УДК 519.85
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.1.11

ЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА РОЗМІЩЕННЯХ З ІМОВІРНІСНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ: ВЛАСТИВОСТІ І РОЗВ'ЯЗАННЯ

О.О. ЄМЕЦЬ, Т.М. БАРБОЛІНА

Досліджено властивості лінійних задач оптимізації на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю, постановку яких здійснено на основі введення лінійного порядку на множині дискретних випадкових величин. Установлено властивості безумовної задачі, у якій коефіцієнти цільової функції або елементи мультимножини (але не те й те одночасно) є дискретними випадковими величинами. Ґрунтуючись на властивостях розв'язку безумовної задачі з детермінованими коефіцієнтами цільової функції, доведено властивості розв'язку для задачі, у якій коефіцієнти цільової функції є випадковими величинами. Запропоновано схему методу гілок і меж для розв'язання лінійних задач оптимізації на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю, у якій також запропоновано правила галуження та відсікання множин.

ВСТУП

Актуальним напрямом сучасної теорії оптимізації є дослідження (див., зокрема [1–5]) задач комбінаторної природи: вивчаються як загальні властивості задач комбінаторної оптимізації, так і методи розв'язання окремих класів задач, зокрема евклідових задач комбінаторної оптимізації (див., наприклад, [4–5]).

Розглянемо спочатку необхідні поняття й означення евклідової комбінаторної оптимізації, спираючись переважно на працю [4]. Під мультимножиною розуміємо сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Будь-яку мультимножину $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ можна задати основою $S(G)$, тобто кортежем усіх її різних елементів, і кратністю — кількістю повторень кожного елемента основи цієї мультимножини. Кратність елемента $g \in S(G)$ позначають через $k_G(g)$. Мультимножину B з основою $S(B)$ називають підмультимножиною мультимножини A з основою $S(A)$ (позначають як $B \subset A$), якщо $S(B) \subset S(A)$ і для кожного елемента $a \in S(B)$ виконується нерівність $k_B(a) \le k_A(a)$. Якщо $B \subset A$, то різниця $A-B$ мультимножин A і B містить елементи мультимножини A, причому $\forall\, a \in S(A)$ $k_{A-B}(a)=k_A(a)-k_B(a)$ ($k_{A-B}(a) \ge 0$).

Евклідовою комбінаторною множиною називають множину, різними елементами якої є різні впорядковані k-вибірки з мультимножини вигляду

$$(g_{i_1},...,g_{i_k}), \tag{1}$$

де $g_{i_j} \in G$, $i_j \ne i_t$ $\forall\, i_j, i_t \in J_\eta$, $\forall\, j,t \in J_k$ (тут і далі через J_n позначено множину n перших натуральних чисел). Прикладами евклідових комбінаторних множин є:

– загальна множина розміщень $E_\eta^k(G)$ — множина всіх k-вибірок вигляду (1) з мультимножини G;

– загальна множина переставлень $E_k(G)$ — множина всіх k-вибірок вигляду (1) з мультимножини G за умови $k = \eta$.

Поняття евклідової комбінаторної множини дозволяє виділити з множини задач оптимізації комбінаторного типу евклідові задачі комбінаторної оптимізації, що полягають у знаходженні екстремуму та екстремалі функції кількох змінних на деякій евклідовій комбінаторній множині.

Іншим актуальним напрямом досліджень у галузі оптимізації є дослідження оптимізаційних задач з урахуванням різних невизначеностей, у тому числі ймовірнісної (див., наприклад, [6–9]). Такі задачі виникають і в комбінаторній оптимізації. З одного боку, досліджуються властивості окремих класів комбінаторних задач з урахуванням того чи іншого виду невизначеності: екстремальні задачі на графах з інтервальними та нечіткими параметрами [10; 11], нечітка і стохастична задача комівояжера [12; 13], стохастичні задачі, пов'язані з комбінаторними оптимізаційними задачами на допустимій множині $F \subset \{0,1\}^n$ [14] тощо. З другого боку, вивчаються властивості досить широких класів евклідових задач комбінаторної оптимізації з інтервальною та нечіткою невизначеністю. Зокрема, побудовані й досліджені інтервальні моделі задач геометричного проектування, їх відображень в евклідові простори [15–17], деякі результати стосовно задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах узагальнено у праці [18]. Водночас майже не досліджувалися оптимізаційні задачі на евклідових комбінаторних множинах з імовірнісною невизначеністю.

Мета роботи — вивчення властивостей комбінаторних стохастичних задач з лінійною цільовою функцією. Автори використовують підхід до формулювання оптимізаційних задач, який ґрунтується на введенні відношення порядку на множині відповідних величин. Такий підхід для задач з інтервальною та нечіткою невизначеністю розглянуто, зокрема у працях [18; 19], його поширення на оптимізаційні задачі з імовірнісною невизначеністю запропоновано в [20]. Ця робота є продовженням [21; 22].

ПОСТАНОВКИ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ З ІМОВІРНІСНОЮ НЕВЗНАЧЕНІСТЮ НА ОСНОВІ ВІДНОШЕННЯ ПОРЯДКУ

Позначатимемо дискретні випадкові величини великими латинськими літерами ($A, B, \ldots$), їх можливі значення — малими ($a^i, b^i, \ldots$). Розглядатимемо ті випадкові величини, серед можливих значень яких існує найменше. Вважатимемо, що можливі значення впорядковані за зростанням, причому найменше значення має індекс 1. Нехай також $P(\cdot)$ позначає ймовірність випадкової події, а $M(A)$ і $D(A)$ — відповідно математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини A. Визначимо також характеристичний вектор дискретної випадкової величини A як вектор $H(A) = (M(A); -D(A))$. Зазначимо, що коли випадкові величини A і B є незалежними, то для їх характеристичних векторів справедливе співвідношення $H(A+B) = H(A) + H(B)$. Дійсно, з властивостей математичного сподівання і дисперсії випливає, що для незалежних випадкових величин виконуються рівності $M(A+B)=M(A)+M(B)$, $D(A+B)=D(A)+D(B)$, звідки і випливає правильність співвідношення.

