УДК 519.6:519.81

МЕТОД ЗГЛАДЖЕНОЇ АВТОКОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ВАРІАЦІЇ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Н.Г. ЗРАЖЕВСЬКА

Запропоновано новий метод для побудови прогнозу варіації сильноволатильних гетероскедастичних часових рядів. За модель часового ряду взято авторегресію нескінченного порядку. Параметри моделі знайдено як розв'язок системи рівнянь Тьопліца, у якій використовуються модельні коефіцієнти автокореляції, за запропонованим методом. Модель автокореляційної функції на кожному кроці прогнозування побудовано шляхом розв'язання оптимізаційної задачі, що враховує умову сильної залежності. Метод протестовано на штучно згенерованому та реальному часових рядах. Для порівняння результатів прогнозування обрано модель авторегресії, параметри якої знайдено за методом максимальної правдоподібності. Результати свідчать про достатньо високу ефективність запропонованого методу під час прогнозування сильноволатильних гетероскедастичних часових рядів.

ВСТУП

Формалізація даних у вигляді часових рядів використовується у багатьох сферах людської діяльності. Практично всі природничі та гуманітарні науки в тому чи іншому вигляді потребують методів для аналізу та класифікації часових послідовностей. Прикладами часових рядів є короткострокові неризикові процентні ставки, що відіграють важливу роль у функціюванні фінансової системи світу. Вони безпосередньо пов'язані із станом споживчого ринку, встановленням цін на акції, інфляцією, глобальною економікою та використовуються як фінансовими інститутами, так і приватними інвесторами для контролю ризиків портфелів. Економічні і, зокрема, фінансові часові ряди мають специфічні характеристики. Фінансові ряди, як правило, нестаціонарні. Однією з важливих характеристик часових рядів є волатильність — статистичний показник, що характеризує межі змін ринкової ціни або доходу. У термінах статистики волатильність виражається дисперсією. Часові ряди є гетероскедастичними, якщо їхня точкова умовна дисперсія змінюється з часом, що є характерною рисою фінансових часових рядів у кризові періоди. Нерідко в таких рядах зустрічається ефект сильної залежності. Це ускладнює можливість застосування класичних методів дослідження часових рядів та побудову традиційних моделей для їх прогнозування. Для моделювання таких рядів використовують моделі класу GARCH [1], у яких умовна дисперсія процесу залежить від попередніх значень ряду та від попередніх значень дисперсії. Для врахування ефекту сильної залежності у роботі [2] було запропоновано модель FIGARCH.

Методи прогнозування часових рядів за авторегресійною, ARMA та GARCH моделями проаналізовано у роботі П.І. Бідюка [3]. Як було показано, зокрема, у роботі Е. Зівота [4], FIGARCH процес еквівалентний процесу авторегресії нескінченного порядку. За методом редукції від авторегресійної моделі нескінченного порядку переходять до авторегресії зі скінченним порядком, який є достатньо великим числом. За цим підходом не враховується інформація щодо сильної залежності та гетероскедастичності, що може призвести до збільшення похибки прогнозних значень. У цьому дослідженні зроблено спробу покращення моделі, що має застосовуватись для прогнозування сильнольноволатильних часових рядів, що підкоряються умові сильної залежності, шляхом максимального використання апріорної інформації та згладження автокореляційної функції, що має на меті зменшення впливу випадкових факторів та недовизначеності моделі.

МОДЕЛІ ЧАСОВИХ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНИХ РЯДІВ

Розглядаємо часовий ряд $\{X_t,\, t = 0,1,2,...\}$ записаний у вигляді

$$X_t = u + \varepsilon_t \ , \tag{1}$$

де $u = \mathrm{const}$, ε_t — стохастичний процес з нульовим середнім. Через $E_{t-1}[\cdot]$ будемо позначати умовне математичне сподівання, задане на інформаційній множині, що складається з попередніх значень ряду та іншої інформації, яка відома в момент часу $t-1$.

Процес, для якого $E_{t-1}[\varepsilon_t] = 0$, а умовну дисперсію $\sigma_t^2 = E_{t-1}[\varepsilon_t^2]$ представлено як лінійну функцію квадратів попередніх значень процесу

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad \omega > 0\,, \alpha_i \geq 0\,,\ i = 1,2,\ldots,q \tag{2}$$

називається процесом авторегресійної умовної скедастичності — ARCH(q).

Формули (1) (2) визначають модель ARCH(q).

Показано [4], що процес $\mathrm{ARCH}(q)$ може бути записано у вигляді авторегресійного процесу $\mathrm{AR}(q)$. Якщо покласти

$$\sigma_t^2 = \varepsilon_t^2 - v_t\,, \tag{3}$$

де v_t — незалежні однаково розподілені випадкові величини (н.о.р.в.в.), то з (2):

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i {\varepsilon_{t-i}}^2 + v_t\,. \tag{4}$$

$\mathrm{GARCH}(q,p)$ є узагальненням моделі $\mathrm{ARCH}(q)$. За цією моделлю умовна дисперсія залежить не тільки від квадратів попередніх значень процесу, а й від попередніх значень самої умовної дисперсії:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i {\varepsilon_{t-i}}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j {\sigma_{t-j}}^2\,. \tag{5}$$

Застосовуючи оператор зсуву $LX_t = X_{t-1}$, можна переписати (2) і (5) в операторному вигляді:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2\,, \tag{6}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2\,, \tag{7}$$

де $\alpha(L) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i L^i$, $\beta(L) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j L^j$.

