

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ КРИВОЛІНІЙНИХ LEF-ПЛАСТАХ

О.М. ГЛАДКА

На основі синтезу методів комплексного аналізу і числово-аналітичних методів сумарних зображень розроблено конструктивний системний підхід до математичного моделювання фільтраційних процесів для три- та чотиризв'язних криволінійних LEF-областей, обмежених еквіпотенціальними лініями. Вирішено проблему неоднозначності побудови області комплексного квазіпотенціалу для багатозв'язних LEF-областей, що моделюють взаємодію нагнітальних та експлуатаційних свердловин у нафтогазових пластах. Запропоновано таку класифікацію випадків формування течії, що дозволяє уніфікувати формулювання задач на обернення квазіконформних відображень і їх різниці аналогів. Побудовано алгоритм розв'язання задачі, за яким автоматично будуються динамічні сітки, знаходяться невідомі лінії розділу течії і точки «призупинення» потоку, обчислюються фільтраційні витрати тощо. Наведено числові розрахунки для одного з варіантів формування течії.

ВСТУП

У працях [1–4] на основі синтезу числових методів комплексного аналізу (конформних і квазіконформних відображень) [5], числово-аналітичних методів сумарних зображень Г.М. Положого [6] і декомпозиції області за альтернувальним методом Шварца розроблено конструктивний підхід до математичного опису складних фільтраційних процесів, зокрема процесів витіснення у техногенно-деформованих нафтогазових чи сланцевих пластах, що моделюються спеціальними структурами — LEF-пластами [7]. Проте у випадках багатозв'язних криволінійних LEF-пластів, що моделюють взаємодію кількох нагнітальних та експлуатаційних свердловин у продуктивному пласті, складність застосування цього підходу полягає у неповній визначеності вигляду області комплексного квазіпотенціалу, що залежить від впливу багатьох чинників: конфігурації фізичної області, зокрема, взаємного розміщення свердловин, способів проведення умовних розрізів з метою зведення багатозв'язної області до однозв'язної, співвідношення між значеннями граничних потенціалів тощо.

У працях А.Я. Бомби та його учнів [8–9] запропоновано методику моделювання фільтраційних процесів для тризв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями (двома свердловинами та зовнішнім контуром живлення), а також для чотиризв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями (три свердловини у горизонтальному пласті) та лініями течії (які визначаються шуканими точками «призупинення» на зовнішньому непроникному контурі), з використанням математичного апарату комплексного аналізу. Також у цих працях на підставі евристичних міркувань з наступним логічним обґрунтуванням встановлено можливі випадки формування течії залежно від співвідношення значень граничних потенціалів і розробле-

но процедури автоматизованого вибору відповідного випадку. Запропоновано алгоритм розв'язання таких задач, що дають змогу будувати динамічні сітки, знаходити лінії розділу течії і обчислювати значення швидкості та величини різного роду перетікань, який апробовано для окремих проміжних та ключових випадків. Такий підхід зумовлює необхідність для кожного з випадків окремо будувати алгоритм числового розв'язання відповідної задачі, виконавши перед тим «алгоритм вибору випадку», що полягає у розв'язанні двох допоміжних задач.

У роботі пропонується така класифікація випадків формування течії, що дозволяє уніфікувати формулювання задач на обернення квазіконформних відображень, їх різницеві аналоги і алгоритми розв'язання, а також використати поєднання методів квазіконформних відображень з методами сумарних зображень. Не зважаючи на неоднозначність квазіконформних відображень багатозв'язних LEF-областей, у більшості випадків формування течії область комплексного квазіпотенціалу шляхом спеціального проведення умовних розрізів фізичної області може бути зведена до багатокутника, сторони якого паралельні осям координат і який розглядається як сукупність певним чином «склеєних» між собою прямокутників. Це дозволяє повною мірою використати переваги числово-аналітичного методу сумарних зображень для знаходження розв'язків відповідних підзадач і, зокрема, розпаралелити обчислювальний процес.

Якщо сформулювати цю задачу як задачу математичної фізики, то отримаємо істотно нелінійну інтегро-диференціальну крайову задачу (адже функція течії, що характеризує локальні витрати, визначається через квазіпотенціал за допомогою криволінійних інтегралів). Натомість перехід до оберненого квазіконформного відображення і використання теорії комплексного потенціалу дозволяють локалізувати нелінійність.

ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У роботі методика математичного моделювання квазіідеальних полів, що базується на синтезі числових методів комплексного аналізу і сумарних зображень [1, 4], поширена на випадки три- та чотиризв'язної криволінійної LEF-області, що моделюють роботу відповідно двох чи трьох свердловин у пласті. Нелінійна крайова задача, що виникає при цьому, зводиться до обернення квазіконформного відображення даної області з умовними розрізами вздовж деяких ліній течії (ліній розділу течії, які знаходяться у процесі розв'язання задачі) на відповідну область комплексного квазіпотенціалу, побудова якої, загалом, є неоднозначною. Цю проблему вирішено спеціальним проведенням умовних розрізів і поданням області комплексного квазіпотенціалу як об'єднання чотирьох суміжних прямокутників.

Розглядається криволінійна LEF-область G_z ($z = x + iy$), яка є тризв'язною, обмеженою замкнутими еквіпотенціальними лініями — двома внутрішніми контурами свердловин L_1 , L_2 і зовнішнім контуром живлення L_3 (випадок тризв'язної області), чи чотиризв'язною, обмеженою трьома еквіпотенціальними лініями (контурами свердловин) L_s , $s = 1, 2, 3$ ($L_s = \{z : f_s(x, y) = 0\}$) та непроникним контуром $L = \{z : f(x, y) = 0\}$ (випадок чотиризв'язної області), із заданими на еквіпотенціалах відповідними граничними потенціалами: $\varphi|_{L_s} = \Phi_s$, $s = 1, 2, 3$. Процес витіснення опису-

ється рівняннями [2–4]: $\bar{v} = \kappa_f \text{grad } \varphi$ і $\text{div } \bar{v} = 0$, де $\bar{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$ — швидкість фільтрації; $\kappa_f = \kappa/\mu_n$ — коефіцієнт фільтрації; κ — коефіцієнт проникності пласта; μ_n — динамічна в'язкість нафти у пластових умовах.

