УДК 681.324
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.12

НАХОЖДЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ВЗВЕШЕННОГО ПОТОКА В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ

Е.Ю. ЗАЙЧЕНКО, Ю.П. ЗАЙЧЕНКО, ОВИ НАФАС АГАИ АГ ГАМИШ

Аннотация. Рассмотрена проблема отыскания максимального взвешенного потока (МВП) в компьютерных сетях нового поколения. Принципиальные отличия этой проблемы от классической постановки состоят в том, что рассматривается несколько классов потоков, сообщения от которых передаются одновременно и вводятся нелинейные ограничения на показатели качества обслуживания потоков разных классов (*Quality of Service* (*QoS*)). Доказана теорема о максимальном потоке и получены условия оптимальности взвешенного потока при ограничениях на показатели качества обслуживания. Разработан алгоритм отыскания МВП при ограничениях на показатели качества (*QoS*) для различных классов потоков в сетях, базирующийся на свойствах максимального потока. Предложенный алгоритм может быть использован для оценки показателей живучести коммуникационных сетей с перспективными технологиями.

Ключевые слова: максимальный взвешенный поток, условия оптимальности, показатели качества обслуживания.

ВВЕДЕНИЕ

Важной задачей, решение которой используется при анализе живучести компьютерных сетей, является задача о максимальном потоке [2]. Алгоритм решения этой задачи для распределенных коммуникационных сетей был предложен в работе [1]. В последние годы в связи с резким увеличением интенсивности информационных потоков, передаваемых в сети, и возрастающими требованиями к качеству сервиса при обслуживании различных классов пользователей сетей возникла новая технология — сети нового поколения (New Generation Networks (NGN)) [4]. Их отличительными особенностями является наличие различных классов пользователей, Class of Service (CoS), введение показателей качества обслуживания (Quality of Service (QoS)), а именно средней задержки пакетов, вариации задержки и доли потерянных пакетов. При этом каждый класс сервиса выдвигает свои требования к показателям качества. Необходимость учета специфики технологии NGN при анализе показателей живучести приводит к новой постановки задачи о максимальном потоке с учетом весов различных классов пользователей (CoS) и соответствующих требований к их качеству обслуживания (QoS) [3].

Цель работы — разработка модели и алгоритма задачи о взвешенном максимальном потоке применительно к сетям нового поколения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ВЗВЕШЕННОМ ПОТОКЕ

Пусть имеется сеть MPLS, которая описывается орграфом $G=(X,E)$, где $X=\{x_j\}_{j=\overline{1,n}}$ — множество узлов сети; $E=\{(r,s)\}$ — множество каналов связи (КС); μ_{rs} — пропускные способности КС.

Допустим, что в сети передается K классов потоков $(k=\overline{1,8})$ (CoS) в соответствии с матрицами требований $H(k)=\left\|h_{i,j}(k)\right\|$ $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,N}$ (Мбит/с). Для каждого класса k введен показатель качества (QoS) в виде величины средней задержки $T_{\text{ср},k}$, которая оценивается следующим выражением:

$$T_{\text{ср},k}=\frac{1}{H_{\Sigma}^{(k)}}\sum_{(r,s)\in E}\frac{f_{rs}^{(k)}\sum\limits_{i=1}^{k}f_{rs}^{(i)}}{\left(\mu_{rs}-\sum\limits_{i=1}^{k-1}f_{rs}^{(i)}\right)\left(\mu_{rs}-\sum\limits_{i=1}^{k}f_{rs}^{(i)}\right)},$$

где $H_{\Sigma}^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_{ij}^{(k)}$, μ_{rs} — пропускная способность КС (r,s); $f_{rs}^{(k)}$ — величина потока k - го класса в канале (r,s).

Пусть в сети $G=(X,E)$ с известными пропускными способностями КС (r,s) μ_{rs} и заданными матрицами требований $H(k)=\left\|h_{i,j}(k)\right\|$, $i,j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,K}$, произошел отказ (выход из строя) КС (r,s).

