УДК 519.85
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.07

ОПТИМИЗАЦИЯ НА ОБЩЕМ МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК СО ЗНАКОМ

О.С. ПИЧУГИНА

Аннотация. Введено общее множество перестановок со знаком и рассмотрены подходы к оптимизации на нем, основанные на погружении в арифметическое евклидово пространство. В рамках исследования изучены свойства этого евклидового комбинаторного множества и его выпуклой оболочки (общего многогранника перестановок со знаком), такие как мощность множества, несводимое Н-представление многогранника, его размерность, критерии и смежности вершин, а также количество комбинаторно неэквивалентных многогранников фиксированной размерности. Исследованы особенности поведения нескольких классов функций на общем множестве перестановок со знаком. Построен ряд функционально-аналитических представлений этого множества, включая полиэдрально-суперсферическое и строгое суперсферическое. Приведены явные решения линейной задачи и задачи проектирования на множество перестановок со знаком. Проведенное исследование позволяет применять непрерывные методы к оптимизации на дискретном множестве и получать как точные, так и приближенные решения оптимизационных задач с оценкой точности.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, полиэдрально-сферическое множество, перестановки со знаком, общее множество перестановок, бинарное множество, суперсфера, полиэдрально-поверхностный метод, метод условного градиента.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи дискретной оптимизации на векторах евклидового пространства часто возникают в практических и теоретических предметных областях. Так, среди приложений задачи оптимизации на 0–1-векторах (*безусловной булевой задачи*) теория графов, экономика, финансы, менеджмент, логистика, машинное обучение, компьютерная архитектура, задачи размещения, упаковка и раскрой [1, 2]. Оптимизационные задачи на векторах перестановок применяются в таких областях, как упаковка и раскрой, задачи балансировки, дизайн микросхем, загрузка суден, оснащение самолетов, геометрический дизайн, задачи размещения, логистика и т.п. [2–4]. По сравнению с задачами оптимизации, моделируемыми и решаемыми в метрических пространствах, возможность погружения комбинаторного множества в арифметическое евклидово пространство дает множество преимуществ, таких как возможность учета геометрических особенностей допустимой области, наличие нормы, скалярного произведения и т.п. Дискретные множества, позволяющие такое погружение, называют *евклидовыми комбинаторными множествами* [5], а научное направление по исследованию свойств погружений и применении их в оптимизационных методах — евклидовой комбинаторной оптимизацией [3, 4]. В этом направлении исследуются как свойства евклидовых комбинаторных множеств и их выпуклых оболочек, так и особенности поведения функций на этих множествах. Свойства множеств, как правило, ложатся в основу комбинаторных оптимизационных методов типа ветвей и границ, отсечений и т.п. [6] Свойства же функций обычно составляют основу непрерывных подходов к решению дискретных задач. Это могут быть релаксационные методы, методы, использующие переформулировки, и др. [7]

Предлагаемый нами подход к решению задач евклидовой комбинаторной оптимизации состоит в комплексном исследовании свойств допустимых областей и функций с последующей разработкой методов оптимизации на их основе [2, 8–11].

Работа посвящена исследованию нового евклидова комбинаторного множества — общего множества перестановок со знаком — и поведения некоторых классов функций. Это позволит расширить область применения оптимизационных методов, приведенных в работах [2–4,8–13], на новый, достаточно широкий класс задач оптимизации, включающий, в частности, безусловные булевые задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу дискретной оптимизации

$$f(x) \to \min , \tag{1}$$

$$x \in E_{nk}^{\pm}(G) , \tag{2}$$

где $E_{nk}^{\pm}(G)$ — комбинаторное множество n-векторов, сформированных из мультимножества G;

$$G = \{g_1,...,g_n\} = \{e_1^{n_1},...,e_k^{n_k}\} :$$

$$0 \le g_i \le g_{i+1},\ i \in J_{n-1};\ 0 \le e_i < e_{i+1},\ i \in J_{k-1};\ e_k > 0,\ \sum_{i=1}^{k} n_i = n, \tag{3}$$

и бинарного множества $B_n^{'} = \{-1,1\}^n$ следующим образом:

$$E_{nk}^{\pm}(G) = \{z \in R^n : z = (z_i)_{i \in J_n},\ z_i = x_i y_i,\ i \in J_n\} , \tag{4}$$

$$x = (x_i)_{i \in J_n} \in E_{nk}(G),\ y = (y_i)_{i \in J_n} \in B_n^{'} , \tag{5}$$

где $E_{nk}(G)$ — *общее евклидово комбинаторное множество перестановок* [4, 14] из формулы (3), т.е. множество упорядоченных n-выборок из G, рассматриваемое как множество векторов евклидового арифметического пространства, $J_n = \{1,...,n\}$.

Помимо мультимножества (3) используем представление мультимножества G при помощи *основы* $S(G)$, т.е. множества его элементов, упорядоченных по возрастанию, а также *первичной спецификации* [G] — вектора кратностей элементов основы [4]: $S(G) = \{e_1,...,e_k\}$, $[G] = (n_1,...,n_k)$.

Множество $E_{nk}^{\pm}(G)$ назовем общим евклидовым комбинаторным множеством перестановок со знаком или просто *общим множеством перестановок со знаком*. Как видно из (4), (5), $E_{nk}^{\pm}(G)$ представляет собой отражение общего множества перестановок $E_{nk}(G)$, индуцированного неотрицательным мультимножеством G, относительно всех координатных плоскостей. По аналогии с классификацией множеств класса $E_{nk}(G)$ [4] введем в рассмотрение такие подклассы $E_{nk}^{\pm}(G)$:

а) если $n = k$, т.е. G — неотрицательное множество, будем использовать сокращенное обозначение $E_n^{\pm}(G)$ и называть его *множеством перестановок со знаком* из G;

б) если к тому же $G = J_n$, для такого множества будем использовать сокращенную запись $E_n^{\pm}$ и называть его просто множеством перестановок со знаком. Отметим, что $E_n^{\pm}$ представляет собой погружение в евклидово арифметическое пространство группы перестановок со знаком [15], образованной из группы перестановок первых n натуральных чисел.

Поскольку при исследовании множества $E_{nk}(G)$ всегда можно предполагать, что $G \ge 0$, т.е. мультимножество (3) выполнено, то множество $E_{nk}^{\pm}(G)$ представляет собой обобщение как общего перестановочного множества, так и множества $E_n^{\pm}$. Еще два известные комбинаторные множества, входящие в класс (4), — это множество размещений с повторениями с центром симметрии в начале координат: $\overline{E}_2^n(\{-e_1^n, e_1^n\}) = E_n^{\pm}(\{e_1^n\})$ (сюда же относится B_n' и соответствует $e_1 = 1$), а также множество

$$CE_n(e_1) = \{(\pm e_1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, \pm e_1)\} \qquad (6)$$

вершин *гипероктаэдра* [15]

$$CP_n(e_1) = \operatorname{conv} CE_n(e_1) = \{x \in R^n : \|x\|_1 \le e_1\}, \qquad (7)$$

образующееся при $G = \{0^{n-1}, e_1\}$, частным случаем которого являются $CP_n = CP_n(1)$ — *единичный гипероктаэдр* и множество его вершин $CE_n = CE_n(1)$.