Якщо у випадках одно- чи двозв'язної LEF-області відповідна область комплексного квазіпотенціалу є прямокутником з невідомою висотою і однозначно визначається шуканим значенням повної фільтраційної витрати (потоків через відповідну екіпотенціальну лінію L_*) $Q = \int_{L_*} -v_y dx + v_x dy$, то для заданої криволінійної області з трьома екіпотенціалами відповідна область комплексного квазіпотенціалу набуває різної геометричної конфігурації залежно від співвідношення між граничними потенціалами $\Phi_s, s = \overline{1,3}$. Проте у всіх цих випадках існує квазіконформне відображення, за якого відповідна область комплексного квазіпотенціалу являє собою багатокутник, «складений» з прямокутників, набір варіантів формування потоків є аналогічним і однозначний вибір такого варіанта (а отже, і єдиність відповідного квазіконформного відображення) визначається значеннями витрат (потоків чи перетікань) через екіпотенціали $L_s: Q_s = \int_{L_s} -v_y dx + v_x dy$ ($s = \overline{1,3}$) і невідомий потенціал φ_H точки H , через яку проходять лінії розділу течії (випадок трив'язної області, рис. 1), додатково потенціали $\varphi_{H^*}, \varphi_{H^*}$ точок

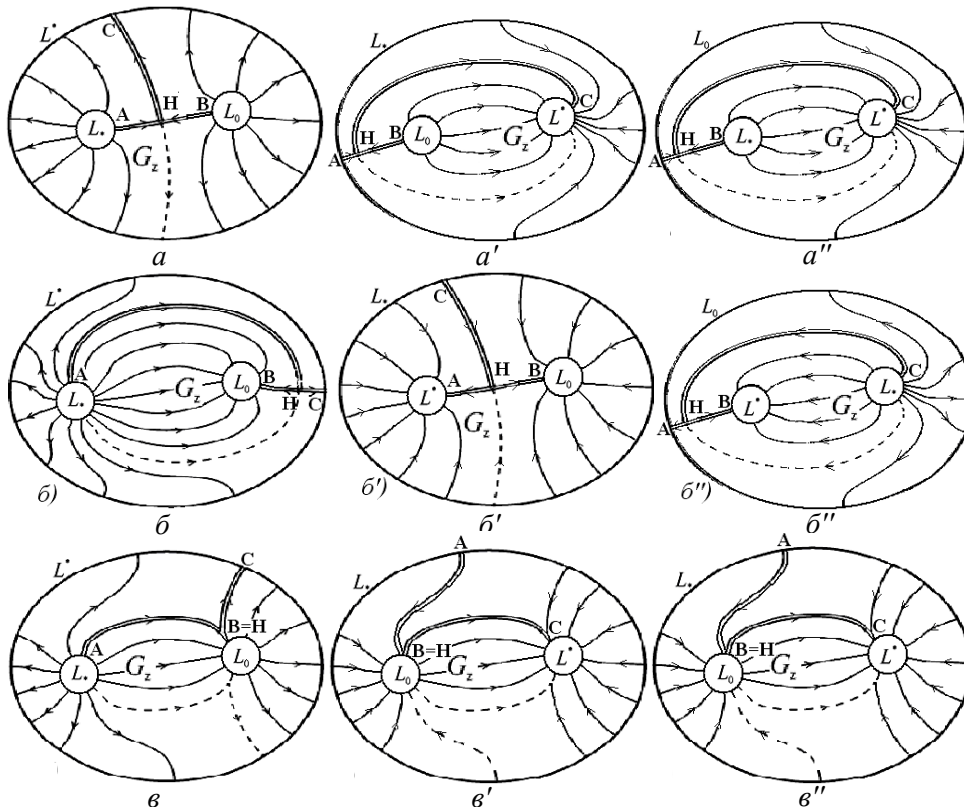


Рис. 1. Схеми формування течії для трив'язної LEF-області у випадках: 1) $Q^0 = 0$ (а, а', а''), 2) $Q_0^* = 0$ (б, б', б''), 3) $Q^* > 0, Q_0^* > 0$ (в, в', в'')

«призупинення» потоку H_* і H^* відповідно на контурі L (випадок чотири-вз'язної області).

Виконавши умовний розріз $\Gamma = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i$ уздовж невідомих ліній розділу течії, що проходять через шукану точку H (випадок тризв'язної області) та точки H_* , H^* (випадок чотиризв'язної області), і отримавши однозв'язну область $G_z^\Gamma = G_z \setminus \Gamma$ та ввівши аналогічно праці [5] функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, квазіконформно спряжену до φ , приходимо до задачі квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z^Γ на відповідну область комплексного квазіпотенціалу. При цьому вигляд області комплексного квазіпотенціалу відрізняється для різних випадків формування течії, що залежать від співвідношень між граничними потенціалами (наприклад, у праці [9] наведено 9 таких випадків за умов, що $\Phi_1 \leq \Phi_2 \leq \Phi_3$; у праці [8] — 23 випадки за умов $\Phi_1 < \Phi_3$, а Φ_2 — довільний і т.д.). Проте, якщо «перепозначити» граничні потенціали, упорядкувавши їх, і подати область комплексного квазіпотенціалу як об'єднання чотирьох суміжних прямокутників, то всі випадки формування течії зводяться до трьох ситуаційних станів, що принципово відрізняються між собою і не обмежуються співвідношенням між граничними потенціалами.

