

ИНТЕГРАЦИЯ ГИС-ТЕХНОЛОГИЙ И МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО МУЛЬТИПЛЕКСНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Л.С. КОРЯШКИНА, А.П. ЧЕРЕВАТЕНКО, Е.О. КОРЯШКИНА

Аннотация. Представлен обзор программного обеспечения и технологий геоинформационных систем в контексте применения их к решению практических задач территориальной сегментации рынка услуг, математические постановки которых сводятся к непрерывным задачам оптимального мультиплексного разбиения множеств. Под моделями зон обслуживания понимаются основанные на геометрии процедуры создания теоретических зон обслуживания с использованием характеристик сервисного центра и предположений о поведении клиента. Описаны основные требования к наборам данных, используемых в разработанном программном обеспечении, включающем методы решения задач мультиплексного разбиения и ГИС-технологии. Приведены результаты сегментации территории города на зоны обслуживания несколькими центрами услуг с учетом возможности перекрытия зон. Предложен подход к решению задач оптимального размещения сервисных центров в ограниченной невыпуклой несвязной области с одновременной сегментацией рынка услуг.

Ключевые слова: непрерывные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств, геоинформационные системы, ГИС-технологии, территориальная сегментация рынка услуг.

ВВЕДЕНИЕ

Непрерывные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств (ОМРМ) состоят в разбиении ограниченного множества из пространства E_n на такие подмножества точек, каждое из которых отвечает (в соответствии с определенным критерием) одному и тому же набору k точек из N существующих, называемых центрами ($k < N$) [1, 2]. Как отмечено в работе [2], выбор критерия оптимальности мультиплексного разбиения определяется спецификой самих центров. Чаще всего это или минимизация суммарного взвешенного расстояния от центров до всех точек, им соответствующих, или оптимизация наихудшего варианта, когда минимизируется максимальное расстояние от центров до самой отдаленной точки соответствующего им подмножества. Вопросам, связанным с теоретическим обоснованием методов решения непрерывных линейных задач ОМРМ в различных постановках, а также исследованию свойств решений и практических приложений таких задач, посвящены работы [3–6].

В работах [5, 6] показано, что при $\Omega \subset E_2$ непрерывные задачи ОМРМ могут выступать в качестве математических моделей задач территориальной сегментации рынка услуг, в особенности когда зоны могут перекрываться. При этом необходимо учитывать такие факторы, как спрос и предложение на рынке услуг, количество и расположение уже существующих сервисных

центров, неохваченные предложением территории, места наибольшей концентрации потенциальных клиентов. Кроме того, планирование размещения новых сервисных центров предполагает учет и других факторов, таких как наличие коммуникаций в местах предполагаемого размещения центров, возможные дополнительные расходы на строительство собственных коммуникаций, налог на землю и т.п. При моделировании реальных задач сегментации возникают также вопросы, связанные с описанием границ сегментируемых территорий, вычислением фактических расстояний между сервисными центрами и их клиентами.

Приведенные выше данные, а также развитые средства автоматизации процесса поиска кратчайшего пути между конкретными объектами (точками на карте) предоставляют современные геоинформационные системы (ГИС) и технологии. Данная работа посвящена вопросам, связанным с расширением функциональных возможностей компьютерной программы «Optimal Multiplex-Partitioning of Sets» (OMPS-2015) [7] за счет ее интеграции с современными ГИС-технологиями. Некоторые аспекты применения ГИС при решении задач ОМРМ затронуты в работах [8, 9].

ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ ГИС-ТЕХНОЛОГИЙ В КОНТЕКСТЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОМРМ

Всеобщий интерес к использованию геоинформационных систем в различных областях практической деятельности вызвало такое их преимущество перед другими информационными системами, как возможность объединения разнородных данных на основе географической информации. В настоящее время ГИС широко используются для решения задач корпоративных пользователей, например, в градостроительной деятельности, природопользовании и многих других областях, предоставляя пользователям возможности решения задач пространственного анализа, планирования и прогнозирования. Геоинформационные системы нередко выступают как инструмент интеграции разнородных информационных систем предприятия, поэтому программное обеспечение ГИС часто является интегрированным сегментом корпоративной информационной среды [10].