Введем в рассмотрение выпуклую оболочку множества (4)

$$\Pi_{nk}^{\pm}(G) = \operatorname{conv} E_{nk}^{\pm}(G),$$

и назовем *общим многогранником перестановок со знаком.* В частности, $\Pi_n^{\pm}(G) = \operatorname{conv} E_n^{\pm}(G)$ будем называть *многогранниками перестановок со знаком* из G, а $\Pi_n^{\pm} = \operatorname{conv} E_n^{\pm}$ — просто многогранником перестановок со знаком.

По способу построения $E_{nk}^{\pm}(G)$ видно, что это множество будет наследовать свойства обоих множеств $E_{nk}(G)$ и B_n', а также их выпуклых оболочек

$$\Pi_{nk}(G) = \operatorname{conv} E_{nk}(G), \;\; PB_n' = \operatorname{conv} B_n'$$

общего перестановочного многогранника и *гиперкуба* соответственно. Эти два класса комбинаторных множеств и многогранников достаточно хорошо изучены в работах [3–5, 14, 16]. Отметим лишь два из них, которые используем в $E_{nk}^{\pm}(G)$ — это нейтральность по отношению к знакам и порядку следования координат элементов. Также свойства $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ должны объединить воедино свойства гиперкуба и гипероктаэдра. Как известно [15], эти два многогранника являются двойственными, в частности количество вершин PB_n' и соответственно гиперграней CP_n, равно 2^n, т.е. экспоненциально зависит от n. В свою очередь, число вершин CP_n, следовательно и количество гиперграней PB_n', зависят от n полиномиально:

$$\left|\operatorname{vert} PB_n'\right| = \left|B_n'\right| = \left|\operatorname{faces} CP_n\right| = 2^n ; \tag{8}$$

$$\left|\operatorname{vert} CP_n\right| = \left|CE_n\right| = \left|\operatorname{faces} PB_n'\right| = 2n . \tag{9}$$

Данная работа посвящена исследованию свойств задачи (1), (2) с целью адаптации комбинаторных и непрерывных подходов, приведенных в работах [2–4, 8–13], к ее решению. Под исследованием свойств задачи оптимизации подразумеваем комплексное исследование алгебро-топологических свойств допустимой области

$$E = E_{nk}^{\pm}(G) \tag{10}$$

и свойств функций на данной области, в частности формирование аналитических функциональных представлений E. Далее будет обозначено как выявленные особенности задачи (1), (2), применимы к ее решению.

1. АЛГЕБРО-ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА $E_{nk}^{\pm}(G), \Pi_{nk}^{\pm}(G)$

Исследуем свойства общих множества и многогранника перестановок со знаком. В качестве иллюстрации справедливости результатов будут использованы B_n', CE_n и $E_{nk}^{+}(G)$, $G > 0$, а также соответствующие многогранники.

Главным фактором, на наш взгляд, отличия характеристик множеств класса (10) и многогранников

$$P = \Pi_{nk}^{\pm}(G) \tag{11}$$

является кратность нулевого элемента в мультимножестве G, поэтому далее вместо (3) будем использовать обозначение

$$G = \{0^{n_0}, e_1^{n_1}, \ldots, e_k^{n_k}\} : \sum_{i=0}^{k} n_i = n, \ \ e_1 > 0, \ \ n_0 \ge 0, \ \ n_i > 0, \ \ i \in J_k .$$

Мощность множества E. В первую очередь рассмотрим мощность $E_{nk}^{\pm}(G)$.

Теорема 1. Мощность множества (10) исчисляется по формуле

$$\left|E_{nk}^{\pm}(G)\right| = \mathrm{C}_n^{n_0} \frac{(n-n_0)!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} \cdot 2^{n-n_0} . \tag{12}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение общее множество перестановок из G:

$$E^{+}=E_{nk}^{\pm}(G)\cap R_{+}^{n}=\begin{cases} E_{nk}(G), & \text{если } n_0=0;\\ E_{n,k+1}(G), & \text{если } n_0>0. \end{cases} \qquad (13)$$

Выделим три этапа в формировании $E_{nk}^{\pm}(G)$, обозначив количество способов их осуществить N_1, N_2, N_3 соответственно:

На *первом этапе* фиксируются позиции нулевых элементов $x\in E_{nk}^{\pm}(G)$, что возможно сделать $N_1=C_n^{n_0}$ способами.

На *втором этапе* оставшиеся $n-n_0$ положительные элементы $\{\mathrm{e}_1^{n_1},\ldots,\mathrm{e}_\mathrm{k}^{n_\mathrm{k}}\}$ переставляются и это осуществимо $N_2=\dfrac{(n-n_0)!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$ способами.

Наконец, на *третьем этапе* осуществляется отражение каждого элемента x образованного множества (13) относительно $n-n_0$ координатных плоскостей, соответствующих ненулевым координатам x, в результате чего каждой точке $x\in E^{+}$ будет отвечать 2^{n-n_0} точек E. В целом множество E^{+} увеличится в $N_3=2^{n-n_0}$ раз.

По правилу умножения общее количество способов образования элементов E — $N=N_1N_2N_3$, откуда следует формула (12).

Пример 1. Формула (12) справедлива для упомянутых частных случаев $E_{nk}^{\pm}(G)$ — B_n', CE_n. Поскольку

$$CE_n=E_{n2}^{\pm}(\{0^{n-1},1\}), \qquad (14)$$

подстановка $n_0=n-1$ в формулу (12) дает в точности (9): $\left|CE_n\right|= =\mathrm{C}_n^{n-1}\cdot 2^1=2n$. Для B_n' учтем, что

$$B_n'=E_n^{\pm}(\{1^n\}), \qquad (15)$$

т.е. $n_0=0$. В данном случае формула (12) обращается в $\left|B_n'\right|=\mathrm{C}_n^0\dfrac{n!}{n!}\cdot 2^n=2^n$ и отвечает выражению (8).

Рассмотрим еще один частный случай $G>0$, когда мощность $E_{nk}^{\pm}(G)$ также легко найти. В формуле (13) это соответствует

$$E^{+}=E_{nk}(G). \qquad (16)$$

В данном случае $\left|E^{+}\right|=\dfrac{n!}{n_1!\ldots n_k!}$, а поскольку $n_0=0$, то при отражениях относительно всех координатных осей формируется 2^n взаимно непересекающихся образов E^{+}, т.е.

$$\left|E\right| = 2^n \left|E^+\right| = 2^n \frac{n!}{n_1!\dots n_k!}. \tag{17}$$

Такое же выражение дает формула (12).

Наконец, в качестве последнего примера рассмотрим частный случай (10) — множество перестановок со знаком $E_n^{\pm}(G)$ из $G > 0$. Для него за счет отсутствия кратных элементов G величина (17) принимает максимальное возможное значение $\left|E_n^{\pm}(G)\right| = 2^n n!$.

Отсюда видно, что $\left|E_{nk}^{\pm}(G)\right| \in [2n, 2^n n!]$, причем предельные случаи соответствуют максимальной кратности нулевого элемента ($n_0 = n-1$) и минимальной кратности нулевого ($n_0 = 0$) и некратным ненулевым элементам. В данном классе есть множества с количеством элементов, зависящим от размерности пространства как полиномиально, так и экспоненциально, причем в первую группу попадает единственное множество (6), мощность которого линейно зависит от n.