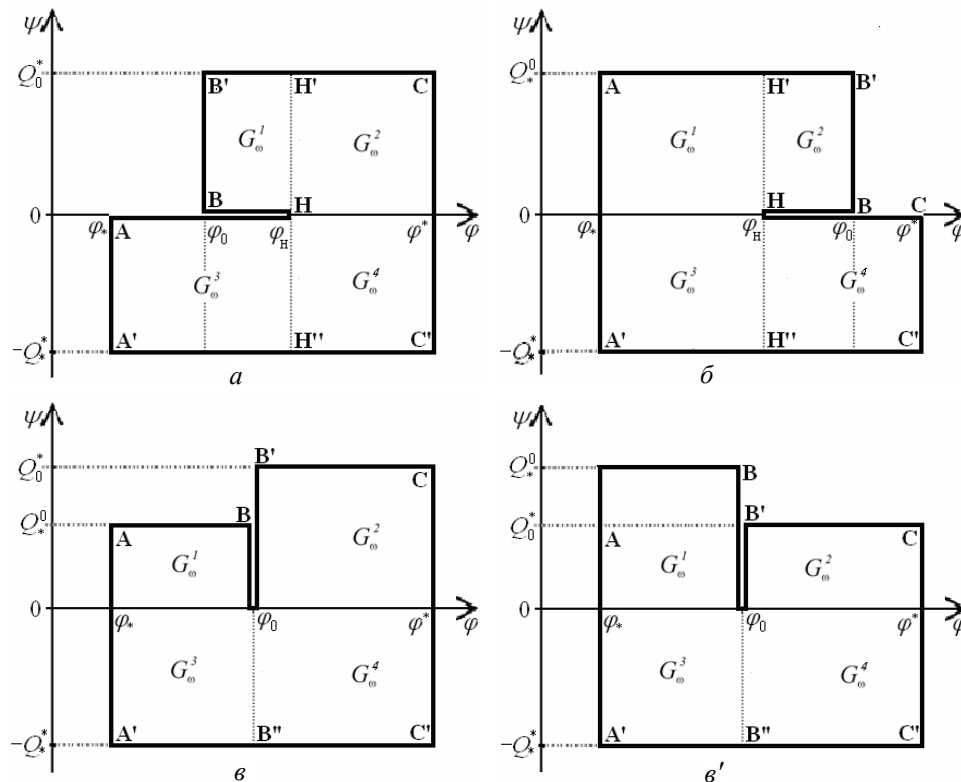


Рис. 2. Конфігурації області комплексного квазіпотенціалу для тризв'язної LEF-області у випадках: 1) $Q_0^0 = 0$ (а), 2) $Q_0^0 = 0$ (б), 3) $Q_0^0 > 0$, $Q_*^0 > 0$ (в, в')

Позначимо: $\varphi_* = \min_s \Phi_s$, $\varphi^* = \max_s \Phi_s$ ($s = \overline{1,3}$), $\varphi_0 = \sum_{s=1}^3 \Phi_s - (\varphi_* + \varphi^*)$; L_*, L^*, L_0 — відповідні цим потенціалам контури L_s ; Q_*, Q_0^*, Q_0^* — величини потоків Q_s через контури L_*, L^*, L_0 відповідно. Тоді маємо три різні конфігурації області комплексного квазіпотенціалу, що відповідають таким випадкам: 1) $Q_0^* = 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$ — відсутність перетікань між контурами L_*, L_0 (рис. 2, а, 3, а'); 2) $Q_0^* = 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$ — відсутність перетікань між контурами L^*, L_0 (рис. 2, б, 3, б'); 3) $Q_0^* > 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$ — наявність перетікань між усіма контурами (рис. 2, в, в', 3, в', в''). При цьому єдиність розв'язань відповідних задач забезпечується визначенням для тризв'язної області трьох невідомих параметрів: двох значень витрат і значення потенціалу φ_H точки розділу течії (для випадків 1 і 3) або трьох значень витрат (для випадку 2), а для чотиризв'язної області — додатково ще двох значень потенціалів φ_{H^*} , φ_{H^*} точок «призупинення» потоку H_* і H^* на контурі L .

На рис. 1 показано схеми формування течії, що відповідають цим випадкам (1 — рис. 1, а, а', а''; 2 — рис. 1, б, б', б''; 3 — рис. 1, в, в', в'') і моделюють ситуації, коли є дві нагнітальні свердловини (рис. 1, а, б), дві експлуатаційні свердловини (рис. 1, б', в') і нагнітальна та експлуатаційна свердловини (рис. 1, а', а'', б'', в, в'').

Такий підхід до класифікації способів формування течії та задання області комплексного потенціалу є істотно іншим, ніж у працях [8–9], і дозволяє уніфікувати постановки задач, їх різницеві аналоги і алгоритми розв'язання.

Загалом область комплексного квазіпотенціалу має вигляд:

$$G_\omega = \bigcup_{k=1}^4 G_\omega^k, \quad G_\omega^k = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_*^{(k)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(k)}, 0 \leq \psi \leq Q^{(k)}\},$$

де

$$\varphi^{*(1)} = \varphi_*^{(2)} = \varphi^{*(3)} = \varphi_*^{(4)} = \varphi_H, \quad \varphi_*^{(3)} = \varphi_*, \quad \varphi^{*(4)} = \varphi^*,$$

$$\varphi_*^{(1)} = \begin{cases} \varphi_*, & Q_*^0 \neq 0, \\ \varphi_0, & Q_*^0 = 0, \end{cases} \quad \varphi^{*(2)} = \begin{cases} \varphi^*, & Q_0^* \neq 0, \\ \varphi_0, & Q_0^* = 0, \end{cases}$$

$$Q^{(1)} = \begin{cases} Q_*^0, & Q_*^0 \neq 0, \\ Q_0^*, & Q_*^0 = 0, \end{cases} \quad Q^{(2)} = \begin{cases} Q_0^*, & Q_0^* \neq 0, \\ Q_*^0, & Q_0^* = 0, \end{cases}$$

$$Q^{(3)} = Q^{(4)} = Q_*^* \text{ (рис. 2, рис. 3, а', б', в', в'').}$$

Такий опис області комплексного квазіпотенціалу є неоднозначним, оскільки не відомі величини потоків Q_*, Q_0^*, Q_0^* , але, враховуючи монотонно-зростаючу залежність Q_s від потенціалів Φ_s і знаючи граничні потенціала

ли, можна припустити у більшості випадків, яким буде співвідношення перетікань між контурами ще до числового розв'язання задач.