Интернет-услуги в области геоданных постоянно расширяются и технологически совершенствуются, затрагивая все более глубокие пласты геоинформационной деятельности: производство и распространение цифровых геоданных, их стандартизацию и классификацию, создание ГИС с возможностями удаленного доступа для широкого круга пользователей посредством «открытых» сетей, осуществление комплексных научно-исследовательских ГИС-проектов. Дальнейшее совершенствование развития ГИС-индустрии связано с созданием специализированных ГИС-технологий. Уже в настоящее время предлагаемые и реализованные технологические решения достаточно разнообразны. Это разнообразие диктуется желанием учесть, по возможности, широкий спектр функциональных и пользовательских требований, предъявляемых к интернетовским ГИС-приложениям, таким как скорость формирования, передачи и выполнения запросов, набор геоинформационных услуг, предоставляемых сервером, возможность доступа и обработки больших массивов географической информации и т.д. Формируется новое

технологическое направление работы с геопространственными данными в сетевом режиме, получившее название WebGIS-системы. Разрабатываемые интегрированные информационно-технологические решения называют WebGIS-технологиями. Главное их достоинство заключается в том, что эта технология «связывает» между собой и делает доступными для широкого и совместного использования геоданные, рассредоточенные по различным точкам земного шара. Важнейшим свойством разрабатываемых в настоящее время WebGIS-технологий является то, что, применяя их, пользователи Интернет получают возможность активной работы с геоданными (вплоть до реализации собственных ГИС-проектов), не приобретая для этого геоинформационные программные средства (ГИС-оболочки). Основным инструментом работы остаются только интернет-навигаторы/браузеры, оснащенные некоторыми стандартными или специализированными программными приложениями, распространяемыми, как правило, в сети Интернет бесплатно. Таким образом, WebGIS-технологии позволяют добавить геоинформационные функции к широкому спектру приложений, основанных на сетевом доступе и используемых в бизнесе, управлении, образовании.

Далее рассмотрим вопросы совместного использования ГИС-технологий и методов решения задач оптимального мультиплексного разбиения множеств для территориальной сегментации рынка услуг, т.е. моделирования зон сервисного обслуживания на заданной территории. По аналогии с работами [11–13], где были введены понятия торговых зон Вороного, под моделями зон обслуживания будем понимать основанные на геометрии процедуры создания теоретических зон обслуживания с использованием характеристик сервисного центра и предположений о поведении клиента. Выделение таких зон наиболее полезно в случаях, если подробные данные о предпочтениях клиентов отсутствуют либо считаются слишком дорогостоящими, или требуется большое количество времени для их получения. Такие модели могут быть использованы не только для описания, но и для прогнозирования зон обслуживания, для определения потенциальных мест расположения новых сервисных центров, оценивания воздействия этих и других изменений на существующем множестве центров.

Приведем кратко математическую постановку непрерывной линейной задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств евклидова пространства E_2 на подмножества k -го порядка с неизвестными заранее координатами центров, программную реализацию алгоритма решения которой будем расширять возможностями ГИС.

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО МУЛЬТИПЛЕКСНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ И ИДЕЯ МЕТОДА ЕЕ РЕШЕНИЯ

Пусть Ω — ограниченное, измеримое по Лебегу, замкнутое множество из пространства E_2 ; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) \in \Omega$, для всех $i = \overline{1, N}$ — некоторые точки, называемые «центрами», координаты которых неизвестны заранее и подлежат определению, $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$.

Будем использовать следующие обозначения: $N = \{1, 2, \dots, N\}$ — набор всех индексов центров; $M(N, k)$ — множество всех k -элементных под-

множеств множества N , $|M(N, k)| = C_N^k = L$; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$, $l = \overline{1, L}$, — элементы из $M(N, k)$.

