УДК 519.86
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.4.10

ПРО АЛГОРИТМИ ВИЗНАЧЕННЯ СТАНІВ РІВНОВАГИ ВІДКРИТОЇ ЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗА НАЯВНОСТІ МОНОПОЛІСТІВ

А.П. МАХОРТ

Анотація. Досліджено відкриту економічну систему, сформовану споживачами, що є ненасичуваними. Частина споживачів спроможна виробляти товари. Застосовано принципи рівноваги вальрасового типу. Використано наближення моделі економіки з постійними інтересами споживачів. Запропоновано алгоритм розв'язання задачі про економічну рівновагу, який враховує можливість залежності споживчих уподобань суб'єктів економічної системи від додаткових характеристик. Отримано обмеження на модельні характеристики, які забезпечують існування рівноваги такої економічної системи. Знайдено стани рівноваги з характеристиками, що належать заданим інтервалам значень. Указано на зв'язок між вибором стратегії оподаткування та реалізацією конкретного стану рівноваги економічної системи.

Ключові слова: рівновага, попит, пропозиція, рівноважні ціни.

ВСТУП

Дослідження рівноваги економічних систем, зокрема рівноваги за Вальрасом [1, 2], дає змогу отримати достатньо інформації про можливості їх функціонування. Перебування в деякому стані рівноваги означає для економічної системи певний баланс і стабільність значень характеристик системи. На поведінку економічних систем впливають різні чинники. Зміна стану рівноваги зумовлена зміною економічних характеристик, що спричиняють впливи цих чинників. За значеннями економічних характеристик можна виявити, чи призводить дія чинників до дестабілізації і погіршення умов функціонування, або ж навпаки, їх дія корисна для економічної системи і сприяє зростанню.

Урахування у моделі економіки наявності певних чинників залежить від потреби дослідити той чи інший аспект функціонування економічної системи. Монополізм є вагомим чинником впливу і потребує уваги у процесі побудови моделі.

Серед чинників є і такі, потреба в урахуванні яких залежить від додаткових обставин. У цьому випадку важливо, щоб модель допускала можливість надалі враховувати їх дію. Особливості формування споживчих уподобань саме і належать до подібних чинників.

Мета дослідження — з'ясування впливу монопольних явищ на рівновагу економічної системи та побудова алгоритму визначення характеристик тих станів рівноваги, перебування в яких забезпечуватиме ефективне функціонування всіх суб'єктів економічної системи. Алгоритм має враховувати можливість деталізації чинників впливу на формування споживчих уподобань.

ОПИС МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Нехай економічна система сформована l суб’єктами, які всі є споживачами товарів. Споживачі є ненасичуваними, тобто мають витрачати весь свій здобутий фінансовий ресурс на придбання нових товарів. Витрати, пов’язані зі споживанням товарів, частина суб’єктів економічної системи компенсує за рахунок власного виробництва товарів. А перерозподіл прибутків виробників є джерелом фінансування решти споживачів.

Вважатимемо, що в економічній системі є n різновидів товарів, кожен з яких виготовляє один виробник. Обсяги випуску товарів в економічній системі описуватимуть компоненти вектора $x = \{x_i\}_{i=1}^n$. Також припускатимемо, що поряд з виготовленням свого товару виробники можуть мати запаси товарів інших виробників. Для i-го виробника обсяги такого запасу визначатимуть компоненти вектора $\{b_{ki}^1\}_{k=1}^n$, $i = \overline{1,n}$. Технології виробництва товарів задаватимемо матрицею вигляду $\left\| a_{kj} + b_{kj} / x_j \right\|_{k,j=1}^n$, де величини a_{kj} визначають витрати на виготовлення одиниці випуску j-го товару в натуральних показниках k-м виробником, а значення характеристик b_{kj} стосуються постійних витрат, необхідних для утримання всього виробництва у працездатному стані. Рівень пропозиції Ψ_k k-го товару на ринку складається як з обсягів його випуску, так і з обсягів його запасів за умови, що частина товарів використовується для потреб виробництва:

$$\Psi_k = x_k - \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i - \sum_{i=1}^n b_{ki} + \sum_{i=1}^n b_{ki}^1 - e_k + i_k, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1}$$

де також враховано можливість взаємодії економічної системи із зовнішнім оточенням і $\{e_i\}_{i=1}^n$ — вектор експорту товарів, а $\{i_i\}_{i=1}^n$ — вектор імпорту.