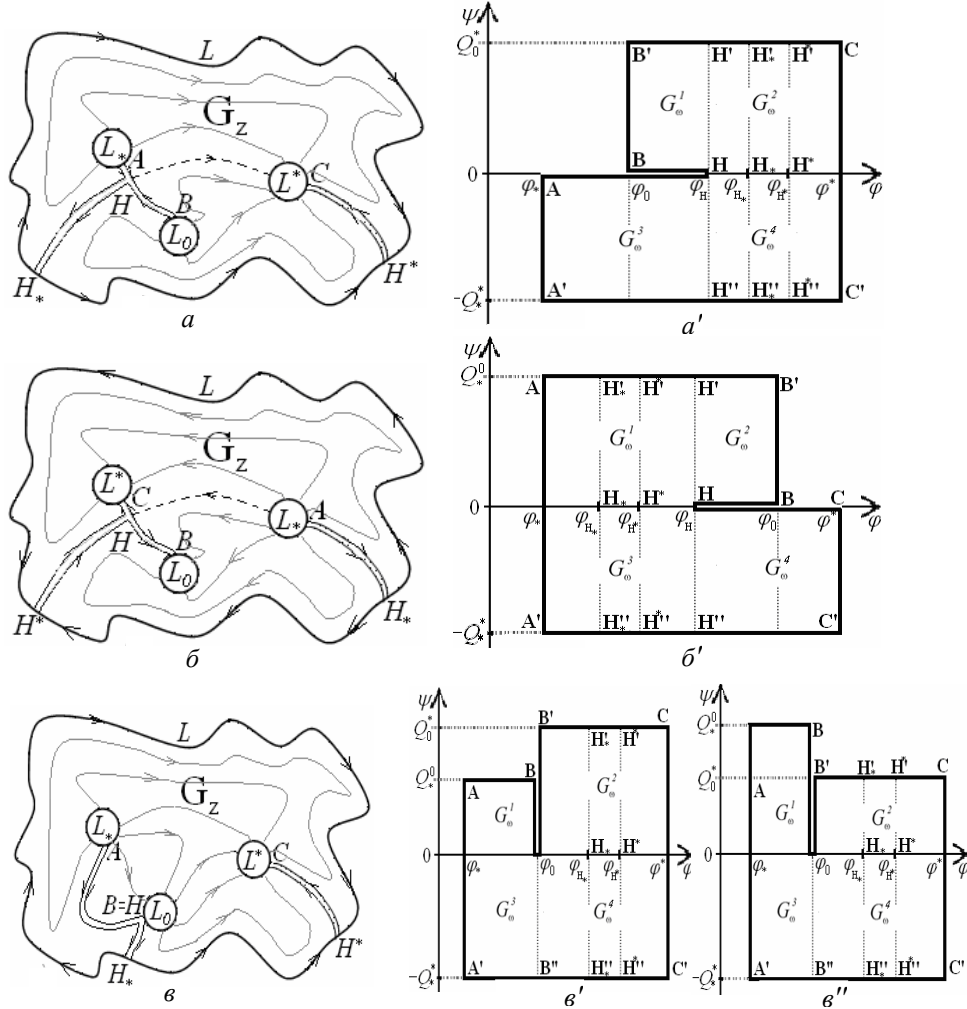


Рис. 3. Конфігурації області комплексного квазіпотенціалу для трив'язної LEF-області у випадках: 1) $Q_*^0 = 0$ (а), 2) $Q_0^* = 0$ (б), 3) $Q_*^0 > 0$, $Q_0^* > 0$ (в, в')

Відповідні задачі у підобластях G_ω^k ($k = \overline{1,4}$) на обернене квазіконформне відображення області G_ω на G_z^Γ зводяться до розв'язання крайових задач для системи рівнянь [2–3]:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_f \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_f \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^k,$$

$$\Xi(\varphi_{H_*}, 0) = \Xi(\varphi_{H_*}, Q) = \Xi(\varphi_{H^*}, 0) = \Xi(\varphi_{H^*}, Q) = 0,$$

$$Q = \int_0^Q \frac{\kappa_f}{J(\varphi, \psi)} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi,$$

де $\Xi(\varphi, \psi) = \frac{\kappa_f}{J(\varphi, \psi)} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2}$; $J(\varphi, \psi) = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$ — якобіан переходу.

Крайові умови, умови ортогональності ліній динамічної сітки до межі (що забезпечують комплексну спряженість шуканих гармонічних функцій [5]) та умови «роздвоєння» і періодичності на розрізах мають вигляд:

$$f_*(x(\varphi_*^{(3)}, \psi), y(\varphi_*^{(3)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(3)},$$

$$f^*(x(\varphi_*^{(4)}, \psi), y(\varphi_*^{(4)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(4)},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial f_s}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial f_s}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_s} = 0, \quad s = \overline{1,3};$$

у випадку 1 ($Q_0^0 = 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$):

$$f_0(x(\varphi_*^{(1)}, \psi), y(\varphi_*^{(1)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(1)},$$

$$f^*(x(\varphi_*^{(2)}, \psi), y(\varphi_*^{(2)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(2)},$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q^{(1)}), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q^{(1)}), \quad \varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(1)},$$

$$x(\varphi_*^{(1)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(1)}} = x(\varphi_*^{(2)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(2)}},$$

$$y(\varphi_*^{(1)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(1)}} = y(\varphi_*^{(2)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(2)}},$$

$$x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} = x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}}, \quad y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} = y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}},$$

$$x(\varphi, Q^{(2)}) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} = x(\varphi, Q^{(4)}) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}},$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q^{(3)}), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q^{(3)}), \quad \varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(3)},$$

$$x(\varphi_*^{(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} = x(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}},$$

$$y(\varphi_*^{(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} = y(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}};$$

у випадку 2 ($Q_0^0 = 0$, $Q_*^0 > 0$, $Q_*^* > 0$):

$$f_*(x(\varphi_*^{(1)}, \psi), y(\varphi_*^{(1)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(1)},$$

$$\begin{aligned}
 f_0(x(\varphi^{*(2)}, \psi), y(\varphi^{*(2)}, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(2)}, \\
 x(\varphi^{*(1)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(1)}} &= x(\varphi_*^{(2)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(2)}}, \\
 y(\varphi^{*(1)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(1)}} &= y(\varphi_*^{(2)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(2)}}, \\
 x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} &= x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \quad y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} = y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \\
 x(\varphi, Q^{(1)}) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} &= x(\varphi, Q^{(3)}) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \\
 y(\varphi, Q^{(1)}) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} &= y(\varphi, Q^{(3)}) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \\
 x(\varphi^{*(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} &= x(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}}, \\
 y(\varphi^{*(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} &= y(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}}, \\
 x(\varphi, 0) &= x(\varphi, Q^{(2)}), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q^{(2)}), \quad \varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(2)}, \\
 x(\varphi, 0) &= x(\varphi, Q^{(4)}), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q^{(4)}), \quad \varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(4)};
 \end{aligned}$$

у випадку 3 ($Q_*^0 > 0$, $Q_*^1 > 0$, $Q_*^2 > 0$):

$$\begin{aligned}
 f_*(x(\varphi_*^{(1)}, \psi), y(\varphi_*^{(1)}, \psi)) &= 0, \quad f_0(x(\varphi^{*(1)}, \psi), y(\varphi^{*(1)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(1)}, \\
 f_0(x(\varphi_*^{(2)}, \psi), y(\varphi_*^{(2)}, \psi)) &= 0, \quad f^*(x(\varphi^{*(2)}, \psi), y(\varphi^{*(2)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(2)}, \\
 x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} &= x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \quad y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} = y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \\
 x(\varphi, Q^{(1)}) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} &= x(\varphi, Q^{(3)}) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \\
 y(\varphi, Q^{(1)}) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} &= y(\varphi, Q^{(3)}) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \\
 x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(2)}} &= x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(4)}}, \\
 y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(2)}} &= y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(4)}}, \\
 x(\varphi, Q^{(2)}) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(2)}} &= x(\varphi, Q^{(4)}) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(4)}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(\varphi, Q^{(2)}) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{*(2)}} &= y(\varphi, Q^{(4)}) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{*(4)}}, \\
 x(\varphi_*^{*(3)}, \Psi) \Big|_{0 \leq \Psi \leq Q^{(3)}} &= x(\varphi_*^{(4)}, \Psi) \Big|_{0 \leq \Psi \leq Q^{(4)}}, \\
 y(\varphi_*^{*(3)}, \Psi) \Big|_{0 \leq \Psi \leq Q^{(3)}} &= y(\varphi_*^{(4)}, \Psi) \Big|_{0 \leq \Psi \leq Q^{(4)}}.
 \end{aligned}$$

Тут $f_* = f_s$, якщо $\varphi_* = \varphi_s$, $f^* = f_s$, якщо $\varphi^* = \varphi_s$, $f_0 = f_s$, якщо $\varphi_0 = \varphi_s$ ($s = 1, 2, 3$).