С каждым элементом σ_l множества $M(N, k)$ будем ассоциировать подмножество Ω_{σ_l} точек из Ω , а с подмножеством Ω_{σ_l} связывать набор центров $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$, $l = \overline{1, L}$.

Пусть $\Sigma_{\Omega}^{N, k}$ — класс всех возможных разбиений k -го порядка множества Ω на его непересекающиеся подмножества $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$:

$$\Sigma_{\Omega}^{N, k} = \left\{ \bar{\omega} = \{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\} : \bigcup_{l=1}^L \Omega_{\sigma_l} = \Omega, \text{mes}(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}) = 0; \right. \\ \left. \sigma_i, \sigma_j \in M(N, k), i \neq j, i, j = \overline{1, L} \right\}.$$

Непрерывная линейная задача оптимального мультиплексного разбиения множества $\Omega \subset E_2$ при ограничениях с размещением центров формулируется следующим образом [3, 4].

Задача А. Найти, минимизировав функционал

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) \rightarrow \min_{\substack{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N, k}; \\ \tau^N \in \Omega^N}}$$

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x) dx, \quad (1)$$

где $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$; $c(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$ — ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega \times \Omega$ функции, измеримые по аргументу x при любом фиксированном векторе $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$. Функция $\rho(x)$ — ограниченная, измеримая, неотрицательная на множестве Ω ; $w_i > 0$, a_i , $i = \overline{1, N}$, — заданные числа.

Оптимальным решением задачи А2- k называется пара $(\bar{\omega}^*, \tau^{N*})$, при которой достигается минимальное значение функционала F .

Метод решения задачи А2- k предполагает переход к эквивалентной задаче, сформулированной относительно характеристических вектор-функций подмножеств Ω_{σ_l} , $l = \overline{1, L}$, составляющих разбиение k -го порядка множества Ω , обозначаемых $\lambda^l(x) = (\lambda_1^l(x), \dots, \lambda_N^l(x))$, $l = \overline{1, L}$, определенных на множестве Ω , с координатами, вычисляемыми по следующей формуле $\forall x \in \Omega_{\sigma_l}$:

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{\sigma_l} \text{ \& } i \in \sigma_l, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L},$$

Задача Б. Найти $\lambda(\cdot)$, τ^N , которые обеспечивают

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau^N) \in \Gamma_0^k \times \Omega^N} \int \sum_{l=1}^L \left(\sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \lambda_i^l(x) \right) \rho(x) dx,$$

$$\Gamma_0^k = \left\{ \lambda^l(\cdot) = (\lambda_1^l(\cdot), \dots, \lambda_N^l(\cdot)) : \lambda_i^l(x) = 0 \vee 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad i = \overline{1, N}, \quad l = \overline{1, L}, \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^N \lambda_i^l(x) = k, \quad l = \overline{1, L}, \quad \text{почти везде для } x \in \Omega \right\}.$$

В работах [3, 4] показано, что оптимальное решение задачи **B2-k** имеет следующий вид: для $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$ и почти всех $x \in \Omega$

$$\lambda_{*i}^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_{*i}) / w_i + a_i \leq c(x, \tau_{*j}) / w_j + a_j, \\ & i \in \sigma_l, \quad j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в качестве $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$ выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\tau) \rightarrow \min_{\tau^N \in \Omega^N}, \quad (2)$$

где

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in M(N, k) \\ l=1, L}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i] \rho(x) dx. \quad (3)$$

Решение непрерывной задачи ОМРМ сводится к решению конечномерной задачи (2) с недифференцируемой функцией (3) любым известным методом негладкой оптимизации [14].

ИНТЕГРАЦИЯ ГИС-ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ РЕШЕНИЯ МУЛЬТИПЛЕКСНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Геоинформационная система хранит информацию о реальном мире в виде набора тематических слоев, которые объединены на основе географического положения. Этот простой, но очень гибкий подход доказал свое преимущество при решении разнообразных реальных задач. Электронные карты, как правило, содержат полную информацию о протяженности дорог, их связности и условиях перемещения по ним (скоростные режимы, запрещенные съезды, наличие перевалочных пунктов и т.д.).