Реалізація наявних у виробників товарів на ринку дозволяє їм отримувати фінансові ресурси для подальшого функціонування. Фінансові надходження суб’єктів економічної системи оподатковуються. Оподаткований прибуток, який може отримати виробник у результаті своєї діяльності, записується за допомогою виразу

$$\widetilde{D}_j(p) = \pi_j x_j \left(p_j - \sum_{k=1}^n a_{kj} p_k \right) - \pi_j \sum_{k=1}^n b_{kj} p_k + \pi_j \sum_{k=1}^n b_{kj}^1 p_k, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

де $\pi = \{\pi_i\}_{i=1}^n$ — вектор оподаткування. Оподаткування і є механізмом перерозподілу капіталу для забезпечення фінансування тих споживачів, які не є виробниками. Величина їх прибутків $\{\widetilde{D}_j(p)\}_{j=n+1}^l$ має формуватись з урахуванням вимоги

$$\sum_{j=n+1}^l \widetilde{D}_j(p) = \sum_{j=1}^n (1 - \pi_j) D_j(p). \tag{3}$$

Споживання товарів в економічній системі формується на підставі уподобань суб’єктів економічної системи. Максимальний набір бажаних товарів, що ними цікавиться i-й споживач, визначатиме ненульовий вектор $\{c_{ki}\}_{k=1}^{n}$, $i=\overline{1,l}$. Значення величин c_{ki} можуть бути і функцією деякої економічної характеристики $\boldsymbol{z}^0$, $c_{ki}=c_{ki}(\boldsymbol{z}^0)$. Припускатимемо, що в побудованій за елементами c_{ki} матриці $C=\left\|c_{kj}\right\|_{k=1,\,j=1}^{n,\ \ l}$ немає нульових рядків і стовпців. Попит споживачів, або ж їх остаточний вибір товарів зі списку бажаних залежить від ціни цих товарів. Тому попит i-го споживача на k-й товар $\Lambda_{ik}(p)$ можна подати у вигляді

$$\Lambda_{ik}(p)=\frac{c_{ki}p_k}{\sum\limits_{s=1}^{n}c_{si}p_s},\ \ i=\overline{1,l},\ \ k=\overline{1,n}, \tag{4}$$

де $p=\{p_i\}_{i=1}^{n}$ — вектор цін на товари. Вибір споживачів створює попит на товари в економічній системі. Вираз для попиту на k-й товар Φ_k складатиметься з попиту окремих споживачів та їх спроможності придбати цей товар:

$$\Phi_k=\frac{1}{p_k}\sum_{i=1}^{l}\Lambda_{ik}(p)\widetilde{D}_i(p),\ \ k=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Споживач прагне мати той рівень прибутку, що дозволить йому придбати бажаний набір товарів у повному обсязі. Мірою досягнення потрібного рівня прибутку є вектор ступенів задоволення потреб споживачів $y=\{y_i\}_{i=1}^{l}$. Його компоненти набувають значень в інтервалі $(0,1]$. Якщо компонента вектора y дорівнює одиниці, відповідний споживач може придбати весь потрібний набір товарів, інакше його бажання задовольнятимуться частково. Тоді оподаткований, або чистий прибуток кожного суб'єкта економічної системи як споживача набуває вигляду

$$\widetilde{D}_j(p)=y_j\sum_{s=1}^{n}c_{sj}p_s,\ \ j=\overline{1,l}. \tag{6}$$

Для виробників вираз (6) має збігатися з виразом (2).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Аналіз поведінки економічної системи можна виконати за значеннями її характеристик. Після того, коли суб'єкти економічної системи оберуть стратегії своєї поведінки, частина з характеристик стануть визначеними. Зокрема виробники мають обрати технології виготовлення своїх товарів, а споживачі вирішити, яких товарів вони потребують. Вважатимемо, що в моделі заданими є елементи матриць технологічних коефіцієнтів $\left\|a_{kj}\right\|_{k,j=1}^{n}$, $\left\|b_{kj}\right\|_{k,j=1}^{n}$, обсяги запасу товарів та коефіцієнти споживання товарів суб'єктів економічної системи, які сформують матриці $\left\|b_{kj}^{1}\right\|_{k,j=1}^{n}$ та $\left\|c_{kj}\right\|_{k=1,\,j=1}^{n,\ \ l}$. Заданою вважатимемо і структуру зовнішньоекономічних зв'язків, подану векторами $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ та $\{i_i\}_{i=1}^{n}$. Важливими економічними характеристиками є ціни й обсяги випусків товарів. Очевидно, що виробники впливають на обсяги випусків своїх товарів. За наявності певного обсягу товару на ринку ціна на нього утворюється в результаті згоди між покупцем і продавцем. Зокрема, така згода досягається внаслідок установлення балансу між попитом і пропозицією, або ж установлення економічної рівноваги. Але серед виробників в економічній системі можуть бути присутні й монополісти, які мають змогу впливати на рівень цін своїх товарів. У випадку заданих цін на товари баланс між попитом і пропозицією досягатиметься за рахунок зміни обсягів випуску товарів. Тому вважатимемо, що в моделі задано ціни на товари монополістів $(p_{t+1}^0,\dots,p_n^0)$ і обсяги випусків товарів решти виробників $(x_1^0,\dots,x_t^0)$. Модель ураховує наявність оподаткування прибутків суб'єктів економічної системи, а відповідно до економічних реалій, принаймні для тих виробників, які не є монополістами, стратегію оподаткування слід вважати заданою $(\pi_1^0,\dots,\pi_t^0)$.