РІЗНИЦЕВИЙ АНАЛОГ

В області G_ω визначимо ортогональну сітку $G_\omega^Y = \{(\varphi_i, \Psi_j)\}$, де

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_*^{(1)} + i\Delta_{\varphi 1}, & i = \overline{0, m_1}, \\ \varphi_*^{(2)} + (i - m_1)\Delta_{\varphi 2}, & i = \overline{m_1 + 1, m + 1}, \\ \varphi_*^{(3)} + i\Delta_{\varphi 3}, & i = \overline{0, m_3}, \\ \varphi_*^{(4)} + (i - m_2)\Delta_{\varphi 4}, & i = \overline{m_3 + 1, m + 1}, \end{cases} \quad \Psi_j = \begin{cases} j\Delta_{\Psi 1}, & j = \overline{0, n_1 + 1}, \\ j\Delta_{\Psi 2}, & j = \overline{0, n_2 + 1}, \\ j\Delta_{\Psi 3}, & j = \overline{0, n_3 + 1}, \\ j\Delta_{\Psi 4}, & j = \overline{0, n_4 + 1}, \end{cases}$$

$$m_2 = m - m_1, \quad m_4 = m - m_3, \quad 2n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4, \quad \Delta_{\varphi k} = \frac{\varphi_*^{*(k)} - \varphi_*^{(k)}}{m_k + 1},$$

$$\Delta_{\Psi k} = \frac{Q^{(k)}}{n_k + 1}, \quad \gamma_k = \frac{\Delta_{\varphi k}}{\Delta_{\Psi k}}, \quad m, m_1, m_3, n, n_1, n_2, n_3 \in \mathbf{N}, \quad k = \overline{1, 4}.$$

Різницеві аналоги диференціальних рівнянь при $\kappa_f = \text{const}$ запишемо аналогічно [1, 4]:

$$\gamma x_{i,j} \equiv x_{i+1,j} - 2(1 + \gamma_k^2)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma_k^2(x_{i,j+1} + x_{i,j-1}) = 0,$$

$$\gamma y_{i,j} = 0, \quad i = \overline{1, m_k}, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k = \overline{1, 4}$$

($x_{i,j} = x(\varphi_i, \Psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \Psi_j)$), а їх розв'язки подано формулами сумарних зображень [4, 6]:

$$\begin{aligned}
 x_{i,j} &= \sum_{l=1}^n p_{j,l} \left(\mu_l^i a_l + \nu_l^i b_l + \gamma_k^2 \sum_{t=1}^{m_k} \frac{\nu_l^{|i-t|}}{\mu_l - \nu_l} (p_{1,l} x_{t,0} + p_{n_k,l} x_{t,n_k+1}) \right), \\
 y_{i,j} &= \sum_{l=1}^n p_{j,l} \left(\mu_l^i c_l + \nu_l^i d_l + \gamma_k^2 \sum_{t=1}^{m_k} \frac{\nu_l^{|i-t|}}{\mu_l - \nu_l} (p_{1,l} y_{t,0} + p_{n_k,l} y_{t,n_k+1}) \right), \quad (1) \\
 i &= \overline{1, m_k}, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k = \overline{1, 4},
 \end{aligned}$$

де елементи матриці P -трансформацій $P = [p_{j,i}]_{j,l=1}^{n_k}$ обчислюємо як

$$p_{j,l} = \frac{2}{\sqrt{2n_k + 1}} \sin \frac{j l \pi}{n_k + 1}, \quad \text{елементи діагональних матриць } \mu^i = [\mu_j^i]_{j=1}^{n_k},$$

$v^i = [v_j^i]_{j=1}^{n_k}$ визначаємо за формулами: $\mu_j = v_j^{-1} = \eta_j + \sqrt{\eta_j^2 - 1}$,

$\eta_j = 1 + \gamma^2 \left(1 - \cos \frac{j \pi}{n_k + 1} \right)$, а сталі a_j, b_j, c_j, d_j знаходимо із систем рівнянь

(що розв'язуються явно):

$$\begin{cases} a_j + b_j = \sum_{l=1}^{n_k} p_{l,j}^* x_{0,l} - \gamma_k^2 \sum_{t=1}^{m_k} \frac{v_j^t}{\mu_j - v_j} (p_{1,j} x_{t,0} + p_{n_k,j} x_{t,n_k+1}), \\ \mu_j^{m_k+1} a_j + v_j^{m_k+1} b_j = \sum_{l=1}^{n_k} p_{l,j}^* x_{m_k+1,l} - \gamma_k^2 \sum_{t=1}^{m_k} \frac{v_j^{m_k+1-t}}{\mu_j - v_j} (p_{1,j}^{(1)} x_{t,0} + p_{n_k,j}^{(1)} x_{t,n_k+1}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_j + d_j = \sum_{l=1}^{n_k} p_{l,j}^* y_{0,l} - \gamma_k^2 \sum_{t=1}^{m_k} \frac{v_j^t}{\mu_j - v_j} (p_{1,j} y_{t,0} + p_{n_k,j} y_{t,n_k+1}), \\ \mu_j^{m_k+1} c_j + v_j^{m_k+1} d_j = \sum_{l=1}^{n_k} p_{l,j}^* y_{m_k+1,l} - \gamma_k^2 \sum_{t=1}^{m_k} \frac{v_j^{m_k+1-t}}{\mu_j - v_j} (p_{1,j} y_{t,0} + p_{n_k,j} y_{t,n_k+1}) \end{cases}$$

($p_{j,l}^*$ — елементи матриці, оберненої до P , $j, l = \overline{1, n_k}$).