В процессе исследования возможности применения ГИС-технологий при решении непрерывных задач ОМРМ выбор платформы ГИС был ориентирован на наличие функционала поиска кратчайшего пути и расчета его длины. Данный функционал является базовым в программных продуктах семейства ArcGIS. Однако ArcGIS является платным и для его использования следует приобрести лицензию. Альтернативой платному программному обеспечению является свободная кроссплатформенная геоинформационная система QGIS с открытым кодом, которая предоставляет возможность использовать инструменты анализа, выборки, геопроектирования, управления

геометрией и базами данных. Система QGIS включает в себя и функционал поиска кратчайшего пути, необходимый при решении практических задач оптимального мультиплексного разбиения множеств.

Возможны два варианта использования геоинформационных технологий при решении задач ОМРМ. В первом варианте на этапе расчета длины пути между точками на карте и выделенными центрами предполагается вызов внешней программы — ГИС. В другом варианте можно расширить функционал уже существующей ГИС-системы, реализовав в нем методы решения непрерывных задач ОМРМ. В обоих вариантах требуется провести некоторый подготовительный этап, который заключается в процессе поиска и загрузки электронных карт из базы OSM в выбранную ГИС-систему. OSM (Open Street Map) — ресурс для получения бесплатных данных с открытой лицензией. База данных OSM содержит информацию о дорогах, улицах, кафе, вокзалах и многих других объектах по всему миру. Получение доступа к данным OSM в ГИС-формате интегрировано в QGIS.

Несмотря на широкую функциональность упомянутых выше систем выяснилось, что они позволяют определить путь лишь между точками, которые принадлежат сети дорог. Для расчета расстояний между двумя произвольными точками на карте требуется дополнительная возможность ГИС-подпрограммы поиска ближайшей дороги для любой точки. Такой функциональностью обладает сервис Google Maps AP, используемый в миллионах web-сайтов и приложений для расширения возможностей работы с местоположениями. Сервисы Google Maps API распределены по категориям в зависимости от платформы: web, Android и iOS. В частности, Google Maps Distance Matrix API — служба, которая предоставляет информацию о длине маршрута между начальной и конечной точками. Эти точки могут быть заданы как словесно (в виде адреса), так и географическими координатами. При отправке адреса в виде строки служба выполнит геокодирование строки и преобразует ее в координаты широты/долготы для расчета расстояний. Возвращаемая информация основывается на рекомендованном (минимальном) маршруте в соответствии с расчетами Google Maps API. Кроме того, Google Maps Distance Matrix API позволяет учитывать дополнительные параметры, такие как способ передвижения, ограничения (объекты, которых следует избегать) и др.

Google Maps API предоставляются бесплатно для широкого спектра использования, хотя и имеют ограничения на использование API и фиксированную плату за превышение этих ограничений. Для получения возможности использования API Карт необходим ключ, который можно получить, имея аккаунт Google. Приведенные выше доводы и обусловили выбор библиотеки Google Maps Distance Matrix API в качестве инструментария, используемого для интеграции ГИС-технологий и программы, реализующей алгоритмы решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств [7]. При этом ГИС используется для поиска кратчайшего пути между любыми двумя точками региона, учитывая дорожный граф.

Не рассматривая детально численный алгоритм решения непрерывных задач ОМРМ, остановимся лишь на особенностях его реализации совместно с ГИС-технологиями, возникающих при этом трудностях и способах их преодоления.