***H*-представление многогранника** P. Учитывая структуру E, его симметрию относительно начала координат и способ построения, удается решить не только задачу построения системы ограничений многогранника $E_{nk}^{\pm}(G)$, иначе говоря *H*-представления, но и сформировать несводимое такое представление.

Для того чтобы сформулировать теорему о несводимом *H*-представлении многогранника $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$, воспользуемся таким представлением *общего многогранника размещений* [4], а также тем фактом, что $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ представим объединением 2^n многогранников, комбинаторно эквивалентных некоторому многограннику размещений.

Напомним, что *общим евклидовым комбинаторным множеством* n*-размещений* $E_{\eta k}^{n}(\overline{G})$ из мультимножества

$$\overline{G} = \{\overline{g}_i\}_{i \in J_\eta} : k = \left|S(\overline{G})\right|, \;\; \overline{g}_i \le \overline{g}_{i+1}, \;\; i \in J_{\eta-1}, \tag{18}$$

называется результат погружения в R^n множества упорядоченных n-выборок из мультимножества $\overline{G}$, где $n < \eta$, а его выпуклая оболочка $\Pi_{\eta k}^{n}(\overline{G})$ — это общий многогранник n-размещений, индуцируемый $\overline{G}$ [4].

Теорема 2 (несводимая система $\Pi_{\eta k}^{n}(G)$) [11]. Несводимое *H*-представление многогранника $\Pi_{\eta k}^{n}(G)$ имеет вид:

$$\sum_{j\in\omega} x_j \ge \sum_{j=1}^{|\omega|} g_j, \quad \omega \subseteq J_n, \; |\omega| \notin \overline{2, n_1} \cup \overline{\eta - n_k, n-1}; \tag{19}$$

$$\sum_{j\in\omega} x_j \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1}, \quad \omega \subseteq J_n, \; |\omega| \notin \overline{2, n_k} \cup \overline{\eta - n_1, n-1}. \tag{20}$$

Теорема 3 (несводимая система $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$). Многогранник (11) задается несводимой системой неравенств:

$$\sum_{j\in\omega}\left|x_j\right| \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1}\,,\quad \omega\subseteq J_n\,,\quad |\omega|\notin I=\overline{2,n_k}\cup\overline{n-n_0,n-1}\,. \tag{21}$$

Доказательство. Сформируем мультимножество (18), дополнив G нулями так, чтобы кратность нулевого элемента достигла n:

$$\overline{G}=G\cup\{0\}^{n-n_0}=\{0^n, g_{n-n_0+1},\ldots,g_n\}=\{0^n, e_1^{n_1},\ldots,e_k^{n_k}\}\,. \tag{22}$$

Рассмотрим вспомогательное множество E' — общее множество n-размещений из $\overline{G}$. Его параметры — $\eta=\left|\overline{G}\right|=2n-n_0$, $\left|S(\overline{G})\right|=k+1$, соответственно $E'=E_{\eta,k+1}^{n}(\overline{G})$.

Запишем систему ограничений многогранника

$$P'=\Pi_{\eta,k+1}^{n}(\overline{G})\,. \tag{23}$$

По построению одной из его вершин будет начало координат. Адаптируя (19) и (20) к (22), (23), получаем несводимую систему ограничений P':

$$x\ge \mathbf{0}; \tag{24}$$

$$\sum_{j\in\omega}x_j \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1}\,,\ \omega\subseteq J_n\,,\ |\omega|\notin I=\overline{2,n_k}\cup\overline{n-n_0,n-1}\,. \tag{25}$$

Действительно, учитывая (22), ограничения подсистемы (20) приобретают вид $\sum_{j\in\omega}x_j \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1}$. Согласно теореме 2 избыточными являются: а) неравенства (19) союзов $|\omega|\in\overline{2,n}$, в результате чего остается только союз (24); б) неравенства (20) союзов $|\omega|\in\overline{2,n_k}$ и $|\omega|\in\overline{2,n_k}\cup\overline{\eta-n,n-1}=$ $=\overline{2,n_k}\cup\overline{n-n_0,n-1}$. Итак, (24), (25) — несводимая линейная система многогранника P'.

Перейдем к многограннику P. Подобно множеству $E_{nk}^{\pm}(G)\subset R_{+}^{n}$ он образуется из многогранника $P'\subset R_{+}^{n}$ его отражением относительно всех координатных плоскостей, в результате чего подсистема (25) преобразуется в модульное ограничение (21), а (24) исчезает. При этом система (21) по-прежнему не содержит ни одного избыточного ограничения, поскольку в противном случае за счет симметрии это бы означало наличие избыточных ограничений в системе (25).

Теорема доказана.

Пример 2. Продемонстрируем результат теоремы 3 на примере тех же множеств, что и в примере 1. Для B_n' множество I в системе (21) имеет вид: $I=\overline{2,n_1}\cup\overline{n-n_0,n-1}=\overline{2,n}\cup\overline{n-0,n-1}=\overline{2,n}$, соответственно (21) приобретает форму $\left|x_j\right| \le 1,\ j \in J_n$, а задает гиперкуб со стороной 2 — это в точности PB'_n.

Для CE_n множество I упрощается до $I = \overline{2, n_1} \cup \overline{n - n_0, n-1}$, а система (21) приобретает вид $\sum_{j=1}^{n} \left|x_j\right| \le 1$, что соответствует (7) и задает многогранник PE_n. Третье множество — $E_{nk}^{\pm}(G)$, $G > 0$. В данном случае имеем $I = \overline{2, n_k} \cup \overline{n-0, n-1} = \overline{2, n_k}$. Соответственно набор гиперграней многогранника определяется кратностью элемента e_k. Так, если $n_k = 1$, то $I = \varnothing$ и система (21) приобретает вид:

$$\sum_{j \in \omega} \left|x_j\right| \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1}, \quad \omega \subseteq J_n; \quad \overline{2,1} \cup \overline{n-n+1, n-1} = \overline{1, n-1}. \tag{26}$$

В частности $\Pi_n^{\pm}(G)$ задается несводимой системой (26). Если же e_k — кратный, т.е. $n_k > 1$, несводимая система $\Pi_n^{\pm}(G)$:

$$\sum_{j \in \omega} \left|x_j\right| \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1}, \ \omega \subseteq J_n, \ |\omega| \in \{1\} \cup \overline{n_k + 1, n}.$$

Размерность P.

Лемма 1. Многогранник $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ *полномерный*, т.е.

$$\dim \Pi_{nk}^{\pm}(G) = n. \tag{27}$$

Доказательство. Рассмотрим гиперкуб $\overline{\Pi}_2^n\left(\left\{-a^n, a^n\right\}\right)$, где $a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i$. По условию (3) он не вырожден в точку, следовательно является полномерным, как и любой другой гиперкуб. Поскольку $\Pi_n^{\pm}(G) \supseteq \overline{\Pi}_2^n(\{-a^n, a^n\})$, многогранник $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ также полномерный и условие (27) выполнено.

Сферическая расположенность E. *Сферически расположенным* называем произвольное множество, вписанное в сферу [8]: $E \subseteq S_r(a)$, где $S_r(a)$ — гиперсфера радиуса r с центром в точке $a \in R^n$.