Різницеві аналоги крайових умов, умов ортогональності ліній динамічної сітки до межі та умов «роздвоєння» і періодичності на розрізах мають вигляд у випадку 1 ($Q_*^0 = 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$):

$$\begin{aligned} f_0(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, \quad f'_{0x}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(y_{1,j}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)}) - \\ - f'_{0y}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_1}, \end{aligned}$$

$$x_{m_1+1,j}^{(1)} = x_{m_1+1,j}^{(2)}, \quad y_{m_1+1,j}^{(1)} = y_{m_1+1,j}^{(2)}, \quad j = \overline{1, \min(n_1, n_2)},$$

$$x_{i,0}^{(1)} = x_{i,n_1+1}^{(1)}, \quad y_{i,0}^{(1)} = y_{i,n_1+1}^{(1)}, \quad i = \overline{1, m_1},$$

$$f_x^*(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(y_{m,j}^{(2)} - y_{m+1,j}^{(2)}) - f_y^*(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(x_{m,j}^{(2)} - x_{m+1,j}^{(2)}) = 0,$$

$$f^*(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_2},$$

$$x_{i,0}^{(2)} = x_{i,0}^{(4)}, \quad y_{i,0}^{(2)} = y_{i,0}^{(4)}, \quad x_{i,n_2}^{(2)} = x_{i,n_4}^{(4)}, \quad y_{i,n_2}^{(2)} = y_{i,n_4}^{(4)}, \quad i = \overline{\max(m_1, m_3) + 1, m},$$

$$f_*(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad f'_{*x}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) -$$

$$\begin{aligned}
 & -f'_{*y}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_3}, \\
 & x_{m_3+1,j}^{(3)} = x_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad y_{m_3+1,j}^{(3)} = y_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad j = \overline{1, \min(n_3, n_4)}, \\
 & x_{i,0}^{(3)} = x_{i, n_3+1}^{(3)}, \quad y_{i,0}^{(3)} = y_{i, n_3+1}^{(3)}, \quad i = \overline{1, m_3}, \\
 & f_x^{*'}(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(y_{m,j}^{(2)} - y_{m+1,j}^{(2)}) - f_y^{*'}(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(x_{m,j}^{(2)} - x_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \\
 & f^*(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_2}, \\
 & x_{i,0}^{(2)} = x_{i,0}^{(4)}, \quad y_{i,0}^{(2)} = y_{i,0}^{(4)}, \quad x_{i, n_2}^{(2)} = x_{i, n_4}^{(4)}, \quad y_{i, n_2}^{(2)} = y_{i, n_4}^{(4)}, \quad i = \overline{\max(m_1, m_3) + 1, m}, \\
 & f_*(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad f'_{*x}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) - \\
 & - f'_{*y}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_3}, \\
 & x_{m_3+1,j}^{(3)} = x_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad y_{m_3+1,j}^{(3)} = y_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad j = \overline{1, \min(n_3, n_4)}, \\
 & x_{i,0}^{(3)} = x_{i, n_3+1}^{(3)}, \quad y_{i,0}^{(3)} = y_{i, n_3+1}^{(3)}, \quad i = \overline{1, m_3}, \\
 & f_x^{*'}(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(y_{m,j}^{(4)} - y_{m+1,j}^{(4)}) - f_y^{*'}(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(x_{m,j}^{(4)} - x_{m+1,j}^{(4)}) = 0, \\
 & f^*(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_4};
 \end{aligned}$$

у випадку 2 ($Q_0^* = 0$, $Q_*^0 > 0$, $Q_*^* > 0$):

$$\begin{aligned}
 & f_*(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, \quad f'_{*x}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(y_{1,j}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)}) - f'_{*y}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_1}, \\
 & x_{m_1+1,j}^{(1)} = x_{m_1+1,j}^{(2)}, \quad y_{m_1+1,j}^{(1)} = y_{m_1+1,j}^{(2)}, \quad j = \overline{1, \min(n_1, n_2)}, \\
 & x_{i,0}^{(1)} = x_{i,0}^{(3)}, \quad y_{i,0}^{(1)} = y_{i,0}^{(3)}, \quad x_{i, n_1}^{(1)} = x_{i, n_3}^{(3)}, \quad y_{i, n_1}^{(1)} = y_{i, n_3}^{(3)}, \quad i = \overline{1, \min(m_1, m_3)}, \\
 & f'_{0x}(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(y_{m,j}^{(2)} - y_{m+1,j}^{(2)}) - f'_{0y}(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(x_{m,j}^{(2)} - x_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \\
 & f_0(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_2}, \\
 & x_{i,0}^{(2)} = x_{i, n_2+1}^{(2)}, \quad y_{i,0}^{(2)} = y_{i, n_2+1}^{(2)}, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}, \\
 & f_*(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad f'_{*x}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) - f'_{*y}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(x_{1,j}^{(3)} - x_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_3}, \\
 & x_{m_3+1,j}^{(3)} = x_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad y_{m_3+1,j}^{(3)} = y_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad j = \overline{1, \min(n_3, n_4)},
 \end{aligned}$$

$$x_{i,0}^{(4)} = x_{i,n_4+1}^{(4)}, \quad y_{i,0}^{(4)} = y_{i,n_4+1}^{(4)}, \quad i = \overline{m_3+1, m},$$

$$f_x^* (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(y_{m,j}^{(4)} - y_{m+1,j}^{(4)}) - f_y^* (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(x_{m,j}^{(4)} - x_{m+1,j}^{(4)}) = 0,$$

$$f^* (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_4};$$

у випадку 3 ($Q_*^0 > 0$, $Q_*^0 > 0$, $Q_*^* > 0$):

$$f_*^* (x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, \quad f_{*x}^* (x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(y_{1,j}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)}) - f_{*y}^* (x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)}) = 0,$$

$$f'_{0x} (x_{m_1+1,j}^{(1)}, y_{m_1+1,j}^{(1)})(y_{m_1,j}^{(1)} - y_{m_1+1,j}^{(1)}) - f'_{0y} (x_{m_1+1,j}^{(1)}, y_{m_1+1,j}^{(1)})(x_{m_1,j}^{(1)} - x_{m_1+1,j}^{(1)}) = 0,$$

$$f_0 (x_{m_1+1,j}^{(1)}, y_{m_1+1,j}^{(1)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_1},$$

$$x_{i,0}^{(1)} = x_{i,0}^{(3)}, \quad y_{i,0}^{(1)} = y_{i,0}^{(3)}, \quad x_{i,n_1}^{(1)} = x_{i,n_3}^{(3)}, \quad y_{i,n_1}^{(1)} = y_{i,n_3}^{(3)}, \quad i = \overline{1, \min(m_1, m_3)},$$

$$f'_{0x} (x_{m_1+1,j}^{(2)}, y_{m_1+1,j}^{(2)})(y_{m_1,j}^{(2)} - y_{m_1+1,j}^{(2)}) - f'_{0y} (x_{m_1+1,j}^{(2)}, y_{m_1+1,j}^{(2)})(x_{m_1,j}^{(2)} - x_{m_1+1,j}^{(2)}) = 0,$$

$$f_x^* (x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(y_{m,j}^{(2)} - y_{m+1,j}^{(2)}) - f_y^* (x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(x_{m,j}^{(2)} - x_{m+1,j}^{(2)}) = 0,$$