Умови $\omega > 0$, $\alpha_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,q$, $\beta_j > 0$, $j = 1,2,\ldots,p$ є достатніми для коректності моделі [1]. Формально (7) можна записати у вигляді $(1-\alpha(L)-\beta(L))\varepsilon_t^2 = \omega + (1-\beta(L))v_t$.

Модель, для якої $\alpha(1)+\beta(1)=1$, називається IGARCH:

$$\phi(L)(1-L)\varepsilon_t^2 = \omega + (1-\beta(L))v_t, \tag{8}$$

де оператор $\phi(L) \equiv (1-\alpha(L)-\beta(L))(1-L)^{-1}$ має порядок $m-1$, $m = \max(p,q)$.

Подальшим узагальненням є модель FIGARCH(p,d,q) [2]:

$$\phi(L)(1-L)^d \varepsilon_t^2 = \omega + (1-\beta(L))v_t, \tag{9}$$

де $(1-L)^d = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)}(-L)^j$ — оператор дробової різниці ($\Gamma(\cdot)$ — гамма функція). Для коректності моделі достатньо покласти $\omega > 0, \sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}\beta_i < 1$. Якщо із $d \in (0, 1/2)$, то модель описує часові ряди сильною залежністю з параметром Херста $H = 1/2 + d$.

Модель (9) можна переписати у вигляді

$$\sigma_t^2 = (1-\beta(1))^{-1}\omega + \lambda(L)\varepsilon_t^2 \tag{10}$$

або

$$\varepsilon_t^2 = (1-\beta(1))^{-1}\omega + \lambda(L)\varepsilon_t^2 + v_t, \tag{11}$$

де $\lambda(L) \equiv 1-(1-\beta(1))^{-1}\phi(L)(1-L)^d$. При цьому $\lambda(L) = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \lambda_3 L^3 + \ldots$.

Модель FIGARCH(p,d,q) коректно визначена і ${\sigma_t}^2 > 0$ майже напевно для всіх t за умови $\lambda_k > 0$, $k = 0,1,2,\ldots$. Таким чином, FIGARCH(p,d,q) можна визначити як модель ARCH (∞) для дисперсії часового ряду (представлення (2)) або як модель AR(∞) для квадратів процесу $\{\varepsilon_t^2\}$ (представлення (11)).

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ АВТОРЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ ЗА УМОВИ СИЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ

Для оцінки параметрів моделі (9), використовують метод максимальної правдоподібності та метод максимальної квазиправдоподібності, оскільки для волатильних рядів функції правдоподібності мають явний вигляд. У цій роботі використовується представлення (11) (з переходом до моделі AR(∞)), що є зручним для побудови прогнозу. Надалі вважаємо ряд сильно залежним в сенсі наступного означення [5].

Означення. Часовий ряд $\{X_t, t = 0,1,2,...\}$ з автокореляційною функцією (АКФ) $\rho(k) = Corr(X_t, X_{t+k})$, $k \in N \cup \{0\}$ підкоряється сильній залежності (довгостроковій залежності або залежності з далеким радіусом), якщо існує $0 < \alpha < 1$ та константа $c_r > 0$ такі, що:

$$\lim_{k\to\infty} \rho(k)/(c_r\, k^{-\alpha}) = 1. \tag{12}$$

Таким чином, АКФ повільно спадає, а це призводить до розбіжності ряду $\sum_k \rho(k) = \infty$. Характеристикою сильної залежності в (9) є параметр d.

У загальному випадку задача побудови моделі $\mathrm{AR}(\infty)$ у вигляді

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \ldots + a_N X_{t-N} + \ldots + v_t,\ v_t - \textit{н.о.р.в.в.}, \tag{13}$$

зводиться до задачі оцінювання коефіцієнтів $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_N, \ldots)'$ авторегресійної моделі нескінченного порядку. Оцінки будуються за методом найменших квадратів (МНК) шляхом розв'язання нормальної системи рівнянь [6], що, у цьому випадку, є нескінченною системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) із різницевими індексами:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho_{|i-j|} a_j = \rho_{i+1},\ i = 0, \ldots, \infty, \tag{14}$$

де $\rho_i = \widehat{\rho}(i)$, $i = 0, \ldots, \infty$ — оцінка автокореляційної функції часового ряду X_t, $t = T, T-1, \ldots$, визначена формулою: $\hat{\rho}(k) = \dfrac{c\hat{o}v(k)}{c\hat{o}v(0)}$, $c\hat{o}v(k) = \dfrac{1}{T-l}\sum_{j=l+1}^{T}(X_j - \mu)(X_{j-k} - \mu)$, $\mu = \dfrac{1}{T-l}\sum_{j=l+1}^{T} X_j$, $k = 0, \ldots, l$, $l \to -\infty$, де T — актуальний момент часу.

