УДК 517.925.51
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.3.02

ПРО ДВОКРИТЕРІАЛЬНУ ОПТИМІЗАЦІЮ ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ

Ф.Г. ГАРАЩЕНКО, В.Р. КУЛЯН, О.О. ЮНЬКОВА

Анотація. Наукове дослідження присвячено розробленню нових та застосуванню відомих методів математичного моделювання для розв'язання задачі оптимального інвестування у ризиковані цінні папери. Сформульовано нові постановки задач та побудовано методи траєкторного моделювання динаміки ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій. Для розв'язання задачі моделювання оптимальної траєкторії портфеля акцій застосовано методи оптимального керування системою, у якій параметрами керування є частки акцій різних видів у портфелі. Задачі оптимального керування динамікою інвестиційного портфеля сформульовано для критеріїв якості, один з яких використовує «програмну траєкторію» (розв'язується задача побудови оптимального за очікуваною ринковою вартістю портфеля акцій), а другий — відхилення розрахункової траєкторії від термінального значення (розглядається задача про оптимізацію побудованого портфеля інвестицій за ризикованістю). Для її розв'язання застосовано допустиму й ефективну множини портфелів. Алгоритм розв'язання задачі дозволяє динамічно враховувати інструментальні ринкові обмеження, які задаються для математичного формулювання задачі.

Ключові слова: математична модель, допустима множина, ефективна множина, диверсифікація інвестиційного портфеля.

ВСТУП

Для розв'язання та аналізу прикладних задач портфельного інвестування існує широкий спектр підходів [1, 3, 4]. Більшість з них передбачає активне використання методів технічного аналізу, які дають змогу визначити ринкову вартість акції у майбутньому. Така побудова прогнозу за допомогою добре розроблених математичних формалізацій і підходів та відносно нескладної практичної реалізації активно розвивається і ефективно застосовується не тільки на фондовому ринку. Використання аналітичних методів фундаментального аналізу дозволяє з'ясувати, чому ринкова вартість акції у майбутньому буде якраз такою. Натепер, зважаючи на складність математичних моделей для використання в дослідженні процесів ринкового ціноутворення активів фондового ринку, методи фундаментального аналізу ще не знайшли ефективного розвитку та конструктивного застосування. Принципи аналізу процесів, які ґрунтуються на розробленні та застосуванні методів математичного моделювання [2], [4], очевидно, є найбільш перспективними і їх розробленню приділяється належна увага науковців. У цій роботі зроблено спробу побудови нових фундаментальних підходів для розв'язання задач портфельного інвестування, що ґрунтуються на застосуванні методів математичного моделювання динамічних систем та допустимої і ефективної множини портфелів акцій.

Мета роботи – розробити аналітичні методи та обчислювальні процедури для розв'язання задачі двокритеріальної оптимізації портфеля ризикованих цінних паперів у постановці Г. Марковиця за наявності кількісних та якісних інструментальних ринкових обмежень на структуру портфеля.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ОПТИМІЗАЦІЮ ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ ОБМЕЖЕНЬ

Побудовані у працях [2, 3] математичні моделі динаміки ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій, а також сформульовані для них критерії якості дають змогу поставити такі нові прикладні математичні задачі портфельного аналізу про:

1) оптимальний початковий портфель інвестицій за заданого рівня його очікуваної прибутковості на визначений час у майбутньому;

2) оптимізацію інвестиційного портфеля на основі заданої «програмної траєкторії»;

3) оптимальну диверсифікацію інвестиційного портфеля за заданих його початкової структури та рівня очікуваної прибутковості.

Математична задача побудови оптимальної динаміки портфеля акцій у найбільш загальній постановці Г. Марковиця має вигляд [1]

$$\left\{\begin{array}{l} r^{\mathrm{T}} x = \max\limits_{x}, \\ x^{\mathrm{T}} V x \to \min\limits_{x}, \\ I^{\mathrm{T}} x = 1, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

де Т — знак транспонування.