Естественно, что при этом общая пропускная способность (ОПС) сети уменьшилась. Требуется найти такое распределение потоков всех классов при отказе $F_1,F_2,\cdots,F_k$, при которых максимизируется величина передаваемого потока через сеть

$$H_{\Sigma}^{(k)}=\sum h_{ij}\to\max \tag{1}$$

при ограничениях на установленные задержки $T_{\text{зад}}$ по всем классам:

$$T_{\text{ср}}^{(k)}\left(F_k\,|\,F_1,F_2,\ldots,F_{k-1}\right)\le T_{\text{зад},k},\quad k=\overline{1,K}, \tag{2}$$

где

$$T_{\text{ср},k}=\frac{1}{H_{\Sigma}^{(k)}}\sum_{(r,s)\in E}\frac{f_{rs}^{(k)}\sum\limits_{i=1}^{k}f_{rs}^{(i)}}{\left(\mu_{rs}-\sum\limits_{i=1}^{k-1}f_{rs}^{(i)}\right)\left(\mu_{rs}-\sum\limits_{i=1}^{k}f_{rs}^{(i)}\right)}. \tag{3}$$

Поскольку в данной задаче рассматриваются потоки K классов, то здесь требуется максимизировать вектор:

$$H_{\Sigma}(k)\to\max,\ k=\overline{1,K}.$$

Такая задача в общей постановке сложна и поэтому требуется перейти к однокритериальной постановке задачи нахождения максимального потока (НМП) путем свертывания векторного критерия. Здесь возможны следующие варианты.

Использование взвешенного аддитивного критерия

$$H_{\Sigma} = \sum_{k=1}^{k} w_k H_k(k),$$

где w_k — вес k-го потока. Учитывая приоритетность потоков, необходимо чтобы выполнялось соотношение

$$w_1 > w_2 > \ldots > w_k > w_{k+1}.$$

Необходимо также, чтобы для всех классов потоков выполнялось ограничение (2). Выбирать веса можно, используя следующие подходы.

Подход на основе теории полезности Фишберна. Пусть имеется K потоков, приоритеты которых убывают согласно номеру класса:

$$\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_k. \text{ Тогда } w_1 > w_2 > \ldots > w_k \text{ и } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1.$$

Выбираем:

$$w_1 = \frac{2k}{k(k+1)},\ w_2 = \frac{2(k-1)}{k(k+1)},\ w_i = \frac{2(k+1-i)}{k(k+1)}, \ldots, w_k = \frac{2}{k(k+1)}.$$

Подход на основе метода парных сравнений Саати. Метод базируется на применении экспертных оценок [5]. Поскольку между классами потоков установлены приоритеты в обслуживании $\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_k > \ldots \rho_K$ и согласно формуле (3) на величину задержки k-го класса $T_{\text{ср}}^{(k)}$ почти не влияет распределение потоков более низких приоритетов $i > k$, то задачу НМП при векторном критерии можно свести к последовательности задач с одним критерием, а именно на 1-м этапе находим решение задачи НМП для потока с максимальным приоритетом $(k=1)$ и соответствующее распределение потока $F^{(1)} = [f_{rs}^{(1)}]$ при ограничении $T_{\text{ср}}^{(1)}(F^{(1)}) \le T_{\text{зад},1}$.

Зафиксировав распределение $F^{(1)}$, на резервных пропускных способностях $\mu_{rs}^{(1)} = \mu_{rs} - f_{rs}^{(1)}$ решаем задачу НМП для потока класса $k=2$ по критерию

$$H_{\Sigma}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{(2)} \to \max$$

при ограничениях $T_{\text{ср}}^{(2)}(F^{(2)}) \le T_{\text{зад},2}$.