Через $<_l$ позначатимемо лексикографічне упорядкування у m-вимірному евклідовому просторі: для будь-яких $u,u'\in R^m$ $u<_l u'$, якщо перша ненульова компонента різниці $u-u'$ від'ємна. Якщо $u<_l u'$ або $u=u'$, то записуватимемо $u\le_l u'$, якщо $u'\le_l u$, то записуватимемо $u\ge_l u'$.

Вважатимемо, що порядок на множині дискретних випадкових величин уведено поданими нижче означеннями.

Означення 1. Називатимемо дві дискретні випадкові величини A,B упорядкованими у зростаючому порядку $\prec$ (і позначатимемо цей факт через $A\prec B$), якщо $H(A)<_l H(B)$ або якщо $H(A)=H(B)$, знайдеться такий t, що $a^i=b^i$, $P(A=a^i)=P(B=b^i)$ для всіх $1\le i<t$, і при цьому:

$$\text{або } a^t<b^t,\ \text{ або } a^t=b^t \ \text{ і } \ P(A=a^i)>P(B=b^i).$$

Означення 2. Називатимемо дві дискретні випадкові величини A,B упорядкованими у неспадному порядку $\preceq$ (і позначатимемо цей факт через $A\preceq B$), якщо $A\prec B$ або $A=B$.

Називатимемо дискретні випадкові величини A,B упорядкованими у незростаючому порядку $\succeq$ і записуватимемо $A\succeq B$, якщо $B\preceq A$.

Безпосередньою перевіркою властивостей можна показати, що відношення, уведене означенням 1, є лінійним порядком на множині дискретних випадкових величин. Також, якщо для дискретних випадкових величин A і B виконується умова $A\prec B$ і величини A і C, B і C — незалежні, то виконується співвідношення $A+C\prec B+C$. Крім того, як доведено у праці [21], якщо для незалежних випадкових величин $A_1,...,A_n$ і $B_1,...,B_n$ виконуються умови $A_i\preceq B_i$ $\forall i\in J_n$, то $\sum_{i=1}^n A_i\preceq\sum_{i=1}^n B_i$.

Використовуючи введений означенням 2 порядок, упорядкуємо елементи заданої скінченної множини Ω дискретних випадкових величин: $X_1\preceq X_2\preceq...\preceq X_s$. Максимумом є величина X_s, а мінімумом — величина X_1. Визначення мінімуму і максимуму дає змогу ставити задачі оптимізації для знаходження екстремальних елементів за заданих умов. Зокрема, у праці [21] розглядається розв'язання лінійних безумовних задач стохастичної оптимізації на розміщеннях у такій постановці: знайти пару $\left\langle L(X^*),X^*\right\rangle$ таку, що

$$L(X^*)=\min_{X\in E_\eta^k(\Gamma)}\sum_{j=1}^k c_jX_j\,,\ X^*=\arg\min_{X\in E_\eta^k(\Gamma)}\sum_{j=1}^k c_jX_j\,, \qquad (2)$$

де $X=(X_1,...,X_k)$, $L(X)=\sum_{j=1}^k c_jX_j$, $c_j\in R^1$, $c_j>0$ $\forall j\in J_k$, $E_\eta^k(\Gamma)$ — загальна множина розміщень з елементів мультимножини $\Gamma=\{G_1,...,G_\eta\}$, які є незалежними дискретними випадковими величинами, що мають скінченну кількість можливих значень, причому $M(G_i) \ge 0 \quad \forall i \in J_\eta$. Унаслідок скінченності мультимножини Γ множина значень функції $L(X)$ також є скінченною і на ній може бути визначений мінімум у розглянутому вище розумінні.

ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНИХ БЕЗУМОВНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ З ІМОВІРНІСНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ

Разом із задачею (2) розглянемо задачу пошуку пари $\left\langle L_1(x^*), x^* \right\rangle$ такої, що

$$L_1(x^*) = \min_{x \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^{k} C_j x_j \,, \quad x^* = \arg\min_{x \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^{k} C_j x_j \,, \tag{3}$$

де на відміну від задачі (2) коефіцієнти $C_j \quad \forall j \in J_k$ цільової функції $L_1(x) = \sum_{j=1}^{k} C_j x_j$ є незалежними дискретними випадковими величинами. Тут $x = (x_1, ..., x_k)$, а елементи мультимножини $G = \{g_1, ..., g_\eta\}$ — детерміновані.

Покажемо, що коли математичні сподівання величин $C_j \quad \forall j \in J_k$ та елементи мультимножини G є додатними, розв'язання задачі (3) можна звести до розв'язання задачі вигляду (2) з детермінованим коефіцієнтами цільової функції й елементами мультимножини, що є дискретними випадковими величинами. Вважатимемо, що елементи мультимножини G упорядковані за неспаданням:

$$0 < g_1 \le g_2 \le ... \le g_\eta \,, \tag{4}$$

а коефіцієнти цільової функції задовольняють умову

$$H(C_1) \ge_l H(C_2) \ge_l ... \ge_l H(C_k). \tag{5}$$

Розглянемо детерміновану задачу пошуку пари $\left\langle \overline{L}_1(x^*), x^* \right\rangle$ такої, що

$$\overline{L}_1(x^*) = \min_{x \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^{k} \overline{c}_j x_j \,, \quad x^* = \operatorname{argmin}_{x \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^{k} \overline{c}_j x_j \,, \tag{6}$$

де $\overline{L}_1(x) = \sum_{j=1}^{k} \overline{c}_j x_j$, $\overline{c}_j = M(C_j) \quad \forall j \in J_k$.