Предметний зміст цієї двокритеріальної задачі полягає у визначенні оптимальної інвестиційної стратегії, що передбачає максимізацію очікуваної прибутковості та мінімізацію ризику одночасно. Згідно з Г. Марковицем критерії в задачі є суперечливими, тобто покращення результату за одним з них призведе до погіршення за іншим. Це означає, що збільшенню прибутковості портфеля відповідає збільшення його ризикованості. Існують різні підходи до розв’язання задачі (1), проте вони здебільшого мають академічний характер і їх важко застосувати до реального інвестування у цінні папери. Кроком, який може наблизити формулювання задачі (1) до потреб практичного інвестування, є розбиття цієї двокритеріальної задачі на дві однокритеріальні, перша з яких передбачає оптимізацію ризику за заданого рівня очікуваної прибутковості на обраний момент часу $r_p(T)$, а друга — оптимізацію очікуваної прибутковості для визначеного інвестором «оптимального» рівня ризику портфеля τ_p. У деяких випадках такі математичні постановки задач нелінійного програмування дозволяють отримати аналітичні розв’язки [2], але при цьому не розглядаються істотні особливості, які полягають у тому, що на кожному кроці розв’язання задачі про диверсифікацію портфеля акцій необхідно враховувати як бюджетні, так і інструментальні обмеження, які дають змогу проаналізувати наявність на ринку потрібної кількості та якості фінансових інструментів:

$$x_i(t) \in X(t)\,,\; i = \overline{1,n}\,, \qquad (2)$$

де $X(t)$ — обмежена замкнена множина допустимих портфелів. Математична постановка задачі оптимізації ризику інвестиційного портфеля за визначеного на момент часу T рівня його очікуваної прибутковості $r_p(T)$ є такою:

$$\begin{cases} r^{\mathrm{T}}(T)x(T) = r_P(T), \\ x^{\mathrm{T}}(T)Vx(T) \to \min\limits_x, \\ I^{\mathrm{T}}x(T) = 1, \\ x_i(t) \ge 0,\; i = \overline{1,n},\; t \in [t_0, T], \\ x_i(t) \in X(t),\; i = \overline{1,n},\; t \in [t_0, T]. \end{cases} \qquad (3)$$

На прикладі інвестування в акції розглянемо задачу оптимізації ризику портфеля для заданого рівня його очікуваної прибутковості $r_p(T)$, урахувавши при цьому обмеження (2).

Математичні моделі формування динаміки ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій [1, 2] у загальному вигляді можуть бути записані так:

$$\frac{dr_i}{dt} = f_i(r_i, t, \alpha),\; r_i(t_0) = r_{i0},\; t \in [t_0, T],\; i = \overline{1,n} \qquad (4)$$

та

$$\frac{dr_p}{dt} = f^{\,p}(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t)\,,\; r_p(t_0) = r_{p0} \qquad (5)$$

відповідно. Тут r_i — очікувана ринкова вартість i-ї акції; r_p — очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i — частка акцій i-го виду в портфелі, $i = \overline{1,n}$; V — коваріаційна матриця $(n \times n)$; I — одиничний вектор $(n \times 1)$; t — час; α — вектор параметрів моделі.

Процедуру розв'язання задачі (1) умовно поділимо на дві частини. Перша полягатиме у формулюванні динамічної постановки і розв'язанні для неї задачі оптимального керування траєкторією портфеля акцій.

ЗАДАЧА ПРО ПОБУДОВУ ОПТИМАЛЬНОЇ ТРАЄКТОРІЇ ДИНАМІКИ РИНКОВОЇ ВАРТОСТІ ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ

Дано: математична модель динаміки формування ринкової вартості інвестиційного портфеля (5); бажаний рівень прибутковості портфеля у момент часу T $r_p(T) = r_{p_T}$; часовий інтервал $t \in [t_0, T]$; обмеження на керування $x(t_i) \in X(t)$; критерій якості

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{T} (r_p(t) - r_p(T))^2\, dt + \Phi(r_p(t_0)) \to \min_{x(t) \in X(t)}\,,$$

де $\Phi(r_p(t_0))$ — задана функція.

Необхідно: визначити вектор $x(t_0)$ та відповідно $r_p(t_0)$. Вектор x описує частки акцій різних видів у портфелі і є таким: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$, де n — кількість видів акцій.