Ввівши позначення $\mathrm{R} = \{\rho_{|i-j|}\}_{i,j=0}^{\infty}$ (автокореляційна матриця) та $\vec{b} = (\rho_1, \rho_2 \ldots)'$, отримуємо нескінченну СЛАР

$$\mathrm{R}\,\vec{a} = \vec{b}\,. \tag{15}$$

Розв'язання (15) за стандартним методом редукції є некоректним, оскільки, в силу припущення щодо сильної залежності, ряд автокореляційних коефіцієнтів розбігається, а, отже, не виконується умова регулярності та нормальності матриці СЛАР. Збіжність розв'язку редукованої системи до точного розв'язку не гарантована.

Нескінченні СЛАР з різницевими індексами в загальному випадку еквівалентні крайовій задачі Рімана. Альтернативою є підхід, запропонований у роботі [7], де показано, що наближений розв'язок систем виду (14) буде збігатись до точного розв'язку під час редукування системи з урахуванням асимптотичної поведінки розв'язку. Вказаний підхід базується на теоремі.

Теорема (про збіжність розв'язку редукованої системи до точного розв'язку). Якщо для АКФ часового ряду виконується асимптотичне співвідношення

$$\rho(k) \sim k^{2d-1} l(k),\ k \to \infty,\ 0 < d < 1/2, \tag{16}$$

то існує єдиний розв'язок системи (14), що задовольняє умові

$$a_k \sim k^{-(1+d)} \left(\frac{c_r}{B(d, 1-2d)} \right)^{-1/2} \frac{d \sin(\pi d)}{\pi},\ k \to \infty, \tag{17}$$

та може бути знайдений шляхом розв’язання редукованої системи рівнянь

$$\sum_{j=0}^{N} \widetilde{\rho}_{|i-j|} \widetilde{a}_j = \widetilde{\rho}_{i+1} - \sum_{j=N+1}^{\infty} \widetilde{\rho}_{|i-j|} j^{-(1+d)} \, , \; i = 0,...,N, \tag{18}$$

де $\widetilde{\rho}_i = \begin{cases} \rho_i, & i < N_1, \\ c\, i^{2d-1}, & i \geq N_1. \end{cases}$ При цьому $\left\| \vec{a} - \widetilde{\vec{a}} \right\|_C \underset{N, N_1 \to \infty}{\to} 0$.

Тут $B(\cdot)$ — бета функція, $\alpha = 1 - 2d$. Тоді параметр Херста $H = d + 1/2 \in (1/2, 1)$.

Значення N визначається з умови практичної збіжності розв’язку, оскільки застосування інформаційного критерію Акаїке та його модифікацій у випадку сильної залежності не дає повної відповіді на питання, яким треба вибрати N [8]. Вони лише визначають нижню оцінку цього значення.

Особливість запропонованого методу прогнозування полягає в тому, що в системі нормальних рівнянь Тьопліца замість коефіцієнтів кореляції, побудованих на спостережуваних значеннях часового ряду, використовуються значення згладженої за новим методом АКФ. Регресійна модель для АКФ випливає із означення сильної залежності (асимптотичне співвідношення (12)):

$$\rho(k) = \alpha_1 H (2H - 1) k^{2H-2} + \alpha_2 + \varepsilon_k \, , \; \varepsilon_k - \textit{н.о.р.в.в.}, \; k_0 \leq k \leq N \, , \tag{19}$$

де H — параметр Херста [5]. Отже, для побудови моделі АКФ достатньо отримати оцінку $\hat{H}$ (відповідає накладеній умові сильної залежності часового ряду), після чого оцінки коефіцієнтів моделі (19) можна отримати шляхом побудови лінійної регресії з використанням МНК. Таким чином, оцінці $\hat{H}$ можна поставити у відповідність оцінки АКФ $\widetilde{\rho}(k)$ з похибками $\widetilde{\varepsilon}(k)$. Лінійна регресія не включає перші k_0 значень автокореляцій, оскільки (1) задає асимптотичні властивості. У роботі [9] детально описано та проаналізовано широковживані методи оцінювання параметра Херста, такі як: метод вибіркової дисперсії агрегованого ряду, метод абсолютних значень агрегованих рядів, метод залишків регресії, метод нормованого розмаху, метод періодограм. Кожен з цих методів має свої особливості, що визначають ефективність його застосування залежно від мети застосування оцінки параметра Херста та особливих властивостей часових рядів. Оскільки в цій роботі розглянуто часові ряди лише з умовами сильної залежності та стаціонарності (для квадратів значень часових рядів), додаткова специфічна інформація відсутня. Пропонується знайти п’ять оцінок параметра Херста за перерахованими методами оцінювання та покласти $\hat{H}$ як агреговане зважене (з рівними вагами) значення оцінок, якому ставиться у відповідність $\widetilde{\rho}(k)$ з усередненою похибкою $\widetilde{\varepsilon}(k)$. Для уточнення оцінок автокореляції з метою їх застосування до задачі прогнозування, використаємо наступну оптимізаційну процедуру.