1. Подготовительный этап обработки электронных карт состоит в удалении с рисунка карты рек и суши, не принадлежащих территории региона. Это осуществляется с помощью любого графического редактора. Полученная допустимая область Ω вписывается в прямоугольник Π , который, в свою очередь, покрывается прямоугольной сеткой. В каждой точке сетки определяется функция плотности:

$$\bar{\rho}(x) = \begin{cases} \rho(x), & x \in \Omega; \\ 0, & \Pi \setminus \Omega. \end{cases}$$

2. Ключевой составляющей программы решения непрерывной задачи оптимального мультиплексного разбиения множества с размещением центров является r -алгоритм Шора, который, как известно, разработан для решения задач безусловной недифференцируемой оптимизации. Так как практические задачи территориальной сегментации предполагают размещение сервисных центров в ограниченной области, зачастую невыпуклой, а иногда и несвязной, имеющей запретные территории (например, при наличии в области водоемов, промышленных зон, рек и т.п.), то приходится решать вопросы, связанные с тем, чтобы не допустить размещения центра на недопустимой территории. Для учета «невыхода» за пределы допустимой (разбиваемой) области размещаемых центров предлагается следующий подход: на каждой итерации r -алгоритма Шора проверять принадлежность текущих координат центров допустимой области. В случае, если какой-либо центр попадает в запретную зону — находить его «псевдопроекцию» на разбиваемое множество. Под псевдопроекцией точки $z \in E_2$ на замкнутое множество $\Omega \subset E_2$ будем понимать точку $v \in \Omega \cap D(z)$, такую что $\text{dist}(z, v) = \min_{x \in \Omega \cap D(z)} \text{dist}(z, x)$, где множество $D(z) = \{v = z + \gamma w, \gamma \in R, w \in \{e_1, e_2\}\}$; e_1, e_2 — орты осей координат, $\text{dist}(z, v)$ — расстояние между двумя точками.

3. С целью сокращения количества обращений к библиотеке Google Maps Distance Matrix API, а, следовательно, и количества задействованных вычислительных ресурсов – объема оперативной памяти и времени, требуемого на выполнение как одного запроса, так и в целом всех запросов, решение задачи ОМРМ с размещением центров производится в два этапа. На первом этапе решается задача $A2-k$, в которой в качестве функций $c(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, выступает одна из известных метрик – манхэттенская, евклидова, Минковского, Чебышева. При этом выбор метрики осуществляется путем предварительного сравнения результатов мультиплексного разбиения конкретного региона на основе расстояний между точками, вычисляемых теоретически и с помощью ГИС. На втором этапе подключением ГИС для поиска фактического расстояния между найденными центрами и точками региона определяется оптимальное разбиение k -го порядка заданного региона.

ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОМРМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИС-ТЕХНОЛОГИЙ

Приведем результаты работы разработанного программного продукта с использованием ГИС для решения модельной задачи территориальной сегмен-

тации рынка услуг на примере города Днепра. В качестве сервисных центров выбраны существующие отделения грузоперевозок «Новой почты». На рис. 1, *а* показано триплексное разбиение города на зоны обслуживания в предположении, что клиент для того, чтобы воспользоваться почтовыми услугами, полагает k ближайших центров одинаково привлекательными (а это означает, что в функционале (1) центры τ_i — фиксированы, $w_i = 1$, $a_i = 0$, $i = \overline{1, N}$). Расстояния от центров до точек города определены с помощью ГИС. Для сравнения на рис. 1, *б*, *в*, *г* приведены результаты разбиения 3-го порядка той же территории, но полученные на основе теоретических расстояний между двумя точками на карте города (разбиение с использованием на рис. 1, *б* манхэттенской метрики, на рис. 1, *в* — евклидовой метрики и на рис. 1, *г* — метрики Минковского, $p = 10$).