Лемма 2. Множество $E_{nk}^{\pm}(G)$ — сферически расположенное:

$$E_{nk}^{\pm}(G) \subset S_r(\mathbf{0}), \quad r = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\right)^{1/2}, \tag{28}$$

при этом описанная сфера — единственная (здесь точка $\mathbf{0}$ — начало координат).

Доказательство. Каждая точка $E_{nk}^{\pm}(G)$ имеет координаты, модули которых образуют мультимножество G, т.е.

$$\forall\, m \in R_+ \ \sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right|^m = \sum_{i=1}^{n} \left|g_i\right|^m. \tag{29}$$

В частности, при $m = 2$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i^2 , \qquad (30)$$

т.е. точки E равноудалены от начала координат на расстояние r, заданное формулой (28), т.е. E лежит на $S_r(0)$, следовательно является сферически расположенным. Эта описанная вокруг E сфера единственна вследствие леммы 1, поскольку $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ — полномерный.

***E*-полиэдрально-сферическое множество.** Конечное множество называется *полиэдрально-сферическим* [8], если оно образуется в результате пересечения некоторых гиперсферы S и многогранника P:

$$E = P \cap S . \qquad (31)$$

Полиэдрально-сферическим представлением множества E называется система его ограничений, включающая *H*-представление многогранника P и уравнение гиперсферы S [10]. Такое представление E *неизбыточно*, если в нем участвует несводимое *H*-представление многогранника P [10].

Для множества (10) условие (31) очевидно выполнено, при этом S задается (30), а P — многогранник (11). При этом, поскольку теоремой 3 устанавливается несводимое *H*-представление многогранника P, справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Множество $E_{nk}^{\pm}(G)$ — полиэдрально-сферическое и его неизбыточное полиэдрально-сферическое представление задается системой ограничений (21) и (31).

Критерий вершины P. Из условия $|E| < \infty$ и (31) следует, что $E \subseteq \mathrm{vert}\, P$, т.е. некоторые вершины P могут лежать вне сферы S. Однако в случае, если P представляет собой выпуклую оболочку конечного сферически расположенного множества, будет, очевидно, выполнено и обратное включение $E \supseteq \mathrm{vert}\, P$. Соответственно

$$E = \mathrm{vert}\, P = \mathrm{vert}\,\mathrm{conv}\, E . \qquad (32)$$

Множества вида (32) называются *вершинно расположенными* [9, 12]. Это довольно широкий класс комбинаторных множеств, в частности, вершинно расположенными являются B'_n, $E_{nk}(G)$, $E_{n+1,k}^{n}(G)$, $E_{\eta 2}^{n}(G)$ и другие комбинаторные множества [11]. Для таких множеств критерием вершины является условие принадлежности этому множеству. Установить вершинную расположенность, как правило, достаточно сложно [4, 16]. Однако для полиэдрально-сферических множеств эта задача легко разрешима, поскольку сфера является множеством крайних точек соответствующего шара, т.е. ни одна из точек сферы не может быть выражена выпуклой линейной комбинацией других точек сферы. Это же справедливо и для любого подмножества точек на сфере, в частности, для произвольного полиэдральносферического множества E . Таким образом E является множеством крайних точек своей выпуклой оболочки, представляющим собой многогранник, т.е. множеством его вершин.

Таким образом, для $E_{nk}^{\pm}(G)$ в силу леммы 3 справедливо следующее утверждение.

Лемма 4 (критерий вершины $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$). Множество $E_{nk}^{\pm}(G)$ является вершинно расположенным, т.е. $E_{nk}^{\pm}(G) = \mathrm{vert}\,\Pi_{nk}^{\pm}(G)$.

Критерий смежности вершин P. Прежде чем перейти к исследованию вопроса о смежности вершин $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$, выделим два случая в соответствии с множеством (13):

Случай 1, когда все элементы G положительны, т.е. $n_0 = 0$ и выполнено условие (16). Соответственно основа G имеет вид:

$$S(G) = \{e_i\}_{i \in J_k} . \tag{33}$$

Случай 2, когда среди элементов G есть нулевые, соответственно $n_0 > 0$, т.е.

$$E^+ = E_{n+1,k}(G); \tag{34}$$

$$S(G) = \{0, e_1, ..., e_k\} = \{e_i\}_{i \in J_k^0}, \quad \text{где } \mathrm{e}_0 = 0,\ J_k^0 = J_k \cup \{\varnothing\} . \tag{35}$$

Будем рассматривать их последовательно и сформулируем критерий смежности вершин в зависимости от рассматриваемого случая. Одновременно установим и степень регулярности d вершины $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$, т.е. количество вершин, смежных с ней.

Теорема 4 (критерий смежности вершин $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ и степень их регулярности). Если выполнено (16), $\forall x \in E_{nk}^{\pm}(G)$ смежные к ней вершины $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ образуются из x заменой максимум двух переменных: заменой в x двух координат x_i, x_j, абсолютные значения которых являются последовательными элементами основы G, значениями $\mathrm{sgn}\, x_i \cdot |x_j|$, $\mathrm{sgn}\, x_j \cdot |x_i|$ (*способ 1*) либо сменой на противоположный знак координаты x, равной по модулю e_1 (*способ 2*).

При выполнении (34) смежные к $x \in E_{nk}^{\pm}(G)$ вершины $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ отличаются от x не более чем двумя координатами и формируются из нее либо способом 1, либо транспозицией нулевой координаты и координаты с абсолютным значением e_1 с последующей сменой знака ненулевой координаты на противоположный (*способ 3*).

В случае 1 степень регулярности произвольной вершины $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ задается формулой

$$d = n_1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1} ; \tag{36}$$

в случае 2:

$$d = 2n_0 n_1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1} . \qquad (37)$$

Доказательство. Сначала сформируем множество смежных вершин многогранника $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ для точек E^{+}, затем распространим результат на все множество $E_{nk}^{\pm}(G)$.

Введем обозначение для множества смежных вершин некоторого многогранника Π и их числа среди точек $M \subseteq vert\,\Pi$: $N_{M,\Pi}(x) = \left\{ y \in M : y \overset{\Pi}{\leftrightarrow} x \right\}$, $d_{M,\Pi}(x) = \left| N_{M,\Pi}(x) \right|$. Так, например, $N_{E,P}(x)$, $d_{E,P}(x)$ соответствует искомым множеству и степени вершины $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$, $N_{E^{+},P}(x)$ включает только смежные вершины P среди точек E^{+} и т. п.

Введем также в рассмотрение многогранник $P^{+} = \mathrm{conv}\,\mathrm{E}^{+}$, представляющий собой общий перестановочный многогранник.