Нехай задано $\{y_k\}_{k=1}^{N}$ — значення автокореляції, за якими визначено агреговану оцінку параметра Херста і середню дисперсію помилки цієї моделі ε^2. Визначаємо на повній вибірці дві підвибірки: I — $\{y_k\}_{k=1}^{k_1}$, II —

$\{y_k\}_{k=k_1+1}^{k_2}$. На підвибірці II будуємо регресійну модель (19). Для цього достатньо мінімізувати $\sum_{k=k_1+1}^{k_2}(y_k-\hat{y}_k)^2$, де $\hat{y}_k$, $k=\overline{k_1+1,k_2}$ значення моделі, що визначаються за (19). На підвибірці I визначаємо похибки моделі $(y_k-\hat{y}_k)^2$, $k=\overline{1,k_1}$ та обмежуємо їх значенням середньої дисперсії похибки ε^2. Очевидно, що така задача мінімізації квадратичного функціоналу з квадратичним обмеженням є опуклою. Однак, в силу того, що ε^2 — середня (а не максимальна) дисперсія, задача може не мати допустимих розв'язків. Для формулювання задачі з оптимальним розв'язком достатньо ввести в праву частину обмеження релаксаційний параметр $q \ge 0$, включення якого в цільову функцію забезпечить мінімальне відхилення оптимальної моделі від моделі, побудованої вище. Основний функціонал і релаксаційний параметр в цільовій функції слід зважити з коефіцієнтом штрафу λ ($0 \le \lambda \le 1$). Варіювання λ дозволяє отримати бажаний баланс між відповідністю моделі вихідним даним (на другий підвибірці) і відповідності моделі умові сильної залежності (на першій підвибірці).

Таким чином, формулювання оптимізаційної задачі має вигляд:

$$\lambda q+(1-\lambda)\frac{1}{k_2-k_1}\sum_{k=k_1+1}^{k_2}(y_k-\widehat{y}_k)^2 \to \min, \tag{20}$$

$$(y_k-\widehat{y}_k)^2 \le \varepsilon^2+q\,,\quad k=1,2,\ldots,.k_1, \tag{21}$$

$$q \ge 0\,. \tag{22}$$

У результаті розв'язання оптимізаційної задачі (20)–(22), отримуємо уточнені оцінки параметрів $\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2$ й знаходимо уточнену оцінку параметра Херста $\hat{H}_{optim}$. Модель АКФ має вигляд

$$\widehat{\rho}(k)=\hat{\alpha}_1\hat{H}_{optim}(2\hat{H}_{optim}-1)\,k^{2\hat{H}_{optim}-2}+\hat{\alpha}_2\,,\ k_0 \le k \le N\,. \tag{23}$$

МЕТОД ПОБУДОВИ ПРОГНОЗУ СИЛЬНО ЗАЛЕЖНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ НА ОСНОВІ АВТОРЕГРЕСІЙНИХ МОДЕЛЕЙ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Для побудови прогнозної моделі, вкажемо метод для знаходження квадрату значення часового ряду $\hat{X}_{l+1}^2$, використовуючи спостереження $X_0^2, X_1^2, \ldots, X_l^2$. Для цього використаємо авторегресійну модель нескінченного порядку (13) (редуковану до моделі зі скінченним лагом) з апріорним припущенням існування сильної залежності. Теоретичні дослідження дозволили сформулювати наступний алгоритм.

Алгоритм

Крок 1. Знаходимо оцінку параметра Херста $\hat{H}_{optim}$ та параметри згладженої моделі АКФ за описаною в попередньому розділі процедурою.

Крок 2. Визначаємо оцінки автокореляційних коефіцієнтів $\widehat{\rho}(k)$ згідно з моделлю (23).

Крок 3. Складаємо редуковану систему нормальних рівнянь (14), використовуючи замість ρ_k отримані за моделлю (23) значення $\widehat{\rho}(k)$, та знаходимо оцінку $\hat{\hat{a}}_N = (\hat{a}_1,...,\hat{a}_N)'$ вектора коефіцієнтів автокореляції за методом Холецького [10].

Крок 4. Визначаємо лаг редукованої авторегресійної моделі $M \le N$, використовуючи 3 інформаційні критерії AIK (інформаційний критерій Акаіке), HQC (інформаційний критерій Хеннена-Куіна), SBIC (інформаційний критерій Байєса) [8]. Значення лагу обираємо з умови мінімального відхилення до отриманих трьох значень.