Предлагаемый алгоритм нахождения максимального взвешенного потока (НМВП) базируется на свойствах максимального потока.

СВОЙСТВА МАКСИМАЛЬНОГО ВЗВЕШЕННОГО ПОТОКА

Математическая модель задачи о нахождении максимального (многопродуктового) потока (НМП) (1)–(3) принципиально отличается от известной из литературы соответствующей задачи НМП такими особенностями:

- введены дополнительные нелинейные ограничения на показатели качества (2), которые отсутствуют в классической постановке;
- рассматривается многополосная сеть, в которой каждый узел является одновременно как источником, так и потребителем информации в отличие от двухголосной сети в классической постановке.

Рассматриваемый поток является многопродуктовым, так как потоки требований (i, j) и (l, t) различны и не взаимозаменяемы.

Указанные особенности не позволяют использовать для решения данной задачи известные методы, в частности метод Форда–Фалкерсона, и обусловили необходимость разработки принципиально нового метода.

Прежде всего исследуем свойства оптимального потока. Справедливы такие утверждения, в которых устанавливаются свойства максимального потока.

Теорема 1. Пусть $F^*(k)$ — оптимальный поток, при котором жестким является ограничение $T_{\text{ср}}(F^*(k)) = T_{\text{зад},k}$ согласно (2). Тогда этот поток по кратчайшим путям в такой условной метрике

$$l_{rs}^{(k)} = \frac{\partial \overline{T_k}}{\partial f_{rs}} \,|\, (F_k = F_k^*) . \tag{4}$$

Доказательство этой теоремы приводится в работе [6].

Теорема 2. Требование (i, j) доминирует требование (l, t) при передаче (т.е. передается в первую очередь), если

$$\frac{l(\pi_{ij}^{\min})}{w_{ij}} < \frac{l(\pi_{lt}^{\min})}{w_{lt}} , \tag{5}$$

где $l(\pi_{ij}^{\min})$; $l(\pi_{lt}^{\min})$ — длины кратчайших путей между (i, j) и (l, t) в метрике l_{rs} (4).

Следствие 2. Из теоремы 2 вытекает следующее важное следствие [6].

Требование (i_1, j_1) доминирует требование (i_2, j_2); (i_2, j_2) доминирует требование (i_3,j_3) и так далее, т.е. $(i_1, j_1) \succ (i_2, j_2) \succ \ldots \succ (i_k, j_k) \succ$ $\succ (i_{k+1}, j_{k+1}) \succ \ldots$, если

$$\frac{l(\pi_{i_1 j_1}^{\min})}{w_{i_1 j_1}} \le \frac{l(\pi_{i_2 j_2}^{\min})}{w_{i_2 j_2}} \le \ldots \le \frac{l(\pi_{i_n j_n}^{\min})}{w_{i_n j_n}} . \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим поток $F^* = [f_{rs}^*]$, в котором

$$. \qquad \frac{l(\pi_{i_1 j_1}^{\min})}{w_{i_1 j_1}} \le \frac{l(\pi_{i_2 j_2}^{\min})}{w_{i_2 j_2}} \le \ldots \le \frac{l(\pi_{i_n j_n}^{\min})}{w_{i_n j_n}} .$$

Допустим, что требование (l,t) передается полностью в текущем распределении потоков, а (i,j) не передается, т.е. $h_{ij}^{(k)} < h_{ij}$ и $h_{lt}^{(k)} = h_{lt}$. Покажем, что в этом случае поток F^* может быть улучшен.

