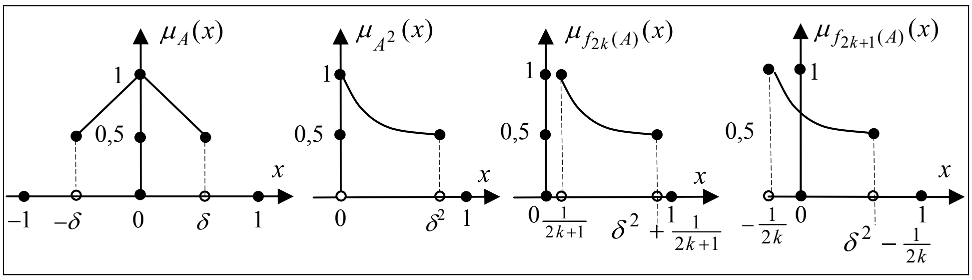


*Рис. 6.* Нечеткие числа $A$, $f_n(A)$ и $A^2$

Поскольку $X_{f,\operatorname{supp} A} = \{0\}$ и $X_{A,\operatorname{supp} A} = \{-\delta, \delta\}$, теорема 3 гарантирует сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{f_n(A)}(x) = \mu_{f(A)}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, кроме $f(0) = 0$ и $f(-\delta) = f(\delta) = \delta^2$. Заметим, что при $x = 0$ и $x = \delta^2$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{f_n(A)}(x)$ не существует.

## 4. РЯД ТЕЙЛОРА С НЕЧЕТКИМ АРГУМЕНТОМ: СХОДИМОСТЬ ЧАСТИЧНЫХ СУММ

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — функция, аналитическая на непустом открытом множестве $D\subset\mathbb{R}$. Тогда для произвольного $x_0\in D$ получаем разложение

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\,, \tag{4}$$

причем ряд (4) сходится равномерно на любом интервале $[x_0-r;x_0+r]\subset D$.

**Лемма 5.** Пусть $c\in\mathbb{R}$ и уравнение $f(x)=c$ имеет бесконечно много корней на $[a;b]\subset D$ ( $a<b$ ). Тогда $f(x)=c$ для всех $x\in[a,b]$.

**Доказательство.** В силу компактности $[a;b]$, множество корней уравнения $f(x)=c$ имеет на $[a;b]$ предельную точку. Теперь, применяя к функции $f(x)-c$ теорему о нулях аналитической функции, получаем: $f(x)-c=0$ для всех $x\in[a,b]$. □

Пусть $S_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ $(n\ge 0)$ — частичные суммы ряда в равенстве 4. Ясно, что равенство 4 означает сходимость $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$.

**Теорема 4.** Пусть $A$ — выпуклое нечеткое число, все множества уровня которого компактны; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — функция, аналитическая на непустом открытом $D\supset \operatorname{supp}A$. Тогда $\lim_{n\to\infty}\mu_{S_n(A)}(y)=\mu_{f(A)}(y)$ для любого $y\in\mathbb{R}\setminus$ $\setminus f(X_{f,\operatorname{supp}A}\cup X_{A,\operatorname{supp}A})$.

**Доказательство.** Заметим, что $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$ и $\lim_{n\to\infty}S'_n(x)=f'(x)$, причем обе сходимости равномерны на любом интервале $[a;b]\subset\operatorname{supp}A$. Пусть для некоторого $y_0\in\mathbb{R}\setminus f(X_{f,\operatorname{supp}A}\cup X_{A,\operatorname{supp}A})$ и $[a;b]\subset\operatorname{supp}A$ множество $f^{-1}(y_0)\cap[a;b]$ бесконечно. Тогда, по лемме 5, $f(x)=c$ для всех $x\in[a,b]$, а в силу единственности аналитического продолжения — для всех $x\in\operatorname{supp}A$, и утверждение теоремы очевидно. Если же множество $f^{-1}(y_0)\cap[a;b]$ конечно для всех $y_0\in\mathbb{R}\setminus f(X_{f,\operatorname{supp}A}\cup X_{A,\operatorname{supp}A})$ и $[a;b]\subset$ $\subset\operatorname{supp}A$, то выполнены все условия теоремы 3, откуда следует требуемое равенство $\lim_{n\to\infty}\mu_{S_n(A)}(y)=\mu_{f(A)}(y)$.

Теорема полностью доказана. □

**Пример 13.** Рассмотрим нечеткое число $A$ с функцией принадлежности

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\le 1;\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

и функцию $f(x)=\frac{1}{1-x}$. Непосредственно из равенства (2) найдем $\mu_{f(A)}(x)$:

$$\mu_{f(A)}(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x}, & \dfrac{1}{2}\le x<1;\\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 1;\\ 0, & x<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Графики функций принадлежности $\mu_A(x)$ и (схематично) $\mu_{f(A)}(x)$ приведены на рис. 7.