Крок 5. P значень прогнозу часового ряду обчислюємо за екстраполяційною формулою

$$\hat{X}^2_{l+p} = \sum_{i=0}^{M} \hat{a}_i X^2_{l-i-1}\,,\ l = N+1,...,\ p = 1,...,P. \tag{24}$$

Зауважимо, що за теоремою про збіжність розв'язку редукованої системи до точного розв'язку, отриманний розв'язок редукованої системи буде за нормою збігатися до точного. Проте через накопичення похибки апроксимації точність прогнозу може суттєво зменшуватись із збільшенням P.

Застосуємо запропонований алгоритм до прогнозування гетероскедастичних рядів із сильною залежністю (представлення (11)).

За базу верифікації результатів прогнозування із застосуванням запропонованого методу (алгоритм) використаємо прогноз, отриманий за широко відомим методом максимальної правдоподібності побудови авторегресійної моделі часового ряду.

Розглядаємо редуковану модель $\mathrm{AR}(p)$, у якій лаг обирається за інформаційним критерієм. Враховуємо, що $E[\varepsilon_t] = 0$, $D[\varepsilon_t] = \sigma^2_\varepsilon$, $D[X_t] = \sigma^2_x$. Вважаємо $\{X_t\}$ стаціонарним в широкому сенсі. Оцінимо параметри моделі авторегрессії a_i й σ^2_ε методом максимальної правдоподібності. Припускаємо, що $\{\varepsilon_t\} \sim N(0, \sigma^2_\varepsilon)$. Для гаусівського вектора $\vec{X}^{M+T} = (X_1,...,X_M,$ $X_{M+1},...,X_{M+T})$ функція максимальної правдоподібності може бути записана у вигляді:

$$f(X^{M+T}; a; \sigma_\varepsilon) = (2\pi)^{-(M+T)/2} \sigma^{-T} \left|\det R_{M+T}\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{S(a)}{2\sigma^2_\varepsilon}\right\},$$

де $\vec{a} = (a_1,...,a_M)$ — вектор параметрів моделі, $R_{M+T} = \left\|R(k-j)\right\|_{k,j=\overline{1,M+T}}$ — автокореляційна матриця вектора $\vec{X}^{M+T}$, $S(a) = \sigma^2(R_M^{-1}X^M,\, X^M) +$

$$+\sum_{k=1}^{T}\left(X_{M+T} - \sum_{j=1€}^{M} a_j X_{M+k-j}\right)^2.$$

Для знаходження оцінок параметрів a_i й σ_ε^2 методом максимальної правдоподібності розглядається задача максимізації функції $f(X^{M+T};a;\sigma_\varepsilon)$, яка зводиться до СЛАР [11].

Для порівняння фактичного часового ряду, спрогнозованого ряду за методом згладженої автокореляції та спрогнозованого ряду за методом максимальної правдоподібності, використаємо Diebold-Mariano тест [12].

Нехай $\{X_t\}$ — часовий ряд, який прогнозуємо та $\hat{X}^{(1)}_{t+p|t}$ й $\hat{X}^{(2)}_{t+p|t}$ — два прогнози, які порівнюємо. Похибки прогнозів цих моделей позначимо відовідно: $\varepsilon^{(1)}_{t+p|t} = X_{t+p} - \hat{X}^{(1)}_{t+p|t}$, $\varepsilon^{(2)}_{t+p|t} = X_{t+p} - \hat{X}^{(2)}_{t+p|t}$.

Нехай T_0 — загальна кількість P-крокових прогнозів. Прогноз на P-кроків було побудовано для $t = t_o,...,T.$ Таким чином маємо дві послідовності похибок прогнозів: $\{\varepsilon^{(1)}_{t+p|t}\}^T_{t_0}$ й $\{\varepsilon^{(2)}_{t+p|t}\}^T_{t_0}$. Оскільки P-кроковий прогноз використовує дані, що часто повторюються, отримані послідовності похибок будуть корельованими.

Нехай точність кожного прогнозу вимірюється функцією втрат: $L(y_{t+p}, y^{(i)}_{t+p|t}) = L(\varepsilon^{(i)}_{t+p|t}),\ i = 1,2$. У якості такої функції беремо функцію квадратів похибки: $2L(\varepsilon^{(i)}_{t+p|t}) = (\varepsilon^{(i)}_{t+p|t})^2,\ i = 1,2$.

Для порівняння моделей перевіряємо основну гіпотезу: $H_0 : E[(L\varepsilon^{(1)}_{t+p|t})] = = E[L(\varepsilon^{(2)}_{t+p|t})]$. Тоді альтернативна гіпотеза $H_1 : E[L(\varepsilon^{(1)}_{t+p|t})] = E[L(\varepsilon^{(2)}_{t+p|t})]$. Нехай $d_t = L(\varepsilon^{(1)}_{t+p|t}) - L(\varepsilon^{(2)}_{t+p|t})$. Тоді гіпотеза $H_0 : E[d_t] = 0.$ Перевіряємо гіпотезу H_0, використовуючи статистику тесту Дієболда-Маріано:

$$DM = \frac{\bar{d}}{(L\hat{R}V_{\bar{d}}/T)^{1/2}},$$

де $\bar{d} = \frac{1}{T_0}\sum_{t=t_0}^{T} d_t$, $LRV_{\bar{d}} = \gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j,\ \gamma_j = \operatorname{cov}(d_t, d_{t-j})$, $L\hat{R}V_{\bar{d}}$ — оцінка асимптотичної дисперсії для $\sqrt{T}\bar{d}$.