Для розв'язання поставленої задачі оптимального керування з одним закріпленим кінцем траєкторії та фіксованим часом застосуємо принцип максимуму. В результаті отримаємо можливість визначити $x(t_0)$ і на його основі $r_p(t_0)$. Функція Гамільтона матиме вигляд

$$H(r_p(t), \psi(t), t, x(t)) = -(r_p(t) - r_p(T))^2 + \psi(t) \times f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i).$$

Необхідна умова її оптимальності за керуванням є такою:

$$\frac{\partial(-(r_p(t) - r_p(T))^2 + \psi(t) * f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i))}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{6}$$

Розв'язком рівняння (6) є функція керувань інвестиційним портфелем $x^*(\psi(t), r_p(t), t).$ Побудуємо спряжену систему у вигляді

$$\dot{\psi}(t) = -2(r_p(t) - r_p(T)) + \psi(t) \times f'_{r_p}(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i).$$

Сформуємо умову трансверсальності на лівому кінці траєкторії:

$$\psi(t_0) = -\frac{\partial \Phi(r_p(t_0))}{\partial r_p}.$$

Крайова задача принципу максимуму матиме вигляд

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -2(r_p(t) - r_p(T)) + \psi(t) \times f'_{r_p}((r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i), \\ \dot{r}_p(t) = f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}) \end{cases}$$

за відомих значень $\psi(t_0)$, $r_p(T)$.

Розв'язком крайової задачі будуть функції $x(t)$ і $\psi(t)$, на основі яких будується оптимальний процес. Інша математична проблема, яка може бути сформульована під час розв'язання задачі (1), полягає у диверсифікації портфеля інвестицій.

ЗАДАЧА ПРО ОПТИМАЛЬНУ ДИВЕРСИФІКАЦІЮ ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ

«Програмна» траєкторія з огляду на властивості прикладної задачі може бути сформульована дослідником і змістом її стане бажаний рівень очікуваної прибутковості інвестиційного портфеля у визначений на обраному інтервалі момент часу. Позначимо її через $r_p^*(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Формально постановка задачі може бути такою: для математичної моделі (5) за умов

$$r_p(t_0) = r_{p0}, \quad r_p(T) = r_{pT}, \quad t \in [t_0, T] \tag{7}$$

та критерію якості

$$J(r_p(t),t) = \int_{t_0}^{T} (r_p(t) - r_p^*(t))^2 \, dt \qquad (8)$$

визначити функцію $r_p(t)$, яка на заданому інтервалі часу надає оптимального значення критерію якості (8) та задовольняє умови (7).

Для розв'язання задачі (5), (7), (8) як задачі оптимального керування із двома закріпленими кінцями траєкторії та фіксованим часом застосуємо процедуру принципу максимуму. Побудуємо функцію Гамільтона

$$H(\psi(t),t,u(t)) = -(r_p(t) - r^*(t))^2 + \psi(t) \times f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i),$$

$$\frac{\partial(-(r_p(t) - r^*(t))^2 + \psi(t) f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i))}{\partial r_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (9)$$

Розв'язком рівняння (9) є функція керування інвестиційним портфелем $x^*(t)$.

Крайова задача принципу максимуму матиме вигляд

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -2(r_p(t) - r^*(t)) + \psi(t) * f'_{r_p}((r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}), \\ \dot{r}_p(t) = f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}) \end{cases}$$

за умов (6).

Розв'язавши побудовану систему звичайних диференціальних рівнянь, визначимо функції $r_p(t)$, $\psi(t)$, які, будучи підставленими у розв'язок рівняння (2), дадуть змогу визначити структуру оптимального інвестиційного портфеля на вибраному інтервалі часу.

Побудовану динаміку очікуваної прибутковості портфеля акцій як розв'язок задачі (3) можна зобразити у вигляді графіка (рис. 1).

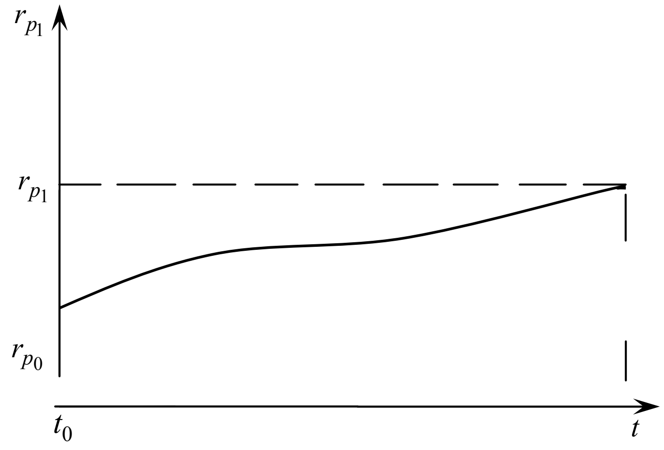

Рис. 1. Динаміка очікуваної ринкової вартості портфеля акцій

Важливою особливістю є те, що така динаміка є оптимальною щодо лише критерію очікуваної прибутковості портфеля. Загальна задача Г. Марковиця оптимізації портфеля ризикованих активів (1) передбачає врахування й іншого критерію — ризикованості. Скористаємось для цього надалі множинами допустимих та ефективних портфелів.