Як випливає з теореми 3.1 [4, с.79], однією з мінімалей задачі (6) є точка $(g_1, g_2, ..., g_k)$. Як відомо [4], множина вершин опуклої оболонки множини $E_\eta^k(G)$ — загального багатогранника розміщень — є підмножиною множини $E_\eta^k(G)$. Нехай для суміжних вершин x і x' загального багатогранника розміщень виконується умова $L(x) = L(x')$. Згідно з критерієм суміжності вершин загального багатогранника розміщень [4] вершина x є суміжною з вершиною x', якщо вона одержана з вершини x' переставленням компонент, що дорівнюють елементам g_t, g_{t+1} ($g_t \neq g_{t+1}$) або заміною g_{k-r} (або $g_{\eta-r+1}$) на $g_{\eta-r}$ (чи g_{k-r+1} відповідно) за умови $g_{k-r} \neq g_{\eta-r}$ ($g_{\eta-r+1} \neq g_{k-r+1}$). Якщо вершина x отримана з x' заміною $x'_i = g_{k-r}$ на $x_i = g_{\eta-r}$, то

$$\overline{L}_1(x) - \overline{L}_1(x') = \sum_{j=1}^{k} \overline{c}_j (x'_j - x_j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \overline{c}_j (x'_j - x_j) + \overline{c}_i (g_{k-r} - g_{\eta-r}) \neq 0,$$

оскільки $x'_j = x_j \quad \forall j \neq i \quad \forall j \in J_k$, $g_{k-r} \neq g_{\eta-r}$, $\overline{c}_j = M(C_j) > 0 \quad \forall j \in J_k$. Такий самий результат отримується, якщо $x'_i = g_{\eta-r+1}$ замінюється на $x_i = g_{k-r+1}$. У випадку, коли вершина x отримана з x' переставленням компонент $x'_i = g_t$ і $x'_q = g_{t+1}$ ($g_t \neq g_{t+1}$), тоді

$$\overline{L}_1(x') - \overline{L}_1(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i; j \neq q}}^{k} \overline{c}_j (x'_j - x_j) + \overline{c}_i (x'_i - x_i) + \overline{c}_q (x'_q - x_q) =$$

$$= \overline{c}_i (x'_i - x_i) + \overline{c}_q (x'_q - x_q).$$

Оскільки $x'_i = x_q$, $x'_q = x_i$, то $\overline{L}_1(x') = \overline{L}_1(x)$, якщо $(x'_i - x_i)(\overline{c}_i - \overline{c}_{i+1}) = 0$. Ураховуючи, що $x'_i \neq x_i$, дістаємо $\overline{c}_i = \overline{c}_{i+1}$.

Таким чином, якщо для суміжних вершин x і x' загального багатогранника розміщень виконується умова $\overline{L}_1(x') = \overline{L}_1(x)$, то коефіцієнти цільової функції, що відповідають нерівним елементам $x_i \neq x'_i$, $x_q \neq x'_q$, рівні між собою: $\overline{c}_i = \overline{c}_q$.

Нехай точки x' і x^* є мінімалями функції $\overline{L}_1(x)$.. Це означає, що знайдеться послідовність вершин $x^1,...,x^r$ таких, що x^i, x^{i+1} ($i \in J_{r-1}$) є суміжними вершинами і $\overline{L}_1(x^1) = ... = \overline{L}_1(x^r)$. Тоді для кожного індексу l такого, що $x'_l \neq x^*_l$, знайдеться така множина індексів $I = \{i_1,...i_p\}$, що $\overline{c}_{i_1} = ... = \overline{c}_{i_p}$ і мультимножини $\{x'_{i_1},...,x'_{i_p}\}$ і $\{x^*_{i_1},...,x^*_{i_p}\}$ рівні. Тоді також рівні мультимножини $\{x'_1,...,x'_k\}$ і $\{x^*_1,...,x^*_k\}$. Оскільки однією з мінімалей є точка $(g_1,...,g_k)$, то будь-яка мініміль x^* задачі (6) є переставленням чисел $g_1,...,g_k$, тобто $x^* \in E_k(G')$, де $E_k(G')$ — загальна множина переставлень з мультимножини $G' = \{g_1,...,g_k\}$.. Це означає, що для будь-якої точки $x \notin E_k(G')$ виконується нерівність $\overline{L}_1(x^*) < \overline{L}_1(x)$. Оскільки

$$\overline{L}_1(x) = \sum_{j=1}^{k} \overline{c}_j x_j = \sum_{j=1}^{k} M(C_j) x_j = M\left(\sum_{j=1}^{k} C_j x_j\right) = M(L_1(x)),$$

то з означення 1 випливає, що також $L_1(x^*) \prec L_1(x) \quad \forall x \notin E_k(x)$.

Таким чином, мініналь задачі (3) також є переставленням елементів мультимножини G', тобто оптимум цільової функції $L_1^* = \sum_{j=1}^{k} C_j g_{i_j}$, де $g_{i_j} \in G'$, $i_j \neq i_t$ $\forall i_j, i_t \in J_k$, $\forall j, t \in J_k$. Тоді задачу (3) можна розглядати як задачу пошуку пари $\left\langle F(Y^*), Y^* \right\rangle$ такої, що

$$F(Y^*) = \min_{Y \in E_k(\Theta)} \sum_{j=1}^{k} g_j Y_j\,,\; Y^* = \operatorname*{argmin}_{Y \in E_k(\Theta)} \sum_{j=1}^{k} g_j Y_j\,, \tag{7}$$

де $F(Y) = \sum_{j=1}^{k} g_j Y_j$, мультимножина $\Theta = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$.