DM є вихідною характеристикою тесту Дієболда-Маріано. Якщо взяти рівень достовірності $\alpha = 0{,}05$, то при $|DM| < 1{,}96$ прогнози є подібними, в іншому випадку суттєво різняться.

У кількісному вимірі якість прогнозування визначимо похибками: $ME = 1/N\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)$ — середня похибка; $MAE = 1/N\sum_{i=1}^{N}|y_i - \hat{y}_i|$ — середня абсолютна похибка; $MSE = 1/N\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2$ — середньоквадратична похибка; $MAPE = 1/N\sum_{i=1}^{N}|1 - y_i / \hat{y}_i| \cdot 100\%$ — середня абсолютна процентна похибка, де y_i — фактичний квадрат значення часового ряду, $\hat{y}_i$ — спрогнозоване значення.

ПОБУДОВА ПРОГНОЗУ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Метою цього розділу є побудова та порівняння з фактичними значеннями прогнозів середніх дисперсій за методом максимальної правдоподібності та за запропонованим методом згладження автокореляційної функції. Прогноз для часового ряду будується на 5 кроків вперед та усереднюється на цьому ж періоді, що відповідає стандартній в фінансовій галузі процедурі прогнозування середньої варіації доходів фінансового інструменту на тижневій основі.

Прогнози будуються для штучно сгенерованого часового ряду та для реального часового ряду. Для генерування штучних даних використовуємо модель FIGARCH(1; 0,42; 1) з параметрами: $\omega = 0{,}1; \alpha_1 = 0{,}1; \beta_1 = 0{,}1$. За реальний часовий ряд обираємо доходи на денній основі індекса РТС — офіційного індикатора Фондової біржі РТС («Российская Торговая Система») за 2014 рік. З метою побудови прогнозу дисперсій, значення рядів піднесені до квадрату.

Об'єм реальної вибірки для побудови моделі $N = 1600$. За методом згладження АКФ застосовуємо алгоритм, описаний у попередньому розділі, на 5 кроків вперед з максимальним лагом для АКФ рівним 55. Значення прогнозу усереднюються та декларуються як прогноз середньої дисперсії на наступний робочий тиждень. Потім індекс значень часовогу ряду збільшується на одиницю та процедура повторюється. Таким чином, на кожному кроці модель АКФ перебудовується для врахування актуальних даних. За методом максимальної правдоподібності використовується аналогічна процедура.

Результати прогнозування для штучно сгенерованого часового ряду $\text{FIGARCH}(1;0{,}42;1)$ графічно зображені на рис. 1 (Method 1 — метод максимальної правдоподібності, Method 2 — метод згладження автокореляційної функції, X^2 — фактичні значення). З графіку видно, що прогноз, отриманий за методом згладження АКФ значно краще відтворює як абсолютні відхилення фактичного часового ряду, так і тенденції локальних трендів (зростання-падання) у порівнянні з прогнозом за методом максимальної правдоподібності. Суттєвою перевагою запропонованого методу є також значне зменшення затримки під час прогнозування точок перелому локального тренду. Для порівняння траєкторій прогнозів моделей використано Diebold-Mariano тест. Отримано характеристику: $DM = 0{,}948 < 1{,}96$. Таким чином, для штучно згенерованих даних траєкторія прогнозу за методом згладження автокореляційної функції подібна траєкторії прогнозу за методом найбільшої правдоподібності, що свідчить про коректність запропонованого методу, оскільки на даних з контрольованими властивостями, обидва методи, в цілому, подібні та дозволяють отримати достовірний прогноз.