Інші характеристики, такі як рівні споживання суб'єктів економічної системи, подані компонентами вектора $(y_1,\dots,y_l)$, ціни $(p_1,\dots,p_t)$, обсяги випусків $(x_{t+1},\dots,x_n)$, рівні оподаткування монополістів $(\pi_{t+1},\dots,\pi_n)$ можуть змінювати свої значення залежно від ситуації на ринку. Вони залежать від поточного стану економічної системи і визначаються безпосередньо з умови рівноваги. Згідно з принципами рівноваги за Вальрасом [1, 2] пропозиція товарів в економічній системі має перевищувати попит. З цієї умови отримаємо набір усіх імовірних станів економічної системи. Щоб визначити стани рівноваги з прибутковим виробництвом усіх суб'єктів економічної системи достатньо використати умову рівності попиту і пропозиції [1]. Тоді зі співвідношень (1) і (5) отримаємо

$$\frac{1}{p_k}\sum_{i=1}^{l}\Lambda_{ik}(p)\widetilde{D}_i(p)=x_k-\sum_{i=1}^{n}a_{ki}x_i-\sum_{i=1}^{n}b_{ki}+\sum_{j=1}^{n}b_{kj}^1-e_k+i_k,\ \ k=\overline{1,n},$$

або з урахуванням виразів (4) і (6)

$$\sum_{j=1}^{l}c_{kj}y_j=x_k-\sum_{i=1}^{n}a_{ki}x_i-\sum_{i=1}^{n}b_{ki}+\sum_{j=1}^{n}b_{kj}^1-e_k+i_k,\ \ k=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Урахуємо також, що в стані рівноваги прибуток виробників, визначений за формулою (2), має збігатися зі значеннями, знайденими за формулою (6)

$$\pi_j x_j\left(p_j-\sum_{k=1}^{n}a_{kj}p_k\right)-\pi_j\sum_{k=1}^{n}b_{kj}p_k+\pi_j\sum_{k=1}^{n}b_{kj}^1p_k=y_j\sum_{s=1}^{n}c_{sj}p_s,\ \ j=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Систему рівнянь (7), (8) розв'язуватимемо щодо векторів $\{y_i\}_{i=1}^{l}$, $\{p_i\}_{i=1}^{t}$, $\{x_i\}_{i=t+1}^{n}$ і $\{\pi_i\}_{i=t+1}^{n}$ і тим самим визначимо стани рівноваги економічної системи, перебування в яких забезпечуватиме ефективне функціонування її суб'єктам.

ВИЗНАЧЕННЯ СТУПЕНІВ ЗАДОВОЛЕННЯ ПОТРЕБ ВИРОБНИКІВ ТОВАРІВ

Укажемо спочатку, як визначити рівноважні значення компонент вектора ступенів задоволення потреб споживачів $y=\{y_i\}_{i=1}^{l}$. Припускатимемо, що матриця $A=\left\|a_{kj}\right\|_{k,j=1}^{n}$ нерозкладна, а її спектральний радіус менший від одиниці. Тоді рівняння (7) можна переписати у вигляді

$$\sum_{j=1}^{l} d_{kj} y_j = b_k,\ \ k=\overline{1,n},$$

де введено матрицю $\left\|d_{kj}\right\|_{k=1,j=1}^{n,l}$ і величини $\{b_i\}_{i=1}^{n}$:

$$d_{kj}=\sum_{s=1}^{n}(E-A)_{ks}^{-1}c_{sj},\ \ b_k=x_k-\sum_{s=1}^{n}(E-A)_{ks}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}b_{si}-\sum_{j=1}^{n}b_{sj}^{1}+e_s-i_s\right].$$

Частина величин $(b_1^0,\ldots,b_t^0)$ будуть заданими. Вони мають бути і додатними, інакше пропозиція товарів виявиться від'ємною, що неможливо. А через припущення про властивості матриць A і C матричні елементи d_{kj} також будуть додатними.

Нехай найнижчий прийнятний для споживачів в економічній системі рівень задоволення потреб є y^m. Тоді бажано, щоб реалізовувались лише стани рівноваги, у яких компоненти вектора y міститимуться в інтервалі $[y^m,1]$. Виберемо константи Δ_0, Δ_1, щоб вони задовольняли нерівності

$$y^m\left(\sum_{j=n+1}^{l}d_{kj}-\Delta_1\right)\le b_k^0-\Delta_0 b_k^0\le y^M\left(\sum_{j=n+1}^{l}d_{kj}-\Delta_1\right),\ \ k=\overline{1,t}, \tag{9}$$

а також сукупність параметрів $(\alpha_1,\ldots,\alpha_t,\alpha_{t+1}^1,\ldots,\alpha_n^1)$, такі, що значення величин $\{\beta_i\}_{i=1}^{n}$

$$\beta_s=\Delta_1\alpha_s+\sum_{k=1}^{t}\alpha_k d_{ks},\ \ s=\overline{1,t},\quad \beta_s=\Delta_0\alpha_s^1+\sum_{k=1}^{t}\alpha_k d_{ks},\ \ s=\overline{t+1,n}$$

містяться в діапазоні $[y^m,y^M]$, $y^M\le 1$, і вимагатимемо, щоб компоненти вектора ступенів задоволення потреб споживачів $y_1,\ldots,y_n$ були розв'язком оптимізаційної задачі

$$\min_{(y_1,\ldots,y_n)}\mathcal{F}^0,\ \ \mathcal{F}^0=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}[\beta_j-y_j]^2, \tag{10}$$