Оскільки, як доведено у праці [22], за умов $c_1 \geq c_2 \geq ... \geq c_k$ і $H(G_1) \leq_l ... \leq H(G_\eta)$ принаймні одна з мінімалей задачі (2) задовольняє умову $H(X_j^*) = H(G_j)$ $\forall j \in J_k$, то принаймні для однієї мінімалі Y^* задачі (7) виконуються співвідношення $H(Y_j^*) = H(C_j)$ $\forall j \in J_k$. Нехай основа $S(\Theta_H)$ мультимножини

$$\Theta_H = \{H(C_1), ..., H(C_k)\} \tag{8}$$

містить n елементів, упорядкованих як $\geq_l$, відповідні кратності позначатимемо через n_i. Розіб'ємо мультимножину Θ на підмультимножини вигляду $\Theta_i = \{C_{\eta_i}, ..., C_{\eta_i + n_i - 1}\}$, де величини η_i визначаються співвідношеннями:

$$\eta_1 = 1\,,\; \eta_{i+1} = \eta_i + n_i = 1 + \sum_{j=1}^{i} n_j \text{ для } i \in J_n\,. \tag{9}$$

Тоді мінімаль Y^* задачі (7) задовольняє умову $(Y_{\eta_i}^*, ..., Y_{\eta_i + n_i - 1}^*) \in$ $\in E_{n_i}(\Theta_i)$ і оптимум F^* задачі (7) може бути визначений так: $F^* = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=\eta_i}^{\eta_i + n_i - 1} g_j C_{l_j} \right)$, де $C_{l_j} \in \Theta_i$. Тоді також одна з мінімалей x^* задачі (3) задовольняє умову $(x_{\eta_i}^*, ..., x_{\eta_i + n_i - 1}^*) \in E_{n_i}(G_i)$, де мультимножини $G_i = \{g_{\eta_i}, ..., g_{\eta_i + n_i - 1}\}$, величини n_i і η_i визначаються так само, як і вище. При цьому оптимум L_1^* функції $L_1(X)$ визначається так: $L_1^* = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=\eta_i}^{\eta_i + k_i - 1} C_j g_{l_j} \right)$, де $g_{l_j} \in G_i$. Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1. Нехай для елементів мультимножини та коефіцієнтів цільової функції в задачі (3) виконуються умови (4) і (5) відповідно; мультимножина Θ_H визначається згідно з виразом (8), $n = \left| S(\Theta_H) \right|$, n_i — кратності елементів $S(\Theta_H)$, упорядкованих у порядку $\geq_l$; для всіх $i \in J_n$

$G_i = \{g_{\eta_i}, ..., g_{\eta_i + n_i - 1}\}$, де η_i визначаються згідно зі співвідношенням (9). Тоді для деякого розв’язку $\left\langle L_1(x^*), x^* \right\rangle$ виконуються умови:

$$(x^*_{\eta_i}, ..., x^*_{\eta_i + n_i - 1}) \in E_{n_i}(G_i)\,,\ L_1(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=\eta_i}^{\eta_i + k_i - 1} C_j g_{l_j} \right),\ \text{де}\ g_{l_j} \in G_i\,.$$

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ГІЛОК І МЕЖ

Розглянемо задачу пошуку пари $\left\langle L(x^*), x^* \right\rangle$ такої, що

$$L(x^*) = \min_{x \in S} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j\,,\quad x^* = \arg\min_{x \in S} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \tag{10}$$

за умови

$$x = (x_1, ..., x_k) \in E^k_\eta(\Gamma), \tag{11}$$

де для коефіцієнтів c_j цільової функції та елементів мультимножини $\Gamma = \{g_1, ..., g_\eta\}$ виконується одна з двох умов:

1) $(c_1, ..., c_k) \in R^k$, $c_j > 0 \quad \forall j \in J_k$, елементи мультимножини є незалежними дискретними випадковими величинами з додатним математичним сподіванням, відповідно S — деяка область k-вимірних дискретних випадкових величин;

2) коефіцієнти цільової функції є незалежними дискретними випадковими величинами, причому $M(c_j) > 0 \quad \forall j \in J_k$; $g_i \in R^1$, $g_i > 0 \quad \forall i \in J_\eta$ і $S \subset R^k$.

Розглянемо особливості застосування методу гілок і меж для розв’язання задачі (10)–(11). Допустиму множину задачі (10)–(11) позначатимемо через Q, тобто $Q = S \cap E^k_\eta(\Gamma)$. Галуження проводитимемо, надаючи певне можливе значення змінним x_j. Це означає, що множина $Q' \subset Q$, що отримується на деякому рівні галуження у методі гілок і меж, визначається такими умовами:

$$x_j = g_{r_j}\,,\ j \in I\,, \tag{12}$$

де I — деяка множина індексів $I \subset J_k$, $|I| = t$. При цьому у множині Q' зафіксовані значення змінних x_j, $j \in I$. Змінні, що залишилися невизначеними, позначимо як $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_\tau$ $(\tau = k - t)$. Позначимо також $C_B = \{c_j \mid j \in I\}$ — мультимножину коефіцієнтів цільової функції, значення змінних у цільовій функції при яких зафіксовані, $\tilde{C} = C - C_B$ — мультимножину коефіцієнтів, значення змінних при яких ще не визначені. Змінні $\tilde{X}_i$ $(i \in J_\tau)$ нумеруватимемо таким чином, щоб елементи мультимножини $\tilde{C} = \{\tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_\tau\}$ були упорядковані за незростанням (тобто $\tilde{c}_1 \succeq ... \succeq \tilde{c}_\tau$, якщо коефіцієнти цільової функції є випадковими величинами, і $\widetilde{c}_1 \geq \ldots \geq \widetilde{c}_\tau$ у випадку детермінованих). Нехай також $\Gamma_B = \{g_j \mid j \in I\}$, $\widetilde{\Gamma} = \Gamma - \Gamma_B$. Елементи мультимножини $\widetilde{\Gamma}$ позначатимемо через $\widetilde{g}_i$ ($i \in J_p$, $p = |\widetilde{\Gamma}| = \eta - t$) і вважатимемо впорядкованими у неспадному порядку: $\widetilde{g}_1 \preceq \ldots \preceq \widetilde{g}_p$, якщо елементи мультимножини — випадкові величини, $\widetilde{g}_1 \leq \ldots \leq \widetilde{g}_p$ — якщо детерміновані. Розглянемо величину

$$\xi(Q') = \sum_{j \in I} c_j g_{r_j} + \sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i \widetilde{g}_i \,. \tag{13}$$

Теорема 3. Нехай множина $Q' \subset Q$ визначається згідно з формулою (12). Тоді для будь-якої точки $x = (x_1, \ldots, x_k) \in Q'$ виконується співвідношення $H(\xi(Q')) \leq_l H(L(X))$, де величина $\xi(Q')$ визначається згідно з величиною (13).

Доведення. Нехай $\widetilde{L}(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i \widetilde{x}_i$. Оскільки характеристичний вектор суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх характеристичних векторів, то $H(L(x)) = H\left(\sum_{j \in I} c_j g_{r_j}\right) + H\left(\sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i \widetilde{x}_i\right) = H\left(\sum_{j \in I} c_j g_{r_j}\right) + H(\widetilde{L}(\widetilde{x}))$ і $H(\xi(Q')) = H\left(\sum_{j \in I} c_j g_{r_j}\right) + H\left(\sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i \widetilde{g}_i\right)$, отже, умова $H(\xi(Q')) \leq_l H(L(x))$ рівносильна умові $H(\widetilde{L}(\widetilde{x}')) \leq_l H(\widetilde{L}(\widetilde{x}))$, де $\widetilde{x}'_i = \widetilde{g}_i$ $\forall i \in J_\tau$. Таким чином, необхідно показати, що для будь-якої точки $\widetilde{x} \in E_p^\tau(\widetilde{\Gamma})$ виконуються співвідношення $H(\widetilde{L}(\widetilde{x}')) \leq_l H(\widetilde{L}(\widetilde{x}'))$.

Розглянемо спочатку випадок, коли коефіцієнти цільової функції є детермінованими величинами, а елементи мультимножини — випадковими. Оскільки елементи мультимножини $\widetilde{\Gamma}$ упорядковані у неспадному порядку, то $H(\widetilde{g}_1) \leq_l \ldots \leq_l H(\widetilde{g}_k)$. Ураховуючи також упорядкування в незростаючому порядку коефіцієнтів цільової функції, згідно з теоремою 2 [22] маємо, що принаймні одна з мінімалей $\widetilde{x}^*$ функції $\widetilde{L}(\widetilde{x})$ на множині $E_p^\tau(\widetilde{\Gamma})$ задовольняє співвідношення $H(\widetilde{x}_j^*) = H(\widetilde{g}_j)$ $\forall j \in J_\tau$. Отже, $\widetilde{L}(x^*) \preceq \widetilde{L}(\widetilde{x})$ $\forall \widetilde{x} \in E_p^\tau(\widetilde{\Gamma})$, звідки $H(\widetilde{L}(x^*)) \leq_l H(\widetilde{L}(\widetilde{x}))$. Також

$$M(\widetilde{L}(\widetilde{x}')) = \sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i M(\widetilde{x}'_i) = \sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i M(\widetilde{g}'_i) = \sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i M(\widetilde{x}'_i) = M(\widetilde{L}(\widetilde{x}^*)) \,,$$

$$D(\widetilde{L}(\widetilde{x}')) = \sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i^{\,2} D(\widetilde{x}'_i) = \sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i^{\,2} D(\widetilde{g}_i) = \sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i^{\,2} D(\widetilde{x}_i^*) = D(\widetilde{L}(\widetilde{x}^*)) \,,$$

звідки $H(\widetilde{L}(\widetilde{x}^*)) = H(\widetilde{L}(\widetilde{x}'))$. Таким чином, для будь-якої точки $\widetilde{x} \in E_p^\tau(\widetilde{\Gamma})$ виконуються співвідношення $H(\widetilde{L}(\widetilde{x}')) \le_l H(\widetilde{L}(x'))$.