Однією з основних задач портфельного інвестування є проблема оптимальної диверсифікації такого портфеля. Ця задача, у свою чергу, передбачає визначення оптимальних моментів часу, у які доцільно здійснювати реструктуризацію.

Розв'язуючи цю проблему, варто відзначити, що з огляду на технологію здійснення операцій на фондовому ринку змінювати структуру портфеля можна тільки під час торгових сесій. Тому часто за моменти диверсифікації розглядають фіксовані моменти часу $t_0, t_1, ..., t_k$. Наведемо формальний алгоритм вибору моментів диверсифікації портфеля акцій, що ґрунтується на розв'язанні задачі оптимального керування динамікою такого портфеля та аналізі його траєкторії.

ЗАДАЧА ПРО ОПТИМАЛЬНИЙ ВИБІР МОМЕНТІВ ДИВЕРСИФІКАЦІЇ ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ

Процедура розв'язання задачі полягає у побудові послідовності моментів часу таких, що у кожен із них існує і може бути визначено керування портфелем, що дозволить перейти у наступну точку траєкторії. Покладемо $i = 0$, $r_p(T) = r_{pT}$, $t_i = T$.

Крок 1. Наступний момент диверсифікації визначаємо за правилом $t_{i+1} = T - i\Delta t$. Тут Δt – крок за часом. Розв'язуємо задачу оптимального керування з одним закріпленим кінцем траєкторії $r_p(t_i) = r_{pi}$ та фіксованим часом для математичної моделі рівняння динаміки ринкової вартості портфеля акцій (5) і критерію якості

$$J(x(t)) = \int_{t_{i+1}}^{t_i} f^o(x(t), r_p(t), r(t), t)dt. \tag{10}$$

Оптимальний процес на цьому кроці позначимо через $(r_p^*(t_{i+1}); t_{i+1})$.

Крок 2. Умову на правому кінці кожного інтервалу розбиття траєкторії можна записати у вигляді

$$\left| r_p^*(t_i) - r_p(t_i) \right| \leq \varepsilon, \tag{11}$$

де ε – деяке наперед задане число.

Якщо умова (11) виконується, то фіксуємо значення t_{i+1} і $r_p^*(t_{i+1})$ як один з поточних моментів диверсифікації портфеля і очікуваної прибутковості портфеля, що йому відповідає.

Крок 3. Далі $i := i + 1$. Якщо виконується умова $t_{i+1} > t_0$, то переходимо до кроку 1, інакше — вихід .

Наведений алгоритм дає змогу побудувати послідовність моментів диверсифікації портфеля акцій на основі критерію якості (10).

Перейдемо до другої задачі у загальній постановці Г. Марковиця про оптимізацію ризику оптимального за очікуваною прибутковістю портфеля акцій. Для цього скористаємось множинами допустимих та ефективних портфелів, що відповідають обраному набору акцій [1, 2].

Процедура оптимізації ризику для оптимального за очікуваною прибутковістю портфеля полягає у виборі на кожному кроці допустимих портфелів, які лежать на прямій *EF* (рис. 2). Ця лінія з'єднує точку *E*, що відповідає оптимальному за ринковою вартістю портфелю з точкою *F*, яка належить ефективній множині. Ця пряма паралельна осі ризикованості портфелів σ. Особливістю такого вибору оптимального портфеля є те, що на цій прямій згідно з означенням кожному з портфелів відповідає одна і та ж очікувана прибутковість, але ризикованість зменшується у напрямку осі r_p. Така властивість допустимої множини інвестиційних портфелів дозволяє, з одного боку, урахувати обмеження

$$x_i(t) \in X(t)\,,\ i = \overline{1,n}\,,$$

а з другого — визначити портфель «оптимальної» очікуваної прибутковості з меншим ризиком.