за додаткових вимог

$$\sum_{j=1}^{n}d_{kj}y_j+\Delta_1 y_k=\Delta_0 b_k^0,\ \ k=\overline{1,t}. \tag{11}$$

Теорема 1. Нехай величини σ^m, σ^M, вибрані з умови

$$y^m \le \sigma^m\left(\Delta_1 + \sum_{k=1}^{t} d_{ks}\right) \le \sigma^M\left(\Delta_1 + \sum_{k=1}^{t} d_{ks}\right) \le y^M, \ \ s = \overline{1,t},$$

$$y^m - \Delta_0\alpha_s^1 \le \sigma^m \sum_{k=1}^{t} d_{ks} \le \sigma^M \sum_{k=1}^{t} d_{ks} \le y^M - \Delta_0\alpha_s^1, \ \ s = \overline{t+1,n},$$

разом зі сталими Δ_0, Δ_1 задовольняють нерівності

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\left(b_k^0 - \sum_{k=t+1}^{n} d_{ks}\alpha_s^1\right) - \frac{\sigma^m}{\Delta_1^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{l} d_{ki}d_{ki} + \Delta_1\sum_{i=1}^{t} d_{ki} + \Delta_1\sum_{i=1}^{t} d_{ik}\right) \le \sigma^M, \ \ s = \overline{1,t},$$

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\left(b_k^0 - \sum_{k=t+1}^{n} d_{ks}\alpha_s^1\right) - \frac{\sigma^M}{\Delta_1^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{l} d_{ki}d_{ki} + \Delta_1\sum_{i=1}^{t} d_{ki} + \Delta_1\sum_{i=1}^{t} d_{ik}\right) \ge \sigma^m, \ \ s = \overline{1,t}.$$

Тоді існує додатний вектор $\{y_i\}_{i=1}^n$, який розв'язує оптимізаційну задачу (10), (11), а його компоненти міститимуться в інтервалі значень $[y^m, y^M]$.

Доведення. Складемо функцію Лагранжа оптимізаційної задачі (10), (11):

$$\mathcal{L}^0 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}[\beta_j - y_j]^2 + \sum_{k=1}^{t}\lambda_k\left[\sum_{j=1}^{n} d_{kj}y_j + \Delta_1 y_k - \Delta_0 b_k^0\right].$$

Перевірка необхідних і достатніх умов існування мінімуму екстремальних задач приведе до виконання умови

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\mathcal{L}^0}{\partial y_i \partial y_j}\psi_i\psi_j = \sum_{s=1}^{n}\psi_s^2 > 0$$

для будь-якого довільно вибраного ненульового вектора $(\psi_1,\ldots,\psi_n)$ та до появи рівнянь

$$\frac{\partial\mathcal{L}^0}{\partial y_s} = y_s - \beta_s + \sum_{k=1}^{t}\lambda_k(\Delta_1\delta_{ks} + d_{ks}) = 0, \ \ s = \overline{1,n}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}^0}{\partial\lambda_k} = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}y_j + \Delta_1 y_k - \Delta_0 b_k^0 = 0, \ \ k = \overline{1,t}, \tag{13}$$

відносно невідомих $\{y_i\}_{i=1}^n$ і множників Лагранжа $\{\lambda_i\}_{i=1}^t$. Компоненти вектора y, який буде розв'язком оптимізаційної задачі (10), (11), визначимо за множниками Лагранжа $\{\lambda_i\}_{i=1}^t$ з виразу (12), а значення множників Лагранжа $\{\lambda_i\}_{i=1}^t$ — з виразу (13), який трансформується у рівняння

$$(\alpha_k - \lambda_k) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(b_k^0 - \sum_{k=t+1}^{n} d_{ks}\alpha_s^1\right) - \frac{1}{\Delta_1^2}\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}d_{ji}\right](\alpha_j - \lambda_j) -$$

$$-\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}(\alpha_j - \lambda_j) + \sum_{j=1}^{t} d_{jk}(\alpha_j - \lambda_j)\right), \ \ k = \overline{1,t}. \tag{14}$$

Систему рівнянь (14) можна подати у вигляді

$$\alpha_k - \lambda_k = \Theta_k^0(\alpha_1 - \lambda_1, \dots, \alpha_t - \lambda_t), \ k = \overline{1,t}.$$

Умови теореми гарантуватимуть, що оператор $\{\Theta_i^0(\alpha_1 - \lambda_1, \dots$ $\dots, \alpha_t - \lambda_t)\}_{i=1}^t$ переводитиме множину

$$\mathcal{M}_\lambda = \left\{ \alpha_k - \lambda_k \in R, \left| \frac{\sigma^M + \sigma^m}{2} - \alpha_k + \lambda_k \right| \le \frac{\sigma^M - \sigma^m}{2}, \ k = \overline{1,l} \right\}$$

саму в себе. Тому на підставі принципу Шаудера [3] можна зробити висновок про існування ненульових значень множників Лагранжа $\{\lambda_i\}_{i=1}^t$, причому їх значення містяться в діапазоні $\sigma^m \le \alpha_k - \lambda_k \le \sigma^M$, $k = \overline{1,t}$. За таких умов компоненти вектора ступенів задоволення потреб споживачів

$$y_s = \Delta_1(\alpha_s - \lambda_s) + \sum_{k=1}^{t} (\alpha_k - \lambda_k) d_{ks}, \ s = \overline{1,t},$$

$$y_s = \Delta_0 \alpha_s^1 + \sum_{k=1}^{t} (\alpha_k - \lambda_k) d_{ks}, \ s = \overline{t+1,n},$$

міститимуться в заданому інтервалі $[y^m, y^M]$.