Нехай тепер коефіцієнти цільової функції є випадковими величинами, а елементи мультимножини — детермінованими. Згідно з теоремою 1 оптимум цільової функції $\widetilde{L}^* = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=\eta_i}^{\eta_i+n_i-1} \widetilde{c}_j \widetilde{g}_{l_j} \right)$, де $\widetilde{g}_{l_j} \in \widetilde{G}_i = \{\widetilde{g}_{\eta_i}, ..., \widetilde{g}_{\eta_i+n_i-1}\}$, n_i — кратності елементів основи мультимножини $\{H(\widetilde{c}_1), ..., H(\widetilde{c}_k)\}$, упорядкованих як $\ge_l$, η_i визначаються згідно зі співвідношенням (9). Тоді $H(\widetilde{c}_{\eta_i}) = ... = H(\widetilde{c}_{\eta_i+n_i-1})$. Оскільки

$$M(\widetilde{L}^*) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=\eta_i}^{\eta_i+k_i-1} M(\widetilde{c}_j) \widetilde{g}_{l_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=\eta_i}^{\eta_i+k_i-1} M(\widetilde{c}_j) \widetilde{g}_j \right) = M(\widetilde{L}(\widetilde{x}')),$$

аналогічно $D(\widetilde{L}^*) = D(\widetilde{L}(\widetilde{x}'))$, то $H(\widetilde{L}(\widetilde{x}^*)) = H(\widetilde{L}(\widetilde{x}'))$ і для будь-якої точки $\widetilde{x} \in E_p^\tau(\widetilde{\Gamma})$ виконуються співвідношення $H(\widetilde{L}(\widetilde{x}')) \le_l H(\widetilde{L}(\widetilde{x}))$. Теорему доведено.

Наслідок 3.1. Якщо існує допустимий розв’язок x' задачі (10)–(11), для якого виконується умова $H(L(x')) <_l H(\xi(Q'))$, то множина Q' не містить оптимального розв’язку.

Зауваження. Величину $H(\xi(Q'))$ можна використовувати як оцінку в методі гілок і меж у випадку, коли для всіх різних значень цільової функції відповідні характеристичні вектори також є різними. У противному випадку залишається необхідність перебирання тих розв’язків, для яких характеристичні вектори відповідних значень цільової функції є рівними.

Наслідок 3.1 визначає умову відсікання множини у методі гілок і меж при розв’язанні задачі (10)–(11): якщо для множини Q' виконується умова $H(\xi(Q')) >_l H(L(x'))$ (x' — деякий допустимий розв’язок, отриманий на попередніх ітераціях методу гілок і меж), то множина Q' надалі не підлягає галуженню, тобто відсікається.

Таким чином, пропонується така схема методу гілок і меж з використанням відсікання з наслідку 3.1 для задачі (10)–(11).

1. Розбиваємо множину Q на підмножини Q_{r_1}, що визначені умовою (12), де $I = \{1\}$, g_{r_1} — різні елементи мультимножини Γ. Далі використовуватимемо позначення $Q_{r_1 r_2 \ldots r_i}$ для множини, у якій зафіксовані значення i змінних $x_1, \ldots x_i$, причому $r_1, \ldots, r_i$ — індекси відповідних елементів з мультимножини Γ.

2. Для кожної із множин Q_{r_1} знаходимо характеристичний вектор величини (13). Для подальшого галуження обираємо множину, для якої відповідний характеристичний вектор передує всім іншим у порядку $\le_l$ (нехай це множина Q_s).

3. Розгалужуємо Q_s на підмножини Q_{sr_2}, для кожної з яких знаходимо характеристичний вектор величини (13).

4. Продовжуємо процес галуження доти, доки не будуть зафіксовані значення всіх змінних (тобто не справджуватиметься умова $i = k$). Якщо жодне з отриманих при цьому розміщень не належить до множини S, то повертаємося на попередній рівень галуження і розгалужуємо наступну з множин на цьому рівні. Якщо таких множин немає, то повертаємося на ще один рівень і т.д. У випадку, коли не знайдено допустимого розв'язку і на першому рівні не залишилося негалужених множин, то задача розв'язку не має.

5. Нехай знайдено допустимий розв'язок x^h ($h = 1$), характеристичний вектор відповідного значення цільової функції $H(L^h) = H(L(x^h))$.

6. Відкидаємо підмножини $Q_{r_1 r_2 \ldots r_i}$, для яких

$$H(L^h) <_l H(\xi(Q_{r_1 r_2 \ldots r_i})). \tag{14}$$

7. Продовжуємо галуження множин за вказаним вище правилом. Якщо для деякої підмножини $Q_{r_1 r_2 \ldots r_i}$ виконується умова (14), то ця множина відкидається і надалі не розгалужується. Якщо отримано множину $Q_{r_1 r_2 \ldots r_k}$, тоді:

– перевіряємо, чи належить отримане розміщення множині S; якщо ні, то множина відкидається;

– порівнюємо $\xi(Q_{r_1 r_2 \ldots r_k})$ з L^h; якщо $\xi(Q^k_{r_1 \ldots r_k}) \prec L^h$, то збільшуємо h на одиницю і покладаємо $L^h = L(x^h)$, де $x^h = (g_{r_1}, \ldots, g_{r_k})$.

8. Процес завершується, коли не залишиться негалужених множин, для яких характеристичний вектор величини (13) лексикографічно менший за $H(L^h)$. Тоді розв'язком є пара $\left\langle L(x^*), x^* \right\rangle$, де $x^* = x^h$.

Приклад. Проілюструємо розглянуті вище правила галуження і відсікання множин у методі гілок і меж при розв'язанні задачі мінімізації функції $L(X) = 2X_1 + X_2 + X_3$ на загальній множині розміщень з елементів мультимножини $\Gamma = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$, які є дискретними випадковими величинами, заданими рядами розподілу згідно з таблицею.

Ряди розподілу випадкових величин з наведеного прикладу

Величини	$G_1 = G_2$		G_3			G_4	
Значення величин	4	9	4	6	9	5	9
Відповідні ймовірності	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Характеристичні вектори елементів мультимножини мають вигляд: $H(G_1) = (7;-6)$, $H(G_3) = H(G_4) = (7;-4)$. Таким чином, $G_1 \prec G_3$, $G_1 \prec G_4$. Ураховуючи також, що перше можливе значення G_3 менше від першого можливого значення G_4, отримуємо, що $G_3 \prec G_4$. Таким чином, $G_1 = G_2 \prec G_3 \prec G_4$.