Действительно, пусть при потоке F^* выполняется равенство $T_{\text{ср}}(F^*) = T_{\text{зад}}$. Рассмотрим вариацию потока $F_1 = F^* + \Delta F$, где поток ΔF получен следующим образом:

а) изменим величину требования (l,t) до значения $h_{lt}^{(H)} = h_{lt} - \dfrac{\Delta h}{w_{lt}}$, а величину требования (i,j) увеличим до значения $h_{ij}^{(H)} = h_{ij} + \dfrac{\Delta h}{w_{ij}}$;

б) положим величину Δh остаточно малой. Таким образом:

$$\Delta f_{rs} = \begin{cases} -\dfrac{\Delta h}{w_{lt}}, & \text{если } (r,s) \in \pi_{lt}^{\min} \wedge (r,s) \notin \pi_{ij}^{\min}; \\ +\dfrac{\Delta h}{w_{ij}}, & \text{если } (r,s) \notin \pi_{lt}^{\min} \wedge (r,s) \in \pi_{ij}^{\min}; \\ \Delta h\left(\dfrac{1}{w_{ij}} - \dfrac{1}{w_{lt}}\right), & \text{если } (r,s) \in \pi_{lt}^{\min} \wedge (r,s) \in \pi_{ij}^{\min}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{7}$$

Рассмотрим вариацию ограничения: $\delta T_{\text{ср}} = T_{\text{ср}}(F^* + \Delta F) - T_{\text{ср}}(F^*)$. Разлагаем $T_{\text{ср}}(F^* + \Delta F)$ в ряд Тейлора в окрестности точки F^*, ограничиваясь только членами 1-го порядка малости. Тогда

$$\delta T_{\text{ср}} \cong \sum_{(r,s)} \frac{\partial T_{\text{ср}}}{\partial f_{rs}} \Delta f_{rs}; \tag{8}$$

подставляя Δf_{rs} из соотношений (7) в условие (8), получаем

$$\sum_{(r,s)\in E} \frac{\partial T}{\partial f_{rs}} \Delta f_{rs} = \frac{\Delta h}{w_{ij}} \sum_{(r,s)\in\pi_{ij}^{\min}} \frac{\partial T_{\text{ср}}}{\partial f_{rs}} - \frac{\Delta h}{w_{lt}} \sum_{(r,s)\in\pi_{ij}^{\min}} \frac{\partial T_{\text{ср}}}{\partial f_{rs}} = \Delta h\left(\frac{l(\pi_{ij}^{\min})}{w_{ij}} - \frac{l(\pi_{lt}^{\min})}{w_{lt}}\right).$$

Вследствие (5) имеем $\dfrac{l(\pi_{ij}^{\min})}{w_{ij}} < \dfrac{l(\pi_{lt}^{\min})}{w_{lt}}$ и тогда

$$\delta T_{\text{ср}}(\Delta F) < 0. \tag{9}$$

Заметим, что при этой вариации потока величина критерия ВМП не изменилась, поскольку

$$w_{ij} h_{ij}^{(\text{н})} + w_{lt} h_{lt}^{(\text{н})} = w_{ij} h_{ij} + \Delta h + w_{lt} h_{lt} - \Delta h = w_{ij} h_{ij} + w_{lt} h_{lt}.$$

Но из условия (9) следует, что поскольку при указанной вариации потока ΔF общая задержка уменьшилась, то поток F^* не может быть максимальным, так как появляется дополнительный резерв по пропускной способности сети и можно передать дополнительный поток по сети. Следовательно, условия (6) являются необходимыми условиями оптимальности потока в задаче НМВП.

Можно показать, что эти условия будут также и достаточными условиями (аналогично доказательству теоремы 2). Указанные свойства оптимальности ВМП позволяют сформулировать соответствующий алгоритм.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА НАХОЖДЕНИЯ ВМП

0. Полагаем $F(0)=0$, $H_{\Sigma}(0)$.

1. Находим начальную условную метрику:

$$l_{rs}^{(1)}=\left.\frac{\partial T_{\text{ср}}}{\partial f_{rs}}\right|_{f_{rs}=0}=\frac{1}{H_{\Sigma}}\frac{\mu}{(\mu_{rs}-f_{rs}(0))}=\frac{1}{H_{\Sigma}\mu_{rs}}.$$

2. Находим кратчайшие пути в метрике $l_{rs}^{(1)}-\pi_{ij}^{\min}$ их длины $l(\pi_{ij}^{\min})$.