Теорему доведено.

За допомогою оптимізаційної задачі (10), (11) знайдемо лише частину компонент $\{y_i\}_{i=1}^n$ вектора ступенів задоволення потреб споживачів. Усі інші компоненти цього вектора, як і решта рівноважних економічних характеристик, визначатимуться за ними.

РІВНОВАЖНІ СТУПЕНІ ЗАДОВОЛЕННЯ ПОТРЕБ СПОЖИВАЧІВ

Для знаходження решти компонент $\{y_i\}_{i=n+1}^l$ сформулюємо задачу

$$\min_{(y_{n+1}, \dots, y_l)} \mathcal{F}^1, \quad \mathcal{F}^1 = \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{l} [\beta_j - y_j]^2 \tag{15}$$

за додаткових вимог

$$b_k^0 - \Delta_0 b_k^0 + \Delta_1 y_k = \sum_{j=n+1}^{l} d_{kj} y_j, \ k = \overline{1,t}, \tag{16}$$

$$y^m \le y_k \le y^M, \ k = \overline{n+1,l}. \tag{17}$$

Можливість одночасного виконання умов (16) і (17) випливає з нерівностей (9).

Теорема 2. Нехай виконуються умови (9) і справедливі нерівності

$$\exists j \in [n+1, l] : [y^M - y_j][y_j - y^m] > 0. \tag{18}$$

Тоді існує додатний вектор $\{\alpha_i^1\}_{i=1}^t$, для якого розв'язок оптимізаційної задачі (15) з

$$\beta_s = \sum_{k=1}^{t} \alpha_k^1 d_{ks}, \quad s = \overline{n+1, l}$$

задовольнятиме обмеження (17) і рівності (16).

Доведення. Складемо функцію Лагранжа оптимізаційної задачі (15)–(17). Звернемо увагу, що обмеження (17) еквівалентні нерівностям

$$[y^M - y_j][y_j - y^m] \geq 0, \quad j = \overline{n+1, l}.$$

Додатково припустимо, що деякі компоненти вектора, який розв'язує оптимізаційну задачу (15)–(17), можуть набувати значень $y_k = \frac{1}{2}(y^M + y^m)$, $k \in M_0$, $M_0 \subset [n+1, l]$ (але множина M_0 може виявитись і порожньою). З урахуванням цього функцію Лагранжа запишемо у вигляді

$$\mathcal{L}^1 = \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{l} [\beta_j - y_j]^2 + \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^1 \left[\sum_{j=n+1}^{l} d_{kj} y_j - \Delta_1 y_k + \Delta_0 b_k^0 - b_k^0 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j \in M_0} \chi_j^0 [y^M + y^m - 2 y_j] - \sum_{j \in [n+1, l] \setminus M_0} \chi_j^1 [y^M - y_j][y_j - y^m].$$

Для такої функції Лагранжа та будь-якого довільно вибраного ненульового вектора $(\boldsymbol{\psi}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{\psi}_l)$ виконуватиметься умова

$$\sum_{j=n+1}^{l} \sum_{i=n+1}^{l} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^1}{\partial y_i \partial y_j} \boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\psi}_j = \sum_{s=n+1}^{l} \boldsymbol{\psi}_s^2 + 2 \sum_{s \in [n+1, l] \setminus M_0} \chi_j^1 \ \boldsymbol{\psi}_s^2 > 0.$$

Тут враховано, що множники Лагранжа $\{\chi_s^1\}_{s \in [n+1, l] \setminus M_0}$ мають бути невід'ємними. Отримаємо також рівняння

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial y_s} = y_s - \sum_{k=1}^{t} \alpha_k^1 d_{ks} + \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^1 d_{ks} - \sum_{j \in M_0} \chi_j^0 \delta_{js} -$$

$$- \frac{1}{2} \chi_s^1 (y^M + y^m - 2 y_s) = 0, \quad s = \overline{n+1, l}; \tag{19}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial \lambda_k^1} = \sum_{j=n+1}^{l} d_{kj} y_j - \Delta_1 y_k + \Delta_0 b_k^0 - b_k^0 = 0, \quad k = \overline{1, t}; \tag{20}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial \chi_k^0} = y^M + y^m - 2 y_k = 0, \quad k \in M_0. \tag{21}$$

Через наявність в оптимізаційній задачі (15)–(17) обмежень у формі нерівностей згідно з теоремою Куна–Таккера [4] варто вимагати додаткового виконання умов

$$\chi_j^1 \geq 0, \quad \chi_j^1 [y^M - y_j][y_j - y^m] = 0, \quad j \in [n+1, l] \setminus M_0. \tag{22}$$