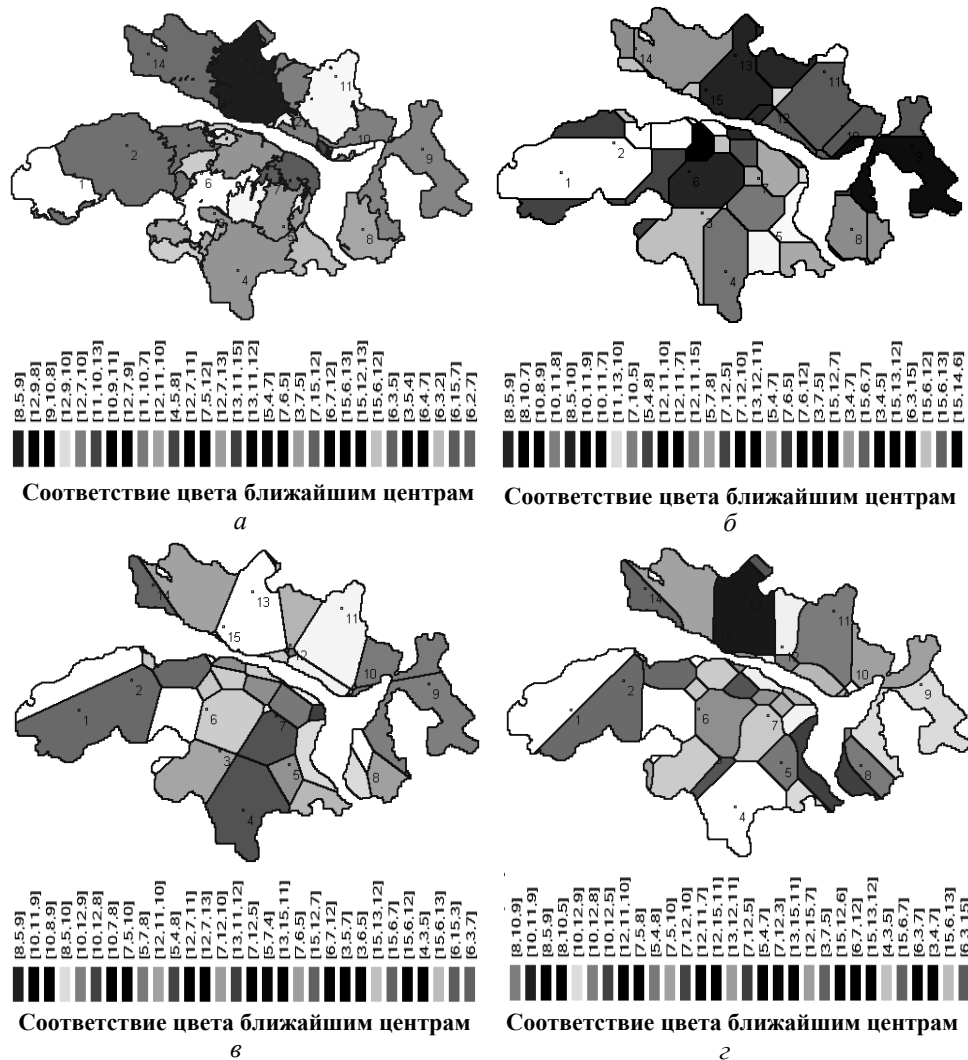


Рис. 1. Оптимальное триплексное разбиение города Днепра для 15 сервисных центров, полученное с использованием: *а* — ГИС-технологий, *б* — манхэттенской метрики, *в* — евклидовой метрики, *г* — метрики Минковского ($p=10$)