Розгалужуємо множину $E_4^3(\Gamma)$, використовуючи порядок змінних, що відповідає упорядкуванню $c_1 = 2 > c_2 = c_3 = 1$, $I = \{1\}$. Отже, $C_B = \{2\}$, $\widetilde{C} = \{1,1\}$: $Q_1 = \{X_1 = G_1\}$, $Q_3 = \{X_1 = G_3\}$, $Q_4 = \{X_1 = G_4\}$. Знаходимо відповідні величини (13) та їх характеристичні вектори.

Для $Q_1 = \{X_1 = G_1\}$ маємо: $\Gamma_B = \{G_1\}$, $\widetilde{\Gamma} = \{G_2, G_3, G_4\}$. У величині (13): перший доданок $\sum_{j \in I} c_j g_{r_j} = c_1 G_1 = 2G_1$, другий — $\sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i \widetilde{g}_i = 1 \cdot G_2 + 1 \cdot G_3 = = G_2 + G_3$, тобто $\xi_1 = \xi(Q_1) = 2G_1 + G_2 + G_3$, $H(\xi_1) = (14; -24) + (7; -6) + + (7; -4) = (28; -34)$. Для $Q_3 = \{X_1 = G_3\}$ $\Gamma_B = \{G_3\}$, $\widetilde{\Gamma} = \{G_1, G_2, G_4\}$; доданки у величині (13): $\sum_{j \in I} c_j g_{r_j} = 2G_3$, $\sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i \widetilde{g}_i = G_1 + G_2$. Тоді $\xi_2 = \xi(Q_3) = = 2G_3 + G_1 + G_2$. $H(\xi_2) = (28; -28)$. Нарешті $\xi_3 = \xi(Q_4) = 2G_4 + G_1 + G_2$, $H(\xi_3) = (28; -28)$. Оскільки $H(\xi_1) <_l H(\xi_2) = H(\xi_3)$, обираємо для галуження підмножину Q_1.

Розгалужуючи Q_1, отримаємо підмножини $Q_{12} = \{X_1 = G_1, X_2 = G_2\}$, $Q_{13} = \{X_1 = G_1, X_2 = G_3\}$, $Q_{14} = \{X_1 = G_1, X_2 = G_4\}$. Знаходимо для цих множин характеристичні вектори величин (13). Для Q_{12} маємо $I = \{1,2\}$, $C_B = \{2,1\}$, $\widetilde{C} = \{1\}$, $\Gamma_B = \{G_1, G_2\}$, $\widetilde{\Gamma} = \{G_3, G_4\}$; доданки у величині (13): $\sum_{j \in I} c_j g_{r_j} = 2G_1 + G_2$, $\sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i \widetilde{g}_i = G_3$, звідки $\xi_4 = \xi(Q_{12}) = 2G_1 + G_2 + G_3 = \xi_1$. Аналогічно $\xi_5 = \xi(Q_{13}) = (2G_1 + G_3) + G_2 = \xi_1$, $\xi_6 = \xi(Q_{14}) = (2G_1 + G_4) + G_2$, $H(\xi_5) = H(\xi_6) = H(\xi_1)$.

Виберемо для галуження підмножину $Q_{12} = \{X_1 = G_1, X_2 = G_2\}$. Отримаємо множини, у яких зафіксовані значення усіх змінних:

$Q_{123} = \{X_1 = G_1, X_2 = G_2, X_3 = G_3\}$, звідки $X^1 = (G_1, G_2, G_3) = (G_1, G_1, G_3)$, $L^1 = \xi(Q_{123}) = 2G_1 + G_2 + G_3$, $H(L^1) = (28; -34)$;

$Q_{124} = \{X_1 = G_1, X_2 = G_2, X_3 = G_4\}$, тоді $\xi(Q_{124}) = 2G_1 + G_2 + G_4$ $H(\xi(Q_{124})) = H(L^1)$, але $L^1 \prec \xi(Q_{124})$, оскільки суми $2G_1 + G_2 + G_3$ і $2G_1 + G_2 + G_4$ відрізняються лише останнім доданком і при цьому $G_3 \prec G_4$.

Оскільки $L^1 <_l H(\xi(Q_3)) = H(\xi(Q_4))$, то підмножини Q_3 і Q_4 надалі не розглядаються. Відкидати підмножини Q_{13} і Q_{14} підстав немає, оскільки $H(\xi(Q_{13})) = H(\xi(Q_{14})) = H(L^1)$.

Оберемо для галуження підмножину $Q_{13} = \{X_1 = G_1, X_2 = G_3\}$. Дістаємо:

$Q_{132} = \{X_1 = G_1, X_2 = G_3, X_3 = G_2\}$, тоді $\xi(Q_{132}) = 2G_1 + G_3 + G_2 = L^1$, $X^2 = (G_1, G_3, G_1)$;

$Q_{134} = \{X_1 = G_1, X_2 = G_3, X_3 = G_4\}$, тоді $\xi(Q_{134}) = 2G_1 + G_3 + G_4$, $H(\xi(Q_{134})) = (28;-32) >_l H(L^1)$, звідки також $L^1 \prec \xi(Q_{134})$.