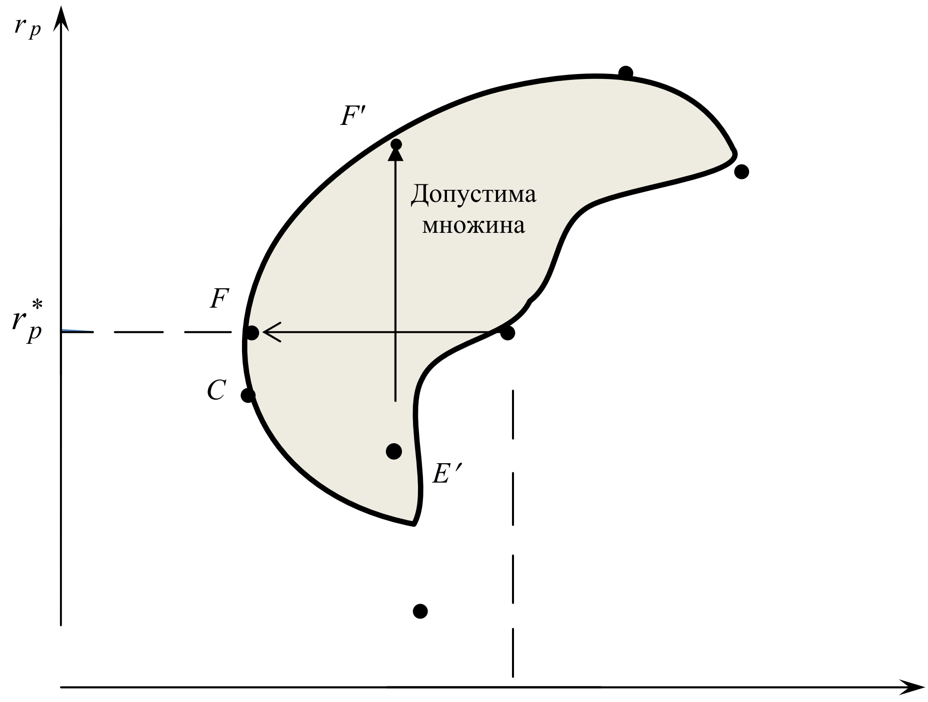

Рис. 2. Розв'язок задачі про оптимізацію ризику портфеля акцій

Якщо ж визначений портфель міститься у точці $E^{'}$, тобто є таким, для якого немає можливості зменшити ризикованість згідно із запропонованим вище правилом, то «оптимальний портфель» визначаємо, перемістивши його з точки $E^{'}$ у точку $F^{'}$, яка є елементом ефективної множини портфелів. Фактично це означає визначення портфеля акцій з більшою очікуваною прибутковістю. Така процедура дозволяє конструктивно врахувати наявні обмеження під час диверсифікації портфеля.

Інша математична постановка задачі про оптимізацію очікуваної прибутковості $r_p(T)$ інвестиційного портфеля за визначеного на момент часу T рівня його ризику τ є такою:

$$\left\{\begin{array}{l} r^{\mathrm{T}}(T)x(T) \to \max\limits_x, \\ x^{\mathrm{T}}(T)Vx(T) = \tau, \\ I^{\mathrm{T}}x(T) = 1, \\ x_i(t) \geq 0,\ i = \overline{1,n},\ t \in [t_0, T], \\ x_i(t) \in X(t),\ i = \overline{1,n},\ t \in [t_0, T]. \end{array}\right\}$$

Процедура оптимізації очікуваної прибутковості r_p портфеля для визначеного рівня його ризику τ полягає у виборі на кожному кроці допустимих портфелів, які лежать на прямій *EG* (рис. 3), що з'єднує точку *E*, яка відповідає оптимальному за очікуваною прибутковістю розрахованому портфелю, і точку *G*, яка належить ефективній множині. Ця пряма паралельна осі ринкової вартості r_p. Особливістю такого вибору оптимального портфеля є те, що на цій прямій згідно з означенням кожному з портфелів відповідає одна і та ж ризикованість, але ринкова вартість r_p збільшується. Ця властивість допустимої множини інвестиційних портфелів, як і в попе-