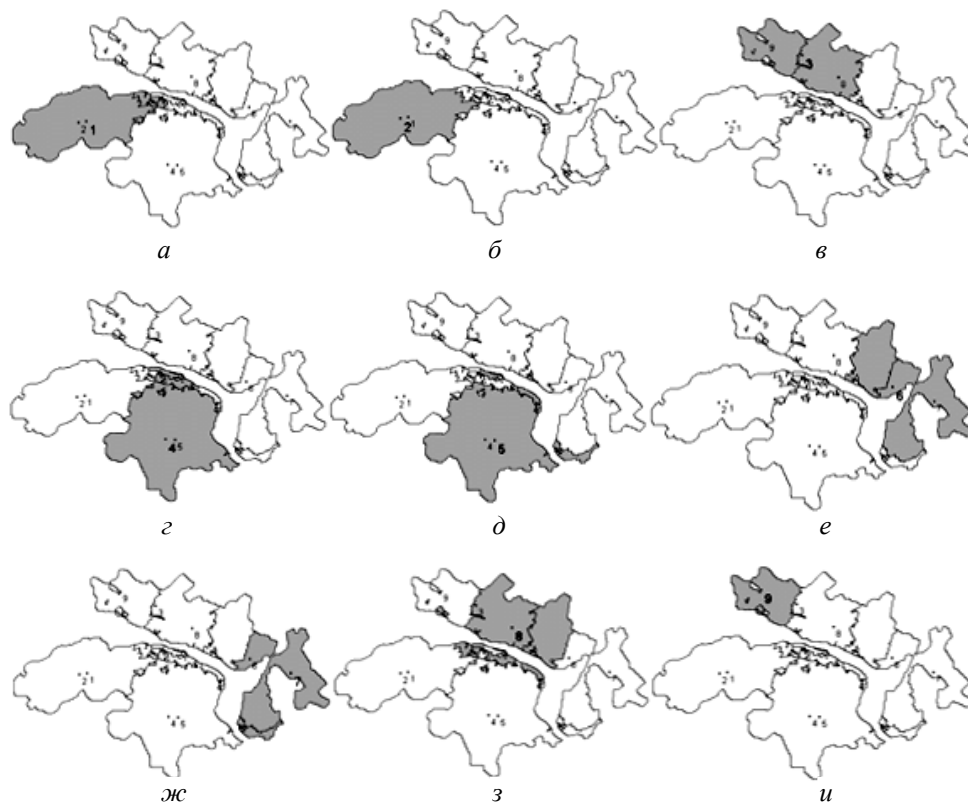


Рис. 3. Дуплексное разбиение. Зоны обслуживания сервисных центров: *а* — первого, *б* — второго, *в* — третьего, *г* — четвертого, *д* — пятого, *е* — шестого, *ж* — седьмого, *з* — восьмого, *и* — девятого

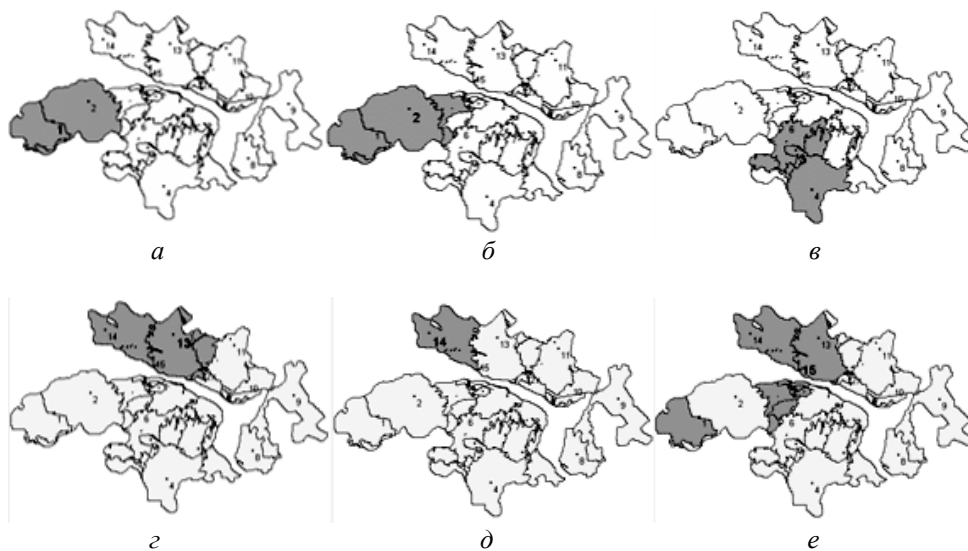


Рис. 4. Разбиение 3-го порядка. Зоны обслуживания сервисных центров: *а* — первого, *б* — второго, *в* — третьего, *г* — тринадцатого, *д* — четырнадцатого, *е* — пятнадцатого

ВИВОДИ

В роботі продемонстрована можливість застосування ГІС-технологій при розв'язанні неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин. Представлений в роботі підхід до територіальної сегментації регіону забезпечує розумні наближення реальних зон обслуговування сервісних центрів швидко і без великих витрат, а також без необхідності проведення детальної експертизи зон впливу центрів зі сторони аналітика.