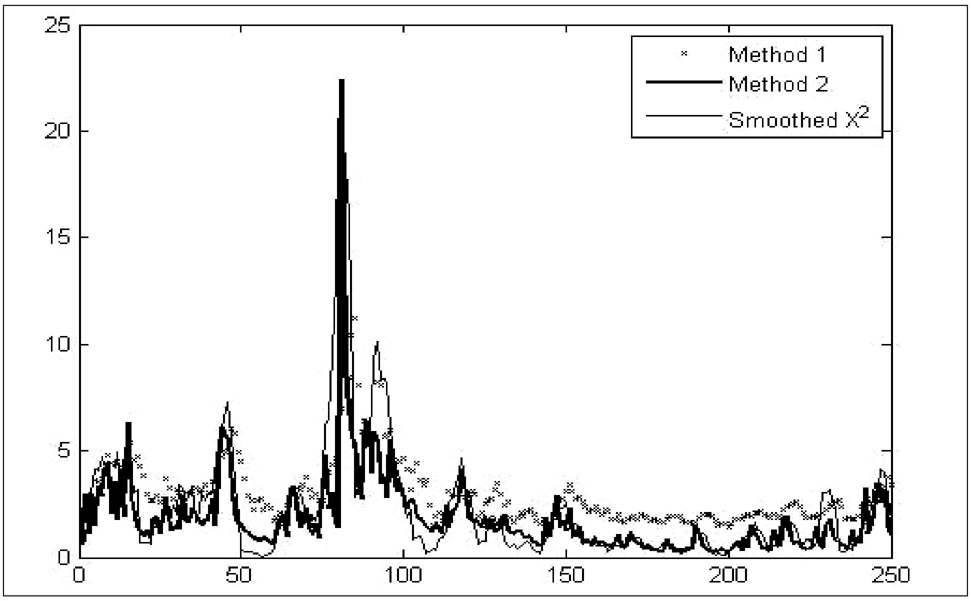

Рис. 1. Усереднені за 5 значеннями квадрати згенерованного часового ряду (Smoothed Y^2), значення згладжених прогнозів за методом максимальної правдоподібності (Method 1) та методом згладження АКФ (Method 2)

Результати прогнозування для реального часового ряду доходів на денній основі індекса РТС графічно зображені на рис. 2. Реальні дані задовольняють припущенням, покладеним в основу побудови прогнозу не в повній мірі, а, отже, якість прогнозу суттєво гірша, що видно з рисунку. Особливістю цього випадку є те, що прогноз, отриманий за методом згладження АКФ, є більш консервативним у порівнянні з прогнозом за методом максимальної правдоподібності, що обумовлюється згладженням АКФ. Як і для штучних даних, він значно краще відтворює як абсолютні відхилення фактичного часовогу ряду, так і тенденцію локальних трендів, а також демонструє значне зменшення затримки при прогнозуванні точок перелому локального тренду. Отже, запропонований метод згладження АКФ має переваги у порівнянні зі стандартним методом прогнозування для сильно волатильних часових рядів. Характеристика порівняння прогнозних траєкторій за Diebold-Mariano тестом: $DM = 4{,}51 > 1{,}96$. Отже, на відміну від випадку штучних даних, прогнози, отримані за методом згладження АКФ та за методом максимальної правдоподібності, суттєво різняться.

Diebold-Mariano тест дозволяє визначати лише подібність/відмінність прогнозів, побудованих за різними моделями. Для кількісної оцінки якості прогнозів використаємо міри похибок ME, MAE, MSE та MAPE. Отримані значення наведено в таблиці (ЗД — згенеровані дані, РТС — дані доходів індексу РТС, Method 1 — метод максимальної правдоподібності, Method 2 — метод згладження АКФ). Значення похибок підтверджують результати, отримані у ході графічного аналізу. Похибки прогнозу за методом згладження АКФ менші за похибки прогнозу за методом максимальної правдоподібності. При цьому похибки, отримані під час прогнозування згенерованого часового ряду, більші в порівнянні з похибками прогнозування реальних даних. Відношення похибок для різних методів змінюється під час переходу від штучних даних до реальних даних, що також свідчить про перевагу застосування запропонованого методу при прогнозуванні поведінки реальних сильно волатильних часових рядів у порівнянні зі стандартними методами.

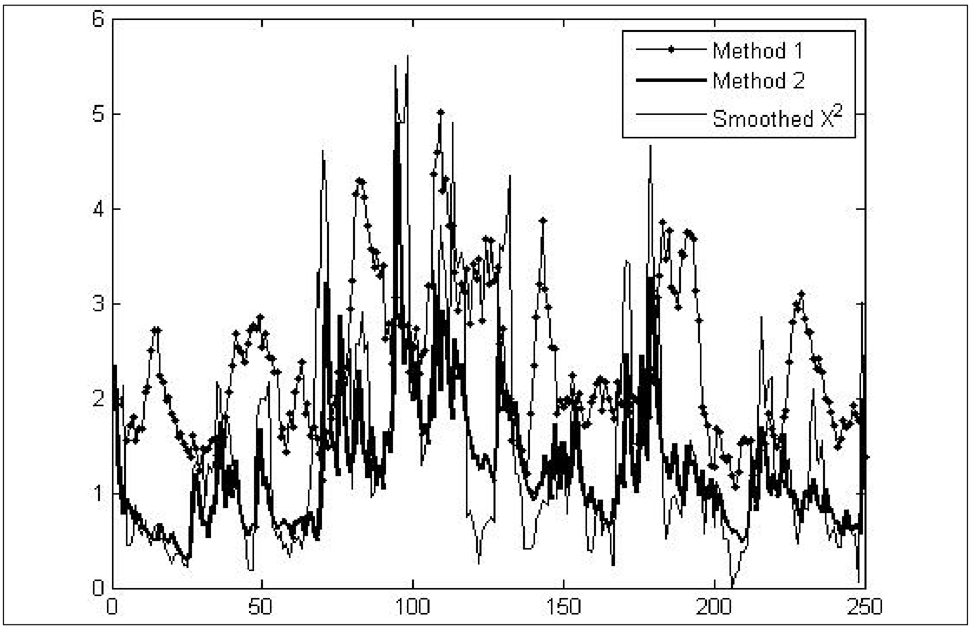

Рис. 2. Усереднені за 5 значеннями квадрати згенерованного часового ряду індексу PTC (Smoothed Y^2), значення згладжених прогнозів за методом максимальної правдоподібності (Method 1) та методом згладження АКФ (Method 2)