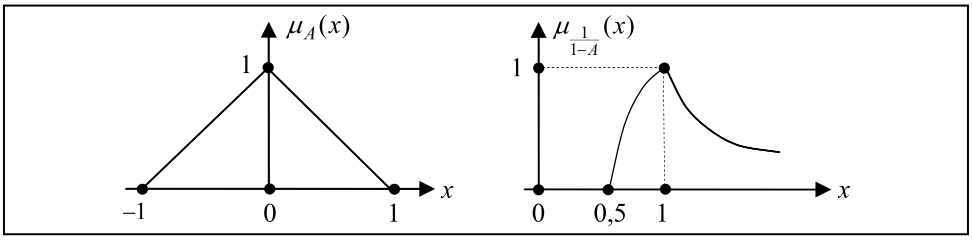


*Рис. 7*. Нечеткие числа $A$ и $\frac{1}{1-A}$

Область аналитичности $f(x)$ включает множество $\operatorname{supp} A=(-1;1)$, и разложение в ряд Тейлора в точке $x_0=0$ имеет вид $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}x^i$. Ряд сходится при $|x|<1$, причем сходимость равномерна на любом $[a;b]\subset(-1;1)$. Частичные суммы $S_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}x^i$ при $x\ne 1$ можно представить в виде $S_n(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Поскольку $\mu_A(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и $f'(x)\ne 0$ для $x\in\operatorname{supp} A$ (и даже для $x\in\mathbb{R}$), теорема 4 гарантирует сходимость $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{S_n(A)}(x)=\mu_{\frac{1}{1-A}}(x)$ для любого $x\in\mathbb{R}$. Интересно отметить, что $(0;0{,}5]\subset\operatorname{supp} S_{2k+1}(A)$ для всех $k\ge 0$. В таблице приведен ряд значений $\mu_{S_n}(0{,}5)$, демонстрирующий сходимость $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{S_n(A)}(0{,}5)=0$.

**Т а б л и ц а .** Значения $\mu_{S_n}(0{,}5)$

| ***n*** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_{S_n}(0{,}5)$ | 0,50 | 0,00 | 0,35 | 0,00 | 0,28 | 0,00 | 0,24 | 0,00 | 0,20 | 0,00 | 0,18 | 0,00 | 0,16 | 0,00 | 0,15 | 0,00 | 0,14 | 0,00 | 0,13 | 0,00 |

## ВЫВОДЫ

- Для функциональной последовательности $f_n(x)$, сходящейся к $f(x)$ и нечеткого аргумента $A$, представлены достаточные условия сходимости функций $\mu_{f_n(A)}(x)$ во всех точках, кроме образов точек разрыва $\mu_A(x)$ и нулей $f'(x)$. Принципиальным условием является конечность числа решений уравнения $f(x) = y$ относительно $x$ для всех $y \in \mathbb{R}$ на любом интервале $[a,b] \subset \operatorname{supp} A$.

- Для аналитической функции $f(x)$ представлены достаточные условия сходимости функций $\mu_{S_n(A)}(x)$, где $S_n(x)$ — частичные суммы ряда Тейлора для $f(x)$. При этом для любой нетривиальной аналитической $f(x)$ уравнение $f(x) = y$ относительно $x$ для всех $y \in \mathbb{R}$ на любом интервале $[a,b] \subset \operatorname{supp} A$ всегда имеет лишь конечное число решений.

- Темой дальнейшего исследования предполагается возможность восстановления $\mu_{f(A)}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, используя полунепрерывность $\mu_{f(A)}(x)$ сверху.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука, 1981. — 208 с.
2. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 176 с.
3. *Mizumoto M., Tanaka K.* Algebraic Properties of Fuzzy Numbers // Proceedings of IEEE International Conference on Cybernetics and Society. — 1976. — P. 559 – 563.
4. *Delgado M., Verdegay J.L., Vila M.A.* Fuzzy numbers, definitions and properties // Mathware & Soft Computing 1. — 1994. — № 1 (1). — P. 31–43.
5. *Dubois D., Prade H.* Fuzzy Real Algebra: Some Results // Fuzzy Sets and Systems. — 1979. — № 4 (2). — P. 327–348.
6. *Inaida J.* Taylor Series on the Fuzzy Number Space // Special Issue on Biometrics And Its Applications. — 2010. — № 16 (1). — P. 15–25.
7. *Кадец В. М.* Курс функционального анализа / Х.: Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, 2006. — 607 с.


*Поступила 30.01.2013*