Случай 1. Рассмотрим произвольную точку $x \in E^{+}$. Во множестве $N_{E,P}(x)$ выделим две части:

$$N_{E,P}(x) = N_{E^{+},P^{+}}(x) \cup N_{E \setminus E^{+},P}(x) . \qquad (38)$$

Первая часть — это множество вершин многогранника P^{+}, смежных с x — $N_{E,P^{+}}(x) = N_{E^{+},P^{+}}(x)$, вторая — оставшиеся смежные вершины. В соответствии с критерием смежности вершин общего перестановочного многогранника [16], $N_{E,P^{+}}(x)$ будет включать перестановки, образованные из x транспозицией последовательных элементов основы $S(G)$ вида (33), т.е. $e_i \leftrightarrow e_{i+1}$-транспозицией $(i \in J_{k-1})$. Их количество определяется по формуле [4]

$$d_{E,P^{+}}(x) = \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1} . \qquad (39)$$

Для формирования $N_{E \setminus E^{+},P}(x)$ воспользуемся критерием вершины общего многогранника размещений [4], учитывая тот факт, что x является не только вершиной P', но и многогранника P' вида (23). В $N_{E',P'}(x)$ выделим также две части:

$$N_{E',P'}(x) = N_{E^{+},P^{+}}(x) \cup N_{E' \setminus E^{+},P'}(x) , \qquad (40)$$

последняя из которых содержит точки, образованные из x заменой наименьшей координаты e_1- нулем. Количество таких смежных вершин будет равно кратности e_1: $d_{E' \setminus E^{+},P'}(x) = n_1$. Продлив ребра $[x, y], y \in N_{E' \setminus E^{+},P'}(x)$ симметрично точке y, из x будет сформировано n_1 точек E путем смены знака одной координаты e_1. Это и будет искомое множество $N_{E \setminus E^{+},P}(x)$.

Соответственно
$$d_{E\setminus E^+,P}(x) = n_1 . \tag{41}$$

Объединяя эти результаты, получаем, что в случае 1: $\forall x \in E^+$ множество $N_{E,P}(x)$ образуется из x транспозицией соседних элементов основы G либо заменой знака минимальной координаты на противоположный.

Из выражения (40) следует:
$$d_{E',P'}(x) = d_{E^+,P^+}(x) + d_{E'\setminus E^+,P'}(x) . \tag{42}$$

Соответственно подстановка (39), (41) приводит к тому, что степень регулярности вершины x равна $d_{E,P}(x) = n_1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}$. Это также справедливо для оставшихся точек E^+, т.е. в этом случае формула (36) верна.

Пусть теперь x — произвольная точка E . Помимо абсолютных значений координат x при построении $N_{E,P}(x)$ будут учитываться и знаки координат x. Для x и смежных с ней вершин эти знаки будут совпадать, за исключением максимум одной координаты, равной по модулю e_1.

Итак в случае 1, учитывая симметрию E , для вершины x многогранника P критерий смежности выглядит следующим образом: $\forall x \in E$ множество $N_{E,P}(x)$ включает точки, образованные из x одним из двух способов: а) способом 1 , т.е. заменой в x двух координат x_i, x_j, $i \neq j$, абсолютные значения которых являются последовательными элементами основы G вида (33), значениями $\operatorname{sgn} x_i \cdot |x_j|, \operatorname{sgn} x_j \cdot |x_i|$ соответственно; б) способом 2, т.е. сменой знака координаты, равной по модулю e_1, на противоположный. При этом степень регулярности произвольной вершины P определяется по формуле (36).

Случай 2. Снова рассмотрим точку $x \in E^+$. Множество смежных к ней вершин также представим в виде (38) . Однако в отличие от случая 1 в силу (34) формула (39) преобразуется к виду
$$d_{E,P^+}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} n_i n_{i+1} . \tag{43}$$

Что касается $N_{E\setminus E^+,P}(x)$, то поскольку минимальная координата x равна нулю, $\forall y \in N_{E^+,P'}(x)$ ребра $[x,y]$ вырождаются в точку x, от которой расходятся ребра как в область R^n_+, так и в области
$$R^{n,i}_{\le 0} = \{x' \in R^n : x'_j \le 0,\ x'_j \ge 0,\ j \ne i\} ,\ i \in I^x = \{i \in J_n : x_i = 0\} . \tag{44}$$

Количество таких ребер $\forall i \in I^x$, идущих в $R^{n,i}_{\le 0}$, будет n_1 и будут образовываться из x $0 \leftrightarrow e_1$-транспозицией x_i, x_j-координат, где $j \notin I^x$, с последующей сменой знака x_i на противоположный. Поскольку, в соответствии с кратностью нулевого элемента количество областей вида (44) — n_0, общее количество образованный вершин в смежных к R_+^n областях:

$$d_{E \setminus E^+, P}(x) = n_0 n_1 . \tag{45}$$

Подставляя (43), (45) в формулу (42), получаем $d_{E,P}(x) = n_0 n_1 + \sum_{i=0}^{k-1} n_i n_{i+1}$, т.е. $\forall x \in E^+$ верна формула (37). Вследствие симметрии E и P формула (37) будет верна для всех точек E, при этом в случае 2 $\forall x \in E$ критерий смежности вершин многогранника P излагается следующим образом: множество $N_{E,P}(x)$ включает точки, образованные из x одним из двух способов: а) заменой в x двух координат x_i, x_j, $i \neq j$, абсолютные значения которых являются последовательными элементами основы G вида (35), значениями $\operatorname{sgn} x_i \cdot |x_j|, \operatorname{sgn} x_j \cdot |x_i|$ соответственно, т.е. при помощи способа 1; б) способом 3, т.е. транспозицией нулевой координаты и координаты, равной по модулю e_1, с последующей сменой знака ненулевой координаты на противоположный: $\forall x_i, x_j : x_i = 0,\ |x_j| = e_1$; новые значения этих координат $x_i = -\operatorname{sgn}(x_j) e_1,\ x_j = 0$. Степень регулярности вершин P определяется по формуле (37).

Теорема доказана.

Пример 3. Проиллюстрируем теорему 3 на примере тех же множеств, что и в примерах 1, 2.

Множества $B_n^{'}$ и $E_{nk}^{\pm}(G)$, $E_n^{\pm}(G)$ для $G > 0$ соответствуют случаю 1. В частности, для PB_n', учитывая (15), $G = \{1^n\}$, следовательно формула (36) обращается в $d = n_1 = n$. Поскольку E^+ вырождено в точку, смежных вершин, образованных перестановкой координат, не будет и все смежные вершины будут формироваться только способом 2, соответствующим смене знака одной координаты на противоположный. Для $E_n^{\pm}(G)$ формула (36) преобразуется в $d = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} 1 = n$, а критерий смежности остается без изменений. Как и ожидалось, многогранники PB_n', $\Pi_n^{\pm}(G)$ — простые, т.е. степень регулярности их вершин совпадает с размерностью многогранников.

Наконец, множество CE_n соответствует случаю 2. Учитывая (14), в данном случае $G = \{0^{n-1}, 1\}$, в соответствии с формулой (37) имеем: $d = 2 n_0 n_1 = 2(n-1)$.

Так, например, для $n = 3$ $d = 2(3-1) = 4$ и в соответствии с критерием смежности вершин, например, для вершины $x = (-1, 0, 0)$ половина смежных вершин — $x^1 = (0, -1, 0)$, $x^2 = (0, -1, 0)$ будет сформирована способом 1, оставшаяся половина — $x^3 = (0, 1, 0)$, $x^4 = (0, 0, 1)$ — способом 3 из предыдущих двух точек.

Полученные результаты подтверждают известные свойства PB_n', CP_n, в частности, что вершины гиперкуба имеют n смежных, а для вершины гипероктаэдра все оставшиеся вершины — смежные с нею, за исключением диаметрально противоположной.