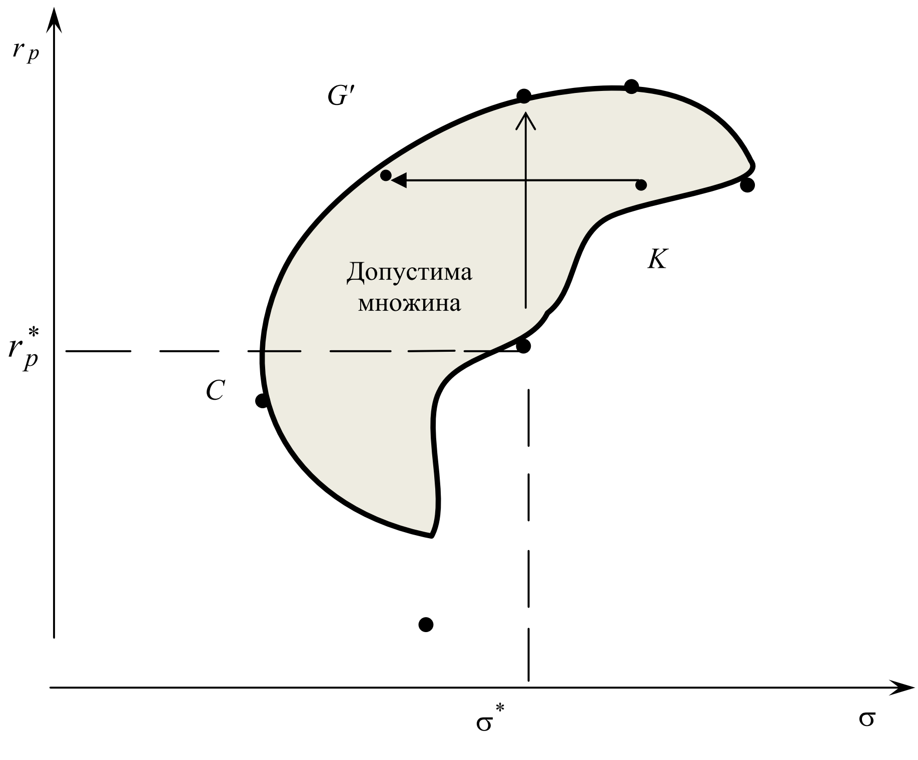

Рис. 3. Розв'язок задачі про оптимізацію ринкової вартості портфеля акцій

редньому випадку, дозволяє, з одного боку, врахувати обмеження $x_i(t) \in X(t)$, $i = \overline{1,n}$, а з другого — визначити портфель з «оптимальним» ризиком і більшою очікуваною прибутковістю.

Якщо визначений портфель міститься у точці K, тобто такий, для якого немає можливості збільшити очікувану прибутковість згідно із запропонованим вище правилом, то «оптимальний портфель» визначаємо, перемістивши його із точки K у точку $G^{'}$, яка є елементом ефективної множини портфелів. Фактично це означає зменшення ризикованості портфеля акцій. Ефективна множина або множина ефективних портфелів на рис. 2, 3 розміщена на дузі CD. Вона є множиною Парето [1] для існуючого на ринку набору акцій.

ВИСНОВОК

У дослідженні наведено нові математичні постановки задач оптимізації структури портфеля акцій та розроблено методи їх розв'язання. Математичні задачі, сформульовані на основі моделей динаміки ринкової вартості однієї акції (4) та портфеля акцій (5), дають змогу розв'язувати задачу оптимальної диверсифікації портфеля інвестицій з урахуванням кількісних та якісних ринкових обмежень на структуру портфеля.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Шарп У.* Инвестиции / Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли. — М.: Инфра-М, 1999. — С.1027.
2. *Гаращенко Ф.Г.* Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Ф.Г. Гаращенко, В.Р. Кулян, В.В. Рутицкая // Кибернетика и вычислительная техника. — 2005. — № 148. — С. 3–10.
3. *Fedir G. Garashchenko* Modelling and Analysis of Investment Trends / Fedir G. Garashchenko, Viktor R. Kulian, Vladislava V. Rutitskaya // Journal of Automation and Information. — New York: Connecticut, 2011. — **43**, Issue 12. — P. 48–58.
4. *Yuri Zaychenko* Direct and dual problem of investment portfolio optimization under uncertainty / Yuri Zaychenko, Inna Sydoruk // International Journal "Information Technologies & Knowledge". — 2014. — **8**, N 3. — P. 225–242.

Надійшла 15.05.2017