Із виразу (19) випливає

$$\chi_s^1 = \frac{y_s - \sum_{k=1}^{t} \alpha_k^1 d_{ks} + \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^1 d_{ks}}{y^M + y^m - 2y_s}, \quad s \in [n+1, l] \setminus M_0.$$

Тому мають виконуватись рівності

$$[y^M - y_j][y_j - y^m] = 0, \quad j \in M_1, \tag{23}$$

$$y_s - \sum_{k=1}^{t} \alpha_k^1 d_{ks} + \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^1 d_{ks} = 0, \quad s \in M_2, \tag{24}$$

де $\bigcup_{i=0}^{2} M_i = [n+1, l]$. Крім того, з виразів (19) і (21) також отримаємо

$$\frac{1}{2}(y^M + y^m) - \sum_{k=1}^{t} \alpha_k^1 d_{ks} + \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^1 d_{ks} - \chi_s^0 = 0, \quad s \in M_0. \tag{25}$$

Рівняння (25) дасть змогу визначити множники Лагранжа $\{\chi_s^0\}_{s \in M_0}$. А з рівняння (24) за множниками Лагранжа $\{\lambda_i^1\}_{i=1}^t$ визначатимемо лише ту частину величин $(y_{n+1}, \dots, y_l)$, які задовольняють обмеження (17) і не дорівнюють $\frac{1}{2}(y^M + y^m)$, значення решти цих величин знайдемо з рівностей або (21), або (23). Уведення множини M_0 дозволяє коректно означити множники Лагранжа $\{\chi_s^1\}_{s \in [n+1, l] \setminus M_0}$ відповідно до вимог (22).

Рівняння на множники Лагранжа $\{\lambda_i^1\}_{i=1}^t$ отримаємо з рівностей (20) з урахуванням виразів (21), (23), (24):

$$b_k^0 - \Delta_0 b_k^0 + \Delta_1 y_k - \sum_{j \in M_0 \cup M_1} d_{kj} y_j = \sum_{j=1}^{t} \left[\sum_{i \in M_2} d_{ki} d_{ji} \right] (\alpha_j^1 - \lambda_j^1), \quad k = \overline{1, t}.$$

Матричні елементи d_{kj} додатні, унаслідок чого матриця $\mu = \| \sum_{i \in M_2} d_{ki} d_{ji} \|_{k,j=1}^t$ буде додатно означеною, а отже, і невиродженою. Умови теореми гарантують, що множина M_2 непорожня. Існування оберненої матриці $\mu^{-1} = \| \mu_{kj}^{-1} \|_{k,j=1}^t$ забезпечуватиме існування множників Лагранжа $\{\lambda_i^1\}_{i=1}^t$, оскільки завжди можна підібрати такі значення компонент додатного вектора $\{\alpha_i^1\}_{i=1}^t$, щоб компоненти вектора $\{\lambda_i^1\}_{i=1}^t$ були ненульовими:

$$\alpha_s^1 - \lambda_s^1 = \sum_{k=1}^{t} \mu_{sk}^{-1} \left(b_k^0 - \Delta_0 b_k^0 + \Delta_1 y_k - \sum_{j \in M_0 \cup M_1} d_{kj} y_j \right), \quad s = \overline{1, t}.$$

Позначимо:

$$y_s^1 = \sum_{k=1}^{t} d_{ks} \sum_{j=1}^{t} \mu_{kj}^{-1} \left(b_j^0 - \Delta_0 b_j^0 + \Delta_1 y_j - \sum_{j \in M_0 \cup M_1} d_{kj} y_j \right), \quad s = M_1 \cup M_2. \tag{26}$$

Вважатимемо, що для індексів з множини M_1 виконується нерівність

$$[y^M - y_j^1][y_j^1 - y^m] \le 0, \;\; j \in M_1.$$

Покладатимемо $y_j = y^M$, якщо $y^M \le y_j^1$, або $y_j = y^m$, якщо $y^m \ge y_j^1$, тому $\chi_j^1 > 0$, $j \in M_1$. Натомість для індексів з множини M_1 матимемо

$$y_j = y_j^1, \;\; [y^M - y_j][y_j - y^m] > 0, \;\; j \in M_1.$$

Теорему доведено.

Зауваження. Вимоги теореми 2 виключають випадок

$$[y^M - y_j][y_j - y^m] = 0 \;\; \forall\, j \in [n+1, l]. \tag{27}$$

Але якщо замість умови (18) вимагати виконання обмежень

$$y^M \ge \sum_{k=1}^{t} d_{ks} \sum_{j=1}^{t} \tilde{\mu}_{kj}^{-1} (b_j^0 - \Delta_0 b_j^0 + \Delta_1 y_j) \ge y^m, \;\; s = \overline{n+1, l},$$

де $\left\| \tilde{\mu}_{kj}^{-1} \right\|_{k,j=1}^{t}$ — матриця, обернена до $\left\| \sum_{i=n+1}^{l} d_{ki} d_{ji} \right\|_{k,j=1}^{t}$, то теорема 2 буде справедлива і допускатимуться рівності (27).