Число комбинаторно неэквивалентных многогранников $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$**.** Прежде чем перейти к исследованию вопроса о комбинаторной эквивалентности многогранников класса $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$, приведем некоторые определения [16].

Графом H многогранника Π, $H = H(\Pi)$, называется граф, образованный вершинами и ребрами Π: $H = (V_H, E_H) = (\operatorname{vert}\Pi, \operatorname{edges}\Pi)$.

Графы $H = (V_H, E_H)$ и $H' = (V_{H'}, E_H)$ *изоморфны*, если существует биекция между $V_H, V_{H'}$: $V_H \xrightarrow{\phi} V_{H'}$ такая, что произвольные две вершины графа H — смежные тогда и только тогда, когда соответствующие две вершины графа H' — смежные:

$$\forall v_1, v_2 \in V_H : v_1 \leftrightarrow v_2 \Leftrightarrow v_1' = \varphi(v_1),\ v_2' = \varphi(v_2) : v_1', v_2' \in V_{H'},\ v_1' \leftrightarrow v_2'.$$

Многогранники называются *комбинаторно эквивалентными*, если их графы изоморфны.

Введем обозначение M_n для числа комбинаторно неэквивалентных многогранников $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ размерности n. Произведем предварительную оценку числа M_n. Так, из системы неравенств (24) видно, что число гиперграней P определяется комбинациями чисел n_0, n_k. Учитывая, что $n_0 + n_k \le n, n_0 \in Z_+, n_k \in Z_{>0}$, получаем

$$M_n \ge M_n' = C_{n+1}^2. \tag{46}$$

Точное значение M_n определим, учитывая то, что количество смежных вершин x и множество смежных вершин определяются первичной спецификацией G.

Итак, докажем следующую теорему.

Теорема 5 (число комбинаторно неэквивалентных общих многогранников перестановок со знаком**).** Для фиксированного n число M_n комбинаторно неэквивалентных многогранников $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$:

$$M_n = 2^n - 1. \tag{47}$$

Доказательство. Случаи 1, 2 рассмотрим по отдельности, обозначив соответствующие числа комбинаторно неэквивалентных многогранников размерности n — M_n^1, M_n^2.

Начнем со случая 1: число различных векторов первичных спецификаций вида $[G] = (n_1, \ldots, n_k)$, удовлетворяющих $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, $k \le n$, равно числу композиций числа n, следовательно $M_n^1 = 2^{n-1}$.

Для случая 2:

$$[G]=(n_0,n_1,...,n_k)\,, \qquad (48)$$

$\sum_{i=0}^{k} n_i = n$, $n_0,k \ge 1$. Поскольку каждой композиции длины $k+1$ ставится в соответствие первичная спецификация (48), все компоненты которой ненулевые, условие $n_0 \ge 1$ будет выполнено всегда. Для определения M_n^2 из числа композиций числа n достаточно отнять единицу, поскольку в случае $[G]=(n)$ не выполняется $k \ge 1$. Итак, $M_n^2 = 2^{n-1}-1$. Учитывая, что $M_n = M_n^1 + M_n^2$, окончательно имеем формулу (47).

Теорема доказана.

Пример 4. Для $n=3$ оценка (46) $M_3 \ge M_3^{'} = C_4^2 = 6$ близка к точному значению (47) — $M_3 = 2^3-1=7$. Для иллюстрации теоремы 4 в таблице приведены различные 3-мультимножества, соответствующие семи возможным векторам первичной спецификации, а также кратности минимального и максимального элементов и степени вершин многогранников. Как видно, первые 4 мультимножества соответствуют случаю 1, остальные 3 — случаю 2. Как было отмечено, первым признаком комбинаторной неэквивалентности является различие комбинаций n_0,n_k. Нетрудно видеть, что эти параметры совпадают только у пары G_1,G_3, т.е. в точности $M_3^{'}=6$ комбинаций n_0,n_k выявлено. Смотрим второй признак — степень регулярности вершин: для G_1 $d=3$, в то время, как для G_3 $d=4$. Таким образом, даже вот такой беглый анализ показывает, что все многогранники $\Pi_{3k}^{\pm}(G_i)$, $i \in J_7$ — не комбинаторно эквивалентны.

Многогранники $\Pi_{3k}^{\pm}(G_i)$

Мультимножество	g_1	g_2	g_3	n_0	n_k	r
G_1	1	2	3	0	1	3
G_2	1	2	2	0	2	3
G_3	1	1	2	0	1	4
G_4	1	1	1	0	3	3
G_5	0	1	2	1	1	3
G_6	0	1	1	1	2	4
G_7	0	0	1	2	1	4

Все семь трехмерных многогранников данного класса показаны на рис. 1–7. Видно, что некоторые из них формируются из гиперкуба отсечениями его вершин, остальные — вершин и ребер, в результате чего образуются вершины со степенью регулярности 3 и 4. Простыми многогранниками в данном семействе являются, помимо упомянутых $\Pi_3^{\pm}, B_3^{'}$, еще два — $\Pi_{32}^{\pm}(G_2)$, $\Pi_3^{\pm}(G_5)$.

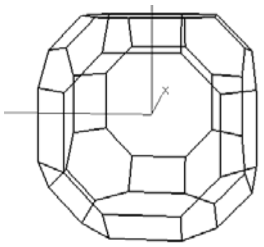

Рис. 1. $\Pi_3^{\pm}(G_1) = \Pi_3^{\pm}$

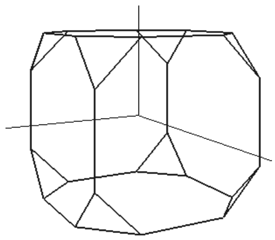

Рис. 2. $\Pi_{32}^{\pm}(G_2)$

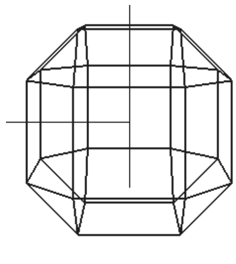

Рис. 3. $\Pi_{32}^{\pm}(G_3)$

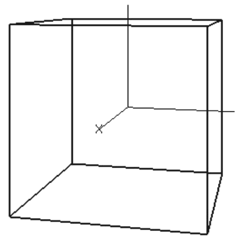

Рис. 4. $\Pi_{31}^{\pm}(G_4) = PB_3'$

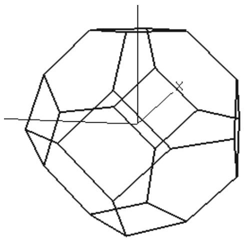

Рис. 5. $\Pi_{32}^{\pm}(G_3)$

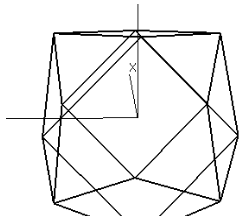

Рис. 6. $\Pi_{32}^{\pm}(G_6)$

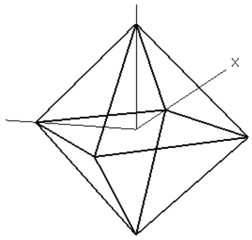

Рис. 7. $\Pi_{32}^{\pm}(G_7) = CP_3$

Пример 5. Для $n = 4$ формула (46) дает оценку $M_4^{'} = C_5^2 = 10$ числа некомбинаторно эквивалентных многогранников среди общих многогранников перестановок со знаком размерности 4, в то время, как точное их количество согласно (47), в полтора раза больше: $M_4 = 2^4 - 1 = 15$.

2. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ НА $E_{nk}^{\pm}(G)$, $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$

Свойства линейных и некоторых нелинейных функций на множестве E вида (10) и многограннике P вида (11) рассматривались в разделе 1. Так H-представление P, приведенное в теореме 3, описывает поведение линейных функций как на P, так и на E . В то же время это линейное аналитическое (или функциональное в терминах [9–11]) представление E в компактной форме (21) также демонстрирует поведение на E и P нелинейных функций, представляющих собой суммы модулей некоторых координат и показывает пределы изменения их значений.

Уравнение (30) также указывает, что квадратичная функция $h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ принимает постоянное значение на E , а (29) демонстрирует выполнение этого же свойства для целого семейства функций

$$h_m(x)=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^m,\quad m\in R_{>0}\,. \tag{49}$$

Поверхность $S_m=\left\{x\in R^n : h_m(x)=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^m\right\}$ задает в пространстве так называемую суперсферу [17]. В этих обозначениях (29) представляется в виде

$$E\subset S_m,\ \ m\in R_{>0}, \tag{50}$$

и свидетельствует о том, что E вписано не только в сферу, но и лежит на целом семействе (50) суперсфер. В зависимости от параметра деформации $\frac{m}{2}$ суперсферы могут быть как выпуклые ($m\ge 1$), так и невыпуклые ($m\in(0,1)$); как гладкие при $m\in[2,\infty)$, так и негладкие в противном случае. Значениям $m=1,\infty$ соответствуют кусочно-линейные поверхности гипероктаэдра $CP_n\left(\sum_{i=1}^{n}g_i\right)$ и гиперкуба $\overline{\Pi}_2^n(\{-g_k^n,g_k^n\})=\operatorname{conv}\overline{E}_2^n(\{-g_k^n,g_k^n\})$. Соответственно можем судить о поведении целого класса функций (49) на E.

Отметим также, что при $m\in[2,\infty)$ функция $h_m(x)$ сильно выпуклая, при $m\in[1,2)$, $m=\infty$ — строго выпуклая.

Справедливо следующее обобщение представления (21), (30).

Лемма 5. $\forall\, m\in(1,\infty)$ множество $E_{nk}^{\pm}(G)$ задается несводимым функциональным представлением (21),

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|^m=\sum_{i=1}^{n}|g_i|^m\,. \tag{51}$$

Представление (21), (51) — гладкое при $\forall\, m\in[2,\infty)$ и принимает форму (21),

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^{m/2})^2=\sum_{i=1}^{n}|g_i|^m\,. \tag{52}$$

Как видно, найдено множество полиномиальных функциональных представлений множества E, включающих систему ограничений P, число которых неполиномиально. Возникает вопрос, существуют ли функциональные представления E с меньшим числом компонент. Ответ на этот вопрос положительный и основан на следующей теореме.

Теорема 6 [18]. Система полиномиальных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^j=\sum_{i=1}^{n}g_i^j,\ \ j\in J_n, \tag{53}$$

является функциональным представлением общего множества перестановок, индуцированного мультимножеством $G=\{g_1,...,g_n\}$.

Аналитические представления в виде систем уравнений, таких как (53), называем *строгими* функциональными представлениями множеств. Геометрически они представляют множество как пересечение некоторых поверхностей.

На основании теоремы 6 сформируем строгое представление E, применяя ее к мультимножеству (3).

Лемма 6. Система уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \left| x_i \right|^{j} = \sum_{i=1}^{n} g_i^{j}, \quad j \in J_n \tag{54}$$

задает строгое функциональное представление общего множества перестановок со знаком из мультимножества вида (3).

Доказательство. В данном случае система (53) задает общее множество перестановок E^{+} вида (13). Поскольку E образуется отражениями E^{+} относительно всевозможных координатных плоскостей, в пересечении суперсфер (54) образуется E и только оно.

Еще одно представление E легко получить из теоремы 6, применяя ее к E^{+} и осуществляя затем замену переменных $x_i \to x_i^2$, $g_i \to g_i^2$, $i \in J_n$.

Лемма 7. Система полиномиальных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{2j} = \sum_{i=1}^{n} g_i^{2j}, \quad j \in J_n, \tag{55}$$

является строгим функциональным представлением множества $E_{nk}^{\pm}(G)$, индуцированного мультимножеством (3).

Преимуществом представления (55) по сравнению с (54) является гладкость, отсутствие модулей в записи и тот факт, что она включает сильно выпуклые функции.

Важным свойством общего множества перестановок является тот факт, что произвольная перестановка координат его элементов не выводит за пределы этого множества, вследствие чего все симметричные функции принимают постоянное значение на $E_{nk}(G)$. Нетрудно заметить, что это свойство сохраняется при переходе от $E_{nk}(G)$ к $E_{nk}^{\pm}(G)$. Кроме этого, смена знаков произвольного количества переменных элементов $E_{nk}^{\pm}(G)$ приводит к формированию точки этого же множества. Итак, имеем следующее утверждение.

Лемма 8. Произвольная функция $f : E_{nk}^{\pm}(G) \to R_{+}$ такая, что: а) $f(x)$ — симметричная; б) $f(x)$ не изменяет значения при замене знаков произвольного числа координат, принимает на $E_{nk}^{\pm}(G)$ постоянное значение $A(G)$, определяемое элементами $G : f(x) \underset{E_{nk}^{\pm}(G)}{=} A(G)$.

Замечание 1. Из леммы 8 следует, что $\forall\, j \in J_n \quad \sum_{i=1}^{n} (\ln(|x_i| + 1))^{j} \underset{E_{nk}^{\pm}(G)}{=}$ $\underset{E_{nk}^{\pm}(G)}{=} \sum_{i=1}^{n} (\ln(g_i + 1))^{j}$, или, например, $\prod_{i=1}^{n} |\sin x_i|^{j} \underset{E_{nk}^{\pm}(G)}{=} \prod_{i=1}^{n} |\sin g_i|^{j}$.

Однако вопрос, задает ли семейство $\sum_{i=1}^{n}(\ln(|x_i|+1))^j \underset{E_{nk}^{\pm}(G)}{=} \sum_{i=1}^{n}(\ln(g_i+1))^j$, $j \in J_n$ или $\prod_{i=1}^{n}|\sin x_i|^j \underset{E_{nk}^{\pm}(G)}{=} \prod_{i=1}^{n}|\sin g_i|^j$, $j \in J_n$ множество $E_{nk}^{\pm}(G)$, требует отдельного изучения. Если он решен положительно, т.е. когда решена задача построения функционального представления множества, возникают новые задачи — о неизбыточности функциональных представлений, об оптимальном выборе такого представления при решении задачи (1), (2). Так например, представление (53), как правило, неизбыточное представление $E_{nk}(G)$. В то же время, в работе [10] установлено, что оно избыточное, поскольку для некоторых G, например, $E_{n2}(\{0^{n-1},1\})$ полностью определяется двумя последовательными компонентами (53). Переходя к представлениям рассматриваемого множества $E_{nk}^{\pm}(G)$, можно сказать, что как (54), так и (55) — в отдельных случаях сводимы, поскольку $E_{n2}(\{0^{n-1},1\})$ будет соответствовать $E_{n2}(\{0^{n-1},1\}) = CE_n(1)$, определяемое любыми двумя компонентами этих представлений [10]. То же касается множества $E_{n2}^{\pm}(\{1^n\}) = B_n^{'}$ [8, 10].