Нарешті розгалуження підмножини $Q_{14} = \{X_1 = G_1, X_2 = G_4\}$ дає такі результати:

$Q_{142} = \{X_1 = G_1, X_2 = G_4, X_3 = G_2\}$, $\xi(Q_{142}) = 2G_1 + G_4 + G_2 = \xi(Q_{124})$, тобто $L^1 \prec \xi(Q_{142})$;

$Q_{143} = \{X_1 = G_1, X_2 = G_4, X_3 = G_3\}$, тоді $\xi(Q_{143}) = 2G_1 + G_4 + G_3 = = \xi(Q_{134})$, звідки $L^1 \prec \xi(Q_{143})$.

Таким чином, мінімумом функції $L(X) = 2X_1 + X_2 + X_3$ на множині $E_4^3(\Gamma)$ є випадкова величина $L^1 = 2G_1 + G_1 + G_3$, причому це значення досягається у двох точках: $X^1 = (G_1, G_1, G_3)$ та $X^2 = (G_1, G_3, G_1)$.

ВИСНОВКИ

У роботі досліджувалися лінійні оптимізаційні задачі на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю, постановку яких виконано на основі введення відношення порядку на множині дискретних випадкових величин. Установлено властивості розв'язку безумовної задачі, у якій коефіцієнти цільової функції є дискретними випадковими величинами, а елементи мультимножини — детермінованими. Запропоновано схему методу гілок і меж для лінійних оптимізаційних задач на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю, спосіб галуження та відсікання множин у цій схемі. Як перспективний напрям подальших досліджень вбачається удосконалення процедури оцінювання множин й обґрунтування інших правил їх відсікання у межах розв'язання методом гілок і меж таких задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Сергиенко И.В.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая. — К. : Наук. думка, 1981. —288 с.
2. *Згуровский М.З.* Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами / М.З. Згуровский, А.А. Павлов. — К.: Наук. думка, 2010. —573 с.
3. *Сергиенко И.В.* Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации / И.В. Сергиенко, Л.Ф. Гуляницкий, С.И. Сиренко // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 5. — С. 71–83.
4. *Стоян Ю.Г.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. — К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. — 188 с. — Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487.
5. *Емец О.А.* Комбинаторная оптимизация на размещениях / О.А. Емец, Т.Н. Барболина. — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с. — Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/473.

6. *Сергиенко И.В.* Применение методов стохастической оптимизации для исследования трансформационных процессов в экономике / И.В. Сергиенко, М.В. Михалевич // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2004. — № 4. — С. 7–29.
7. *Ермольев Ю.М.* Стохастические модели и методы в экономическом планировании / Ю.М. Ермольев, А.И. Ястремский. — М.: Наука. Гл. ред. физико-матем. лит-ры, 1979. — 256 с.
8. *Наумов А.В.* Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием / А.В. Наумов, С.В. Иванов // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 2. — С. 142–158.
9. *Marti K.* Stochastic Optimization Methods.–Springer-Verlag Berlin Heidelberg / K.Marti. — 2008. — 340 p.
10. *Перепелица В.А.* Дискретная оптимизация и моделирование в условиях неопределенности даннях / В.А. Перепелица, Ф.Б. Тебуева. — М.: Академия естествознания. — 2007. — 151 с.
11. *Тебуева Ф. Б.* Принятие решений в дискретных задачах оптимизации на графах с нечеткими весами / Ф.Б. Тебуева // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2008. —№ 6. — С. 373–391.
12. *Серая О.В.* Нечеткая задача коммивояжера / О.В. Серая // Математическое моделирование. — 2007. — № 2 (17). — С. 13–15.
13. *Серая О.В*. Стохастическая задача коммивояжера / О.В. Серая, Л.В. Бачкир // Вестн. Нац. техн. ун-та «Харьковский политехнический институт». Серия: Информатика и моделирование. — 2006. — № 40. —С. 169–173.
14. *Nikolova E.* Approximation algorithms for reliable stochastic combinatorial optimization / E. Nikolova // Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques. Springer–Berlin: Heidelberg, 2010. — P. 338–351.
15. *Стоян Ю.Г.* Оптимизационная задача размещения правильних интервальных многоугольников / Ю.Г. Стоян, Т.Е. Романова, Ю.А. Сысоева // Докл. НАН Украины. — 1998. — № 9. — С. 114–120.
16. *Гребенник И.В.* Отображение интервальных комбинаторных множеств в евклидово пространство / И.В. Гребенник, Т.Е. Романова // Проблемы машиностроения. — 2002. — **5**. — № 2. — С. 87–91.
17. *Гребенник И.В.* Классы интервальных комбинаторных оптимизационных задач геометрического проектирования / И.В. Гребенник, Т.Е. Романова, С.Б. Шеховцов // Искусственный интеллект. — 2005. — № 3. — С. 18–24.
18. *Ємець О.О.* Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах / О.О. Ємець, О.О. Ємець. — Полтава: ПУЕТ, 2011. — 239 с. — Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
19. *Сергиенко И.В.* Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ / И.В. Сергиенко, О.А. Емец, А.О. Емец // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 5. — С. 38–50.
20. *Емец О.А.* Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью / О.А. Емец, Т.Н. Барболина // Доп. НАН України. — 2014. — № 11. — С. 40–45.
21. *Ємець О.О.* Побудова і дослідження математичної моделі задачі директора зі стохастичними параметрами / О.О. Ємець, Т.М. Барболіна // Вісн. Черкаського ун-ту. Серія: Прикладна математика. Інформатика. — 2014. — № 18 (311). — С. 3–11.
22. *Барболіна Т.М.* Розв'язування лінійних безумовних оптимізаційних задач на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю / Т.М. Барболіна, О.О. Ємець // Матеріали VI Всеукр. наук.-практ. конф. за міжнародною участю «Інформатика та системні науки» (м. Полтава, 19–21 берез. 2015 р.). — Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/2384.

Надійшла 24.04.2015