Таблиця. Похибки прогнозу для згенерованих і реальних даних

Метод	**ME**		**MAE**		**MSE**		**MAPE (%)**	
	PTC	З.Д.	PTC	З.Д.	PTC	З.Д.	PTC	З.Д.
Method 1	0,666	0,842	1,507	1,252	5,157	2,196	262,94	240,51
Method 2	−0,55	−0,261	1,017	0,569	4,435	0,711	81,156	76,61

ВИСНОВКИ

У роботі запропоновано новий метод для побудови прогнозу варіації сильноволатильних гетероскедастичних часових рядів за наявності сильної залежності. Прогноз побудовано на основі авторегресійної моделі нескінченного порядку, що еквівалентна моделі FIGARCH. Новим є метод оцінювання коефіцієнтів моделі, що базується на розв'язанні нескінченної системи нормальних рівнянь Тьопліца. У якості коефіцієнтів системи взято значення, отримані за допомогою моделі АКФ, побудова якої запропонована авторами. Модель АКФ базується на агрегованій оцінці параметра Херста, що є основною характеристикою сильної залежності та дозволяє адаптувати, шляхом вирішення оптимізаційної задачі, модель АКФ саме для використання її в алгоритмі прогнозування. Для розв'язання системи рівнянь Тьопліца запропоновано застосування методу редукування, що враховує асимптотичну поведінку коефіцієнтів моделі АКФ. Лаг редукованої авторегресійної моделі визначається за інформаційними критеріями.

Метод протестовано на штучно згенерованих за моделлю FIGARCH даних та застосовано для побудови прогнозу середніх дисперсій для реального часового ряду доходів індексу РТС за 2014 рік. У якості порівняння було також побудовано прогноз вказаних часових рядів за методом авторегресії, отриманої у відповідності до відомого методу максимальної правдоподібності. Отримані в ідентичних умовах прогнози порівняні між собою за Diebold-Mariano тестом, який продемонстрував подібність прогнозних траєкторій для штучно згенерованих даних та суттєву відмінність для реальних даних. Отже, теоретичне обгрунтування запропонованого методу прогнозування є коректним. Побудовані кількісні оцінки порівняння прогнозів з фактичними значеннями показують суттєве підвищення ефективності запропонованого методу прогнозування в порівнянні з широковживаними методами. Зокрема, окрім зменшення похибки прогнозу, запропонований метод дозволяє отримати прогноз, який значно краще відтворює як абсолютні відхилення фактичного часовогу ряду, так і тенденцію локальних трендів, та також демонструє значне зменшення затримки при прогнозуванні точок перелому локального тренду.

Результати роботи можуть бути використані для прогнозування поведінки гетероскедастичних сильнозалежних часових рядів в фінансовій сфері діяльності.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. — 1986. — № 31. — P. 307–327.
2. *Baillie R.T., Bollerslev T., and Mikkelsen H.O*. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. — 1996. — №4. — P. 3–30.
3. *Бідюк П.І.* Системний підхід до прогнозування на основі моделей часових рядів // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 3. — С. 88–110.
4. *Zivot E., Wang J.* Modeling Financial Time Series with S-PLUS. — NY: Springer-Verlag, 2003. — 705 p.
5. *Palma W.* Long-Memory Time Series: Theory and Methods. — NewJersey: John Wiley& Sons, Inc, 2007. — 304 p.
6. *Strobach P*. Linear Prediction Theory: A Mathematical Basis for Adaptive Systems. — NY: Springer-Verlag, 1990. — 422 p.
7. *Зражевський О.Г.* Системний підхід до відновлення функціональних залежностей нестаціонарних часових рядів різної структури // Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня ктн. — 2011. — 20 с.
8. *Baillie R. T., Kapetanios G., F.Papailias F* .Modified information criteria and selection of long memory time series models // Computational Statistics and Data Analysis. — 2014. — №76. — P. 116–131.
9. *Taqqu M,S., Teverovsky V.,Willinger W.* Estimators for long-range dependence: An empirical study // Fractals. — 1995. — P. 785–798.
10. *Durbin J.* The fitting of time series models // Rev. Int. Stat. — 1960. — **28**. — P. 233–244.
11. *Тараскин А.Ф.* Статистический анализ временных рядов авторегрессии и скользящего среднего. — Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 1998. — 64 с.
12. *Diebold Francis X.* Comparing Predictive Accuracy, Twenty Years Later: A Personal Perspective on the Use and Abuse of Diebold–Mariano Tests // Journal of Business & Economic Statistics. — 2015. — **33**, № 1. — 16 p.

Надійшла 02.06.2015