$$f_0 (x_{m_1+1,j}^{(2)}, y_{m_1+1,j}^{(2)}) = 0, \quad f^* (x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_2},$$

$$x_{i,0}^{(2)} = x_{i,0}^{(4)}, \quad y_{i,0}^{(2)} = y_{i,0}^{(4)}, \quad x_{i,n_2}^{(2)} = x_{i,n_4}^{(4)}, \quad y_{i,n_2}^{(2)} = y_{i,n_4}^{(4)}, \quad i = \overline{\max(m_1, m_3) + 1, m},$$

$$f_*^* (x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad f_{*x}^* (x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) -$$

$$- f_{*y}^* (x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(x_{1,j}^{(3)} - x_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_3},$$

$$x_{m_3+1,j}^{(3)} = x_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad y_{m_3+1,j}^{(3)} = y_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad j = \overline{1, \min(n_3, n_4)},$$

$$f_x^* (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(y_{m,j}^{(4)} - y_{m+1,j}^{(4)}) - f_y^* (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(x_{m,j}^{(4)} - x_{m+1,j}^{(4)}) = 0,$$

$$f^* (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_4}, \quad (2)$$

де $x_{i,j}^{(k)} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j}^{(k)} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{\gamma(k)}$, $k = \overline{1, 4}$.

Формули для знаходження невідомих величин γ_k , $Q^{(k)}$, $k = \overline{1, 4}$ та φ_H отримуємо на підставі умов «конформної подібності в малому» елементарних сіткових чотирикутників фізичної області та відповідних їм в області комплексного квазіпотенціалу [5]:

$$\gamma_k = \frac{1}{(m_k + 1)(n_k + 1)} \sum_{i,j=0}^{m_k, n_k} \gamma_{i,j}^{(k)}, \quad Q^{(k)} = \Delta_{\varphi k} \frac{n_k + 1}{\gamma_k}, \quad \varphi_H = \varphi_* + (m_1 + 1)\Delta_{\varphi 1}, \quad (3)$$

$$\gamma_{i,j}^{(k)} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k)})^2 + (y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k)})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}^{(k)} - x_{i,j+1}^{(k)})^2 + (y_{i+1,j+1}^{(k)} - y_{i,j+1}^{(k)})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j}^{(k)})^2 + (y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j}^{(k)})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}^{(k)} - x_{i+1,j}^{(k)})^2 + (y_{i+1,j+1}^{(k)} - y_{i+1,j}^{(k)})^2}}$$

АЛГОРИТМ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Алгоритм розв'язування ґрунтується на ідеї почергової параметризації координат межових та внутрішніх вузлів динамічної сітки, параметрів конформності [1] і в загальному вигляді може бути описаний таким чином.

Задаємо геометричну конфігурацію фізичної області G_z , значення граничних потенціалів Φ_s , $s = \overline{1,3}$ і визначаємо φ_* , φ^* , φ_0 . Далі за співвідношеннями між граничними потенціалами слід визначити характер формування течії і вигляд (конфігурацію) області комплексного квазіпотенціалу. Таких варіантів (алгоритмічно різних) три: 1) $Q_*^0 = 0$, що означає відсутність перетікань між контурами L_* і L_0 ; 2) $Q_*^0 > 0$, $Q_0^* > 0$ і $Q_*^* > 0$; 3) $Q_0^* = 0$ — відсутність потоку від L_0 до L^* . У працях [8, 9] з цією метою запропоновано «алгоритм вибору», що передбачав розв'язання двох допоміжних ключових задач (обернених задач з ідентифікації «керувального» потенціалу) для визначення двох критичних потенціалів, що мажорують φ_0 . Тут пропонується, не встановлюючи точно на початковому етапі варіанта формування потоків (перетікань), відразу розв'язувати задачу за уніфікованим для всіх варіантів алгоритмом.

У більшості випадків за співвідношеннями між граничними потенціалами чи з деяких інших (технічних) міркувань можна досить достовірно зробити припущення про можливий спосіб формування потоку і співвідношення між величинами потоків. У комп'ютерній програмі, яка реалізовує відповідні розрахунки, для таких очевидних випадків передбачено модуль-перемикач, що дозволяє «вручну» вибрати потрібний варіант, що відразу значно оптимізує обчислення.

Задаємо кількість вузлів $m, m_1, m_3, n_1, n_2, n_3, n_4$ розбиття сіткової області G_ω^γ , параметри ε , ε_Q , що характеризують точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, та бажаний рівень конформності відображення δ_* [1]. Задаємо також нульове наближення невідомих величин γ_k , $k = \overline{1,4}$ (або шуканих витрат $Q^{(k)}$) та початкові наближення значень функцій x і y у межових вузлах (координати межових вузлів динамічної сітки) так, щоб виконувались умови (2).

Обчислюємо за формулами сумарних зображень (1) початкові наближення значень функцій x і y у внутрішніх вузлах (координати внутрішніх вузлів динамічної сітки), знаходимо значення γ_k , $Q^{(k)}$, $k = \overline{1,4}$, та φ_H за

формулами (3). Перевіряємо виконання умов $Q^{(k)} < \varepsilon_Q$, $k = \overline{1,2}$ і коригуємо, у разі потреби, випадок формування потоку.

Далі уточнюємо координати межових вузлів за формулами ортогональності ліній течії до межі області та належності вузла до межі з урахуванням періодичності (2) і обчислюємо нове наближення координат внутрішніх вузлів за формулами (1); знаходимо γ_k , $Q^{(k)}$, $k = \overline{1,4}$, та φ_H за формулою (3).

Наприкінці кожної загальної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат межових вузлів [1] і оцінюємо ступінь конформності отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область [1, 5] та приймаємо рішення про продовження чи припинення роботи алгоритму [1, 5].

Розроблений алгоритм виглядає дещо громіздким, а відповідні комп'ютерні процедури є більш складними, ніж з використанням, наприклад, методу скінченних елементів, але саме застосування числово-аналітичного підходу дозволяє уникнути розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з погано обумовленими матрицями великої розмірності, скоротити час роботи комп'ютера і за прийнятний час отримати задовільний результат.

ПРИКЛАД ЧИСЛОВИХ РОЗРАХУНКІВ

Для ілюстрації роботи описаного алгоритму виконано обчислення для одного з варіантів формування потоку у тризв'язній LEF-області (рис. 4), що обмежена трьома еквіпотенціалами — двома контурами експлуатаційних свердловин L_* , L_0 з потенціалами φ_* , φ_0 і еліптичним контуром їх живлення $L^* = \{x + iy : x = 8 \cos(t), y = 6 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ з потенціалом $\varphi^* = 1$.