3. Выбираем требование (i_1,j_1) такое, что

$$\frac{l(\pi_{i_1j_1}^{\min})}{w_{i_1j_1}}=\min_{(i,h)}\frac{l(\pi_{ij}^{\min})}{w_{ij}}.$$

4. Определяем пропускную способность пути $\pi_{i_1j_1}^{\min}$:

$$Q(\pi_{i_1j_1}^{\min})=\min_{(r,s)\grave{o}\pi_{i_1j_1}^{\min}}(\mu_{rs}-\varepsilon).$$

5. Полагаем $h_{i_1j_1}^{a}=\min(h_{i_1j_1};Q_{\text{рез}}(\pi_{i_1j_1}^{\min}))$.

6. Распределяем поток от требования (i_1,j_1) величиной $h_{i_1j_1}^{a}$ по пути $\pi_{i_1j_1}^{\min}(k)$ и находим распределение потока $F(1)$:

$$f_{rs}(1)=\begin{cases}f_{rs}(0)+h_{i_1j_1}^{a}, & \text{если } (r,s)\in\Pi_{i_1j_1}^{\min};\\ f_{rs}(0)=0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

7. Проверка условия:

$$T_{\text{ср}}(F(1))<T_{\text{зад}}. \tag{10}$$

Если условие (10) выполняется, то переходим на шаг 8, иначе — на шаг 9.

8. Вычисляем величину потока:

$$H_{\Sigma}(1)=H_{\Sigma}(0)+h_{i_1j_1}^{a}w_{i_1j_1}$$

и переходим к следующей итерации.

9. Если $T_{\text{ср}}(F(1))=T_{\text{зад}}$, то вычисляем $H_{\Sigma}(1)=H_{\Sigma}(0)+h_{i_1j_1}^{a}w_{i_1j_1}=$ $=H_{\max}$ и конец работы алгоритма, иначе переходим на шаг 10.

10. Если $T_{\text{ср}}(F(1)) > T_{\text{зад}}$, то уменьшаем значение $h_{i_1 j_1}$ до величины $h^*_{i_1 j_1}$ такой, что

$$T_{\text{ср}}(F(1)) = T_{\text{зад}}.$$

При этом величина ВМП будет равна $H_\Sigma(1) = h^a_{i_1 j_1} w_{i_1 j_1}$ и конец работы алгоритма.

t-я итерация. Пусть проведено $(t-1)$ итераций и найдены поток $F(t–1)$ и $H_\Sigma(t-1) = \sum_{k=1}^{t-1} w_{i_k j_k} h_{i_k j_k}$ и при этом выполняется ограничение на задержку: $T_{\text{ср}}(F(t-1)) = T_{\text{зад}}$.

1. Находим условную метрику:

$$l^{(t)}_{rs} = \frac{\partial T_{\text{ср}}}{\partial f_{rs}} \Big|_{f_{rs} = f_{rs}(t-1)}.$$

2. Находим кратчайшие пути в данной метрике $\pi^{\min}_{ij}(k)$ и их длины $l(\pi^{\min}_{ij})$.

3. Ищем такое требование (i_t, j_t) из передаваемых требований, для которого

$$\frac{l_t(\pi^{\min}_{i_t j_t})}{w_{i_t j_t}} = \min_{(i,j)} \frac{l(\pi^{\min}_{ij})}{w_{ij}}.$$

4. Находим резерв по пропускной способности маршрута $\pi^{\min}_{i_t j_t}$:

$$Q(\pi^{\min}_{i_t j_t}) = \min_{(r,s)\in\pi^{\min}_{i_t j_t}} (\mu_{rs} - f_{rs}(t-1)) - \varepsilon.$$

5. Вычисляем $h^a_{i_t j_t} = \min(h_{i_t j_t}; Q_{\text{рез}}(\pi^{\min}_{i_t j_t}))$.