З урахуванням того, що неперервні задачі ОМРМ можуть виступати в якості математических моделей реальних задач територіальної сегментації (наприклад, при розділенні ринку послуг або при діагностиці конкурентної середовища, для сегментації карт і геопросторового інтелектуального аналізу даних), використання ГІС-технологій при розробці алгоритмів розв'язання таких задач представляє собою актуальне напрямлення наукових досліджень і потребує подальшого розвитку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коряшкіна Л.С.* Розширення одного класу нескінченновимірних оптимізаційних задач / Л.С. Коряшкіна // Вісн. Черкаськ. ун-ту. Сер. Прикл. матем. Інф. — 2015. — № 18(351). — С.28–36.
2. *Коряшкіна Л.С.* О способах задания функционала качества в задачах мультиплексного разбиения множеств / Л.С. Коряшкіна // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 окт. 2015 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. О.В. Матусика. — Брест: БрГУ, 2015. — С. 40–41.
3. *Koriashkina L.S.* Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // Journal of Computational & Applied Mathematics. — 2015. — N 2 (119). — P. 15–32.
4. *Коряшкіна Л.С.* Непрерывные линейные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Вісн. Харків. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». — 2015. — Вип. 28. — С. 77–91.
5. *Коряшкіна Л.С.* Об одном подходе к территориальной сегментации рынка услуг / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Современные информационные и коммуникационные технологии на транспорте, в промышленности и образовании: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., 16–17 дек. 2015 г. — Дн-ск: ДНУЖТ ім. В.А. Лазаряна, 2015. — С. 81.
6. *Koriashkina L.* The continuous problems of the optimal multiplex partitioning an application of sets / L. Koriashkina, A. Cherevatenko, O. Mykhalova // Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Control – Pivnyak, Beshta & Alekseyev (eds). — Taylor & Francis Group, London. — 2016. — P. 233–239.
7. *Коряшкіна Л.С.* Свідоцтво 64326 Україна про реєстрацію авторського права на твір «Комп'ютерна програма «Optimal Multiplex-Partitioning of Sets» (OMPS-2015) / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко (Україна). — № 64838; заявл. 31.12.15; зареєстровано 01.03.16 в Державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

8. Коряшкина Л.С. Использование ГИС-инструментария при решении практических задач мультиплексного разбиения множеств / Л.С. Коряшкина, А.П. Череватенко // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 21 окт. 2016 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. О.В. Матысика. — Брест: БрГУ, 2016. — С. 63–64.
9. Коряшкина Л.С. О программной реализации алгоритмов оптимального мультиплексного разбиения множеств совместно с ГИС-технологиями при решении задач сегментации рынка услуг / Л.С. Коряшкина, А.П. Череватенко // Современные информационные и коммуникационные технологии на транспорте, в промышленности и образовании: тезисы X Междунар. науч.-практ. конф., Днепро, 14–15 дек. 2016 г. — Д.: ДИИТ, 2016. — С. 52.
10. Павлов С.В. Сервис-ориентированная архитектура программного обеспечения корпоративных геоинформационных систем / С.В. Павлов, Т.М. Усов, Р.А. Шкундина // Управление, вычислительная техника и информатика: вестн. УГАТУ. — Уфа: УГАТУ, 2010. — Т. 14, № 5 (40). — С. 163–169.
11. Lee I. Map segmentation for geospatial data mining through generalized higher-order Voronoi diagrams with sequential scan algorithms / I. Lee, C. Torpelund-Bruin, K. Lee // Expert Systems with Applications. — 2012. — Vol. 39, Issue 12. — P. 11135–11148.
12. Boots B. Modeling Retail Trade Areas Using Higher-Order, Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams / B. Boots, R. South. // Journal of Retailing 73(4). — 1997. — P. 519–536.
13. Okabe A. Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams / A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, S. Chiu. — Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons, 2000. — 696 p.
14. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и r -алгоритмы / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. — К.: Наук. думка, 2015. — 400 с.

Поступила 16.06.2017