Функцію Лагранжа $\mathcal{L}^1$ тоді можна записувати у вигляді

$$\mathcal{L}^1 = \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{l} [\beta_j - y_j]^2 + \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^1 \left[\sum_{j=n+1}^{l} d_{kj} y_j - \Delta_1 y_k + \Delta_0 b_k^0 - b_k^0 \right],$$

а M_2 буде множиною всіх індексів: $M_2 = [n+1, l]$.

У контексті цього зауваження відзначимо, що замість послідовного розв'язування задач (10), (11) і (15)–(17) можна було б одразу розглядати об'єднану задачу

$$\min_{(y_1, \ldots, y_l)} \tilde{\mathcal{F}}, \;\; \tilde{\mathcal{F}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} [\tilde{\beta}_j - y_j]^2 \tag{28}$$

за додаткових вимог

$$\sum_{j=1}^{l} d_{kj} y_j = b_k^0, \;\; k = \overline{1, t}. \tag{29}$$

За схемою, використаною для отримання виразу (26), дістанемо розв'язок задачі (28), (29):

$$y_s = \sum_{k=1}^{n} d_{ks} \sum_{j=1}^{t} \omega_{kj}^{-1} b_j^0, \;\; s = \overline{1, l}, \tag{30}$$

де $\left\| \omega_{kj}^{-1} \right\|_{k,j=1}^{t}$ — матриця, обернена до $\left\| \sum_{i=1}^{l} d_{ki} d_{ji} \right\|_{k,j=1}^{t}$. Звичайно, що без попереднього встановлення додаткових умов невідомо, чи задовольняє розв'язок необхідні обмеження. Але навіть коли цей розв'язок міститься в потрібній області значень $[y^m, y^M]$, вираз (30) не завжди буде достатньо інформативним. Зокрема матричні елементи c_{kj}, а тому і d_{kj}, можуть залежати від деякої економічної характеристики $\boldsymbol{z}^0$. І тоді вираз (30) не дозволить повною мірою оцінити характер залежності ступенів задоволення потреб споживачів від зміни цієї додаткової характеристики $\boldsymbol{z}^0$. Якщо для матричних елементів d_{kj} вказуватиметься функціональна залежність від $\boldsymbol{z}^0$ в явному вигляді, то для елементів ω_{kj}^{-1} така залежність може бути втрачена. Натомість алгоритм розв'язування задачі (10), (11) дає змогу зберегти всю потрібну інформацію про залежність величин $y_1, \ldots, y_n$ від додаткових характеристик. А саме ці компоненти вектора ступенів задоволення потреб споживачів, відповідно до співвідношення (8), пов'язані з визначенням рівноважного вектора цін. Завжди важливо мати найдетальнішу інформацією про залежність від $\boldsymbol{z}^0$ для більш повного оцінювання впливу характеристики $\boldsymbol{z}^0$ на ціноутворення в економічній системі.

ОПТИМАЛЬНИЙ СТАН РІВНОВАГИ

Рівноважні ступені задоволення потреб споживачів є розв'язком оптимізаційних задач. Таким чином, вони описують деякий в певному розумінні оптимальний стан рівноваги. Для його повного опису слід також вказати, яких значень набуватимуть компоненти вектора цін, обсягів випуску товарів та рівнів оподаткування монополістів.

Рівноважні обсяги випуску товарів монополістами $(x_{t+1}, \ldots, x_n)$ однозначно визначаються ступенями задоволення потреб споживачів

$$x_k = x_k(y), \ x_k(y) = \sum_{j=1}^{l} d_{kj} y_j +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} (E - A)_{ks}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{n} b_{si} - \sum_{j=1}^{n} b_{sj}^1 + e_s - i_s \right], \ k = \overline{t+1, n}.$$

Гарантувати їх додатні значення можна, наклавши умову

$$y^m \sum_{j=1}^{l} d_{kj} + \sum_{s=1}^{n} (E - A)_{ks}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{n} b_{si} - \sum_{j=1}^{n} b_{sj}^1 + e_s - i_s \right] > 0, \ k = \overline{t+1, n}.$$

Виконання цієї умови може порушуватись насамперед через наявність великого обсягу запасу товарів у суб'єктів економічної системи. У результаті виникатимуть сумніви в доцільності виробництва деяких товарів, а це може спричинити виникнення проблем у функціонуванні окремих суб'єктів економічної системи. Простим рішенням уникнення появи таких дисбалансів видається встановлення обмежень на обсяги запасу товарів з тим, щоб споживчі інтереси суб'єктів економічної системи забезпечувалися переважно за рахунок виготовлення нових товарів. Тоді елементи матриці запасу товарів мають задовольняти нерівності

$$\frac{y^m}{\pi_j} c_{kj} + b_{kj} - b_{kj}^1 \ge 0, \;\; k, j = \overline{1, n}.$$