6. Распределяем поток от требования $(i_t j_t)$ величиной по пути $\pi^{\min}_{i_t j_t}(k)$ и находим распределение потока $F(t)$:

$$f^{(0)}_{rs}(k) = \begin{cases} f^{(0)}_{rs}(k) + h^a_{i_1 j_1}, & \text{если } (r,s) \in \Pi^{\min}_{i_k j_k}; \\ f^{(0)}_{rs}(k) & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{11}$$

7. Проверка условия:

$$T_{\text{ср}}(F(t)) = T_{\text{зад}}. \tag{12}$$

Если условие (12) выполняется, то полагаем $H_\Sigma(t) = H_\Sigma(t-1) + w_{i_t j_t} h^a_{i_t j_t}$ и конец t итерации, иначе переходим на шаг 8.

8. Если $T_{\text{ср}}(F(t)) = T_{\text{зад}}$, то вычисляем: $H_\Sigma(t) = H_\Sigma(t-1) + h^a_{i_t j_t} w_{i_t j_t} = \max$ и конец работы алгоритма, иначе переходим на шаг 9.

Вычисляем величину потока

$$H_{\Sigma}^{(1)}(k) = H_{\Sigma}^{(0)}(k) + h_{i_k j_k}^{a}$$

и переходим на шаг 1 следующей итерации.

9. Если $T_{\text{ср}}(F(t)) > T_{\text{зад}}$, то уменьшаем величину $h_{i_t j_t}$ до величины $h_{i_t j_t}^{*}$ такой, что ограничение $T_{\text{ср}}(F^{H}(t)) = T_{\text{зад}}$, где $F^{(H)}(t)$ — определяется из (11) при значении $h_{i_t j_t} = h_{i_t j_t}^{*}$.

Тогда величина взвешенного максимального потока

$$H_{\Sigma}(t) = H_{\Sigma}(t-1) + h_{i_t j_t}^{*} w_{i_t j_t} .$$

Конец работы алгоритма.

Оптимальность полученного взвешенного потока базируется на доказанной теореме 2 о свойствах МВП.

ВЫВОДЫ

1. Сформулирована задача о нахождении МВП при ограничениях на средние задержки для различных классов потоков в компьютерных сетях нового поколения.
2. Исследованы свойства максимального потока в сетях с потоками различных классов.
3. Предложен алгоритм нахождения МВП при ограничениях на среднюю задержку для различных классов потоков на основе свойств МВП.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зайченко О.Ю.* Знаходження максимального потоку в мережах з режимом асинхронної передачі інформації / О.Ю. Зайченко, Ю.П. Зайченко // Відбір і обробка інформації. — Вип. 17(93). — 2002. — С. 59–64.
2. *Зайченко Ю.П.* Нахождение максимального потока и анализ показателей живучести при отказах / Ю.П. Зайченко, Е.Ю. Зайченко // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 6. — С. 102–113.
3. *Зайченко Ю.П.* Анализ показателей живучести компьютерной сети с технологией MPLS / Ю.П. Зайченко, Мохаммадреза Моссавари // Інформатика, управління та обчислювальна техніка. — 2005. —Вип. 43. — С. 73–80.
4. *Гольдштейн А.Б.* Технология и протоколы MPLS / А.Б. Гольдштейн, Б.С. Гольдштейн. — СПб.: БХВ, 2005. — С. 304.
5. *Саати Т.* Принятие решений: метод анализа иерархий / Т. Саати. — М.: Радио и связь, 1993.
6. *Зайченко Е.Ю.* Сети АТМ: Моделирование, анализ и оптимизация / Е.Ю. Зайченко. — К.: ЗАТ «ВИПОЛ», 2003. — 224 с.

Поступила 29.08.2017