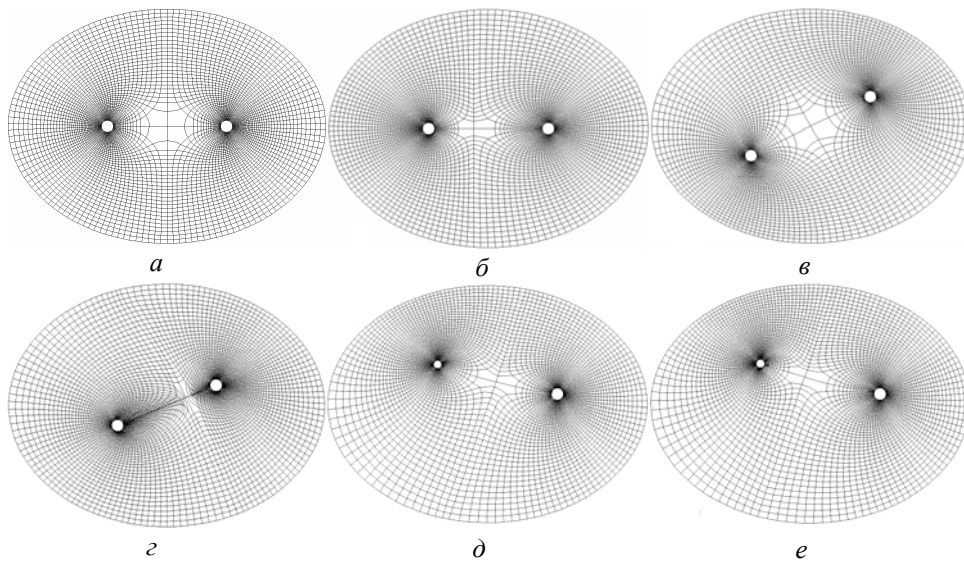


Рис. 4. Розраховані динамічні сітки

На рис. 4, а, б зображено розраховані динамічні сітки за наявності двох симетрично розміщених свердловин $L_* = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) - 3, y = 0,3 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) + 3, y = 0,3 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ у випадках з однаковими потенціалами $\varphi_* = \varphi_0 = 0$ (рис. 4, а) і різними потенціалами $\varphi_* = 0$, $\varphi_0 = 0,2$ (рис. 4, б). Розраховані витрати свердловин становлять $Q_*^* = Q_0^* = 1,90504$ і $Q_*^* = 1,94942$, $Q_0^* = 1,08008$ відповідно. На рис. 4, в зображено динамічну сітку для свердловин $L_* = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) - 3, y = 0,3 \sin(t) - 1,5, 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) + 3, y = 0,3 \sin(t) + 1,5, 0 \leq t < 2\pi\}$ з потенціалами $\varphi_* = \varphi_0 = 0$ (отримано $Q_*^* = Q_0^* = 1,99013$), на рис. 4, г — динамічну сітку для свердловин $L_* = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) - 2,5, y = 0,3 \sin(t) - 1, 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) + 2,5, y = 0,3 \sin(t) + 1, 0 \leq t < 2\pi\}$ з потенціалами $\varphi_* = 0,3$, $\varphi_0 = 0$ (отримано $Q_*^* = 0,59339$, $Q_0^* = 1,7718$). На рис. 4, е, е маємо випадки несиметричного розміщення свердловин різних діаметрів: $L_* = \{x + iy : x = 0,2 \cos(t) - 2,5, y = 0,2 \sin(t) + 2, 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) + 3,5, y = 0,3 \sin(t) + 0,5, 0 \leq t < 2\pi\}$ з потенціалами $\varphi_* = \varphi_0 = 0$ (рис. 4, з) і $\varphi_* = 0$, $\varphi_0 = 0,2$ (рис. 4, е). Отримані витрати становлять $Q_*^* = Q_0^* = 1,84901$ і $Q_*^* = 1,98889$, $Q_0^* = 0,98397$ відповідно.

ВИСНОВКИ

Розвинуто методику моделювання фільтраційних процесів для багатозв'язних криволінійних LEF-областей на основі синтезу числових методів комплексного аналізу та сумарних зображень і запропоновано підхід до вирішення проблеми неоднозначності побудови відповідної області комплексного квазіпотенціалу. Використання методів сумарних зображень як компонентів методики на базі комплексного аналізу дозволило істотно удосконалити існуючі підходи до розв'язання такого класу задач, підвищити ефективність (швидкість збіжності) відповідного ітераційного процесу, оскільки уможливило відшукування необхідної точності початкового наближення шуканих функцій, дало змогу в комплексі (сумарно) на кожному ітераційному кроці враховувати вплив не лише навколишніх, а й усіх крайових та внутрішніх вузлів динамічної сітки, а тому значно пришвидшило досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Бомба А.Я. Синтез числових методів конформних відображень та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей / А.Я. Бомба, А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки. — 2012. — № 2. — С. 87–94.
2. Hladka O. The complex analysis method of numerical identification of parameters of quasiideals processes in doubly-connected nonlinear-layered curvilinear domains

- / O. Hladka, A. Bomba // Journal of Mathematics and System Science (USA). — 2014. — 4, № 7 (Ser. N. 29). — P. 514–521.
3. *Бомба А.Я.* Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів у сланцевих пластах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — Львів, 2013. — № 18. — С. 32–42.
 4. *Бомба А.Я.* Синтез числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області для розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Обчислювальна та прикладна математика. — № 1 (111). — К., 2013. — С. 35–45.
 5. *Бомба А.Я.* Методи комплексного аналізу: моногр. / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак. — Рівне: НУВГП, 2013. — 415 с.
 6. *Ляшко И.И.* Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко. — К.: Наук. думка, 1973. — 264 с.
 7. *Гладка О.М.* Моделювання нелінійних фільтраційних процесів у техногенно-деформованих пластах методами комплексного аналізу та сумарних зображень: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук; ТНТУ ім. І. Пулюя / О.М. Гладка. — Тернопіль, 2015. — 20 с.
 8. *Бомба А.Я.* Крайові задачі на конформні відображення для тризв'язних областей з потенціалом керування / А.Я. Бомба, Д.О. Пригорницький // Доповіді НАН України. — 2004. — № 4. — С. 57–63.
 9. *Бомба А.Я.* Системный анализ фильтрационных процессов в многосвязных криволинейных областях / А.Я. Бомба, В.В. Скопецкий, С.В. Ярошак // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 4. — С. 64–72.

Надійшла 26.11.2015

Примітка. Рисунки подано у виконанні автора.