Рівноважні значення цін в економічній системі отримаємо, розв'язавши систему рівнянь

$$p_j = \sum_{k=1}^{t} \left(a_{kj} + \frac{b_{kj} - b_{kj}^1}{x_j^0} + \frac{y_j}{\pi_j^0 x_j^0} c_{kj} \right) \hat{p}_k +$$

$$+ \sum_{k=t+1}^{n} \left(a_{kj} + \frac{b_{kj} - b_{kj}^1}{x_j^0} + \frac{y_j}{\pi_j^0 x_j^0} c_{kj} \right) p_k^0, \;\; j = \overline{1, t}, \tag{31}$$

Припускатимемо, що норма невід'ємної матриці $\mathcal{H}(y^M)$ менша за одиницю, де $\mathcal{H}(y) = \left\| a_{kj} + \frac{1}{x_j^0} b_{kj} - \frac{1}{x_j^0} b_{kj}^1 + \frac{y_j}{\pi_j^0 x_j^0} c_{kj} \right\|_{k,j=1}^{t}$. У цьому випадку можна записати аналітичний вираз розв'язку системи рівнянь (31):

$$p_s = p_s(y), \;\; p_s(y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{t} (E - \mathcal{H}(y))_{js}^{-1} \sum_{k=t+1}^{n} \left[a_{kj} + \frac{1}{x_j^0} b_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j^0 x_j^0} c_{kj} \right] p_k^0, \;\; s = \overline{1, t}. \tag{32}$$

Завдяки умовам на матрицю $\mathcal{H}(y)$ справедливий розклад [5]

$$(E - \mathcal{H}(y))^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}^j(y), \quad s = \overline{1, t},$$

тому, якщо наявна функціональна залежність елементів матриці попиту C від деякої характеристики z^0, вона не втратиться і у виразі (32).

Той чи інший стан рівноваги можна реалізувати вибором стратегії оподаткування, зокрема вибором значень рівнів оподаткування монополістів. Відповідно до виразу (8) матимемо

$$\pi_j(x, y) =$$

$$= \frac{\sum_{s=1}^{t} c_{sj} y_j p_s(y) + \sum_{s=t+1}^{n} c_{sj} y_j p_s^0}{p_j^0 x_j - \sum_{k=1}^{t} (a_{kj} x_j + b_{kj} - b_{kj}^1) p_k(y) - \sum_{k=t+1}^{n} (a_{kj} x_j + b_{kj} - b_{kj}^1) p_k^0}, \;\; j = \overline{t+1, n}.$$

Насамкінець звернемо увагу, що для кожної з рівноважних характеристик є змога вказати інтервал усіх їх можливих значень. Для ступенів задоволення потреб споживачів це $[y^m, y^M]$; i-та компонента вектора обсягів випуску товарів монополістів міститиметься в діапазоні від $x_i^m = x_i(y^m)$

до $x_i^M = x_i(y^M)$, ціна на i-й товар міститиметься в інтервалі $[p_i(y^m), p_i(y^M)]$, а рівні оподаткування i-го монополіста змінюватимуться в межах області $[\pi_i(x^M, y^m), \pi_i(x^m, y^M)]$.

ВИСНОВКИ

У результаті проведеного дослідження запропоновано алгоритм визначення станів рівноваги економічної системи із заданим інтервалом значень рівноважних характеристик. Ураховано наявність в економічній системі виробників-монополістів, а також те, що споживачі є ненасичуваними. Особливості алгоритму пов'язані з можливістю врахування дії додаткових чинників впливу на формування споживчих уподобань. Запропоновані раніше алгоритми визначення станів рівноваги економічної системи за наявності монополістів [1, 6, 7] не дають такої можливості. Використане наближення моделі економіки з постійними інтересами споживачів передбачає, що елементи матриці попиту c_{ki}, які описують споживчі уподобання суб'єктів економічної системи, є постійними. Запропонований тут алгоритм може бути використаний не тільки для цього наближення, а й у разі, коли це наближення буде узагальнене на випадок залежності споживчих коефіцієнтів c_{ki} від деякої економічної характеристики $\boldsymbol{z}^0$, $c_{ki} = c_{ki}(\boldsymbol{z}^0)$.

Алгоритм дає змогу визначити характеристики стану рівноваги економічної системи, перебування в якому дозволить суб'єктам економічної системи функціонувати в прийнятному для них режимі, уникнувши тим самим негативної дії монопольних явищ. Указано інструменти реалізації таких станів рівноваги.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончар М.С.* Математичні основи інформаційної економіки / М.С. Гончар. — К.: Ін-т теор. фізики, 2007. — 464 с.
2. *Debreu G.* Existence of competitive equilibrium / G. Debreu // Handbook of Mathematical Economics, ed. By K.J. Arrow and M.D. Intriligator. — Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982. — Vol. II. — P. 698–742.
3. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 442 с.
4. *Пшеничный Б.Н.* Метод линеаризации / Б.Н. Пшеничный. — М.: Наука, 1983. — 136 с.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
6. *Гончар М.С.* Вплив монополізму та оподаткування на економічну систему / М.С. Гончар, А.П. Махорт // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 1. — С. 77–99.
7. *Махорт А.Ф.* Оптимизация негативних влияний монополизма на состояние экономической системы / А.Ф. Махорт // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 1. — С. 146–153.

Надійшла 25.05.2016