Отметим еще одну особенность E — простоту решения линейной задачи и, как следствие, проектирования на E.

Итак, множество E называется *хорошо описанным* (a well described set) [19], если линейная задача $LP(E,c)$: $x^{lin,E} = \underset{E}{\operatorname{argmin}}\, \mathrm{c}^T x$ эффективно разрешима.

Структура $E_{nk}^{\pm}(G)$ позволяет легко записать решение этой задачи.

Лемма 9. Если $(i_j)_{j\in J_n} : \{i_j\}_{j\in J_n} = J_n$, $|c_{i_j}| \ge |c_{i_{j+1}}|$, $j \in J_{n-1}$, то

$$x_{i_j}^{lin,E_{nk}^{\pm}(G)} = \operatorname{sgn}(\mathrm{c}_{i_j}) g_j,\quad j \in J_n. \tag{56}$$

Как видно, решение $LP(E_{nk}^{\pm}(G),c)$ сводится к простому упорядочиванию коэффициентов целевой функции и присваиванию (56), т.е. $E_{nk}^{\pm}(G)$ — хорошо описанное.

Теорема 7 [2]. Если E — хорошо описанное полиэдрально-сферическое множество, то задача поиска проекции произвольной $y \in R^n$ на E эффективно разрешима и сводится к $LP(E,a-y)$, где a — центр описанной вокруг E сферы.

Применяя теорему 7 к (10) и учитывая формулу (28), получаем

$$x^P = \mathrm{Pr}_E\, y, \tag{57}$$

т.е. решение задачи $LP(E,\mathbf{0}-y) = LP(E,-y)$ — это решение задачи $\underset{E}{\arg\max}\, \mathrm{c}^T x$. Адаптируем лемму 9 к этому случаю.

Лемма 10. Решение задачи (57) на $E_{nk}^{\pm}(G)$ для произвольной $y \in R^n$

$$x_{i_j}^P = \operatorname{sgn}(y_{i_j}) g_j, \quad j \in J_n,$$

где $(i_j)_{j \in J_n} : \{i_j\}_{j \in J_n} = J_n, \quad |y_{i_j}| \le |y_{i_{j+1}}|, \quad j \in J_{n-1}$.

Наконец, последнее свойство, которое приводим, — это возможность упрощенной проверки произвольной точки $x \in R^n$ на принадлежность $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$. Оно основано на лемме 9 и свойствах функций $\sum\limits_{j \in \omega} |x_j|$, $\omega \subseteq J_n$ на этом многограннике.

Лемма 11. Точка $x \in \Pi_{nk}^{\pm}(G)$ тогда и только, когда она удовлетворяет системе ограничений:

$$\sum_{j'=1}^{j} \left| x_{n-i_{j'}+1} \right| \le \sum_{j'=1}^{j} g_{n-j'+1}, \quad j \in J_n \setminus \{\overline{2, n_k} \cup \overline{n - n_0, n-1}\}.$$

3. ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ (1), (2)

Решение задачи поиска функционального представления дискретного множества E позволяет эквивалентно переформулировать (1), (2) в виде непрерывной задачи (1) с дополнительными ограничениями

$$f_i(x) = 0, \quad i \in J_k; \tag{58}$$

$$f_i \le 0, \quad i \in J_{k'} \setminus J_k, \tag{59}$$

где $f_i(x) = 0, \ i \in J_{k'}$ — компоненты функционального представления E. В частности, строгие *суперсферические представления* (54) и (55) позволяют свести к классической задаче (1), (58) на условный экстремум.

Вершинная расположенность E позволяет свести исходную задачу к оптимизации выпуклой функции, а именно к задаче

$$F(x) \to \min, \tag{60}$$

$$F(x) \text{ — выпуклая на выпуклом компакте } K \supseteq E, \tag{61}$$

при ограничениях (58), (59). Эквивалентность задач (58)–(61) и исходной обеспечивается тем, что $F(x) \underset{E}{=} f(x)$, т.е. $F(x)$ — выпуклое продолжение $F(x)$ с E на K [9, 12]. При этом $F(x)$ часто может быть найдена с помощью компонент строгих представлений E в форме $F(x) = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x), \ \lambda_i \in R, \ i \in J_k$ [2, 9, 10].

Суперсферические представления E позволяют также применять к (1), (2) метод множителей Лагранжа, штрафные методы и их комбинации [20]. При этом выпуклость $F(x)$ позволяет давать и уточнять нижние оценки, а проектирование на множество E в ходе всего итерационного процесса — получать и последовательно уточнять верхние оценки.

Использование в качестве ограничений (58), (59) *полиэдрально-суперсферических представлений* (21), (52) позволяет комбинировать различные *релаксации* исходной задач, в том числе и выпуклые, — *полиэдральную* — $F(x)\underset{P}{\to}\min$, *суперсферическую* $F(x)\underset{S_m}{\to}\min$ и *супершаровую* $F(x)\underset{C_m}{\to}\min$, где S_m — строго выпуклая суперсфера, $C_m = \operatorname{conv} S_m$. Таким образом, к (1), (2) применимы точные и приближенные (с оценкой точности) *полиэдрально-поверхностные методы* [2].

Способ задания E через $E_{nk}(G)$, B'_n позволяет легко генерировать его элементы и предложить различные эвристические подходы к решению (1), (2), в том числе генетические алгоритмы [21]. Для последних полезным является простота проектирования на E точек, образованных в результате скрещивания. Критерий смежности вершин P позволяет использовать схемы спуска [22] и комбинировать с случайным поиском в метаэвристиках. Оценку точности результата и здесь при желании можно получить с помощью полиэдральной или супершаровой релаксаций.

В заключение несколько слов об упомянутых выпуклых релаксациях. Несводимая система P позволяет точно определить, полиномиальным или неполиномиальным числом ограничений задается многогранник. В последнем случае оперирование всей системой многогранника невозможно при решении реальных задач, поэтому для решения полиэдральной релаксации используются специальные приемы типа метода последовательного подсоединения ограничений [4], основанные на применении леммы 11 и позволяющие использовать незначительную часть ограничений P. В то же время тот факт, что E хорошо описанное, позволяет эффективно решать полиэдральную релаксацию *модифицированным методом условного градиента* [2].

ВЫВОДЫ

Проведено исследование свойств общих множества и многогранника перестановок со знаком, в частности установлены: мощность множества $E^{\pm}_{nk}(G)$ и порядок несводимого *H*-представления многогранника $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$, размерность, критерии вершин и смежности вершин $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$, а также количество комбинаторно неэквивалентных многогранников фиксированной размерности. Представлена иллюстрация многогранников $\Pi^{\pm}_{3k}(G)$ всевозможных форм. Для множества $E^{\pm}_{nk}(G)$ приведен ряд функциональных представлений, включая полиэдрально-суперсферическое и строгое суперсферическое, а также приведены явные решения линейной задачи и задачи проектирования на это множество. Перечислены оптимизационные методы, применимость которых стала возможной в результате исследованных свойств $E^{\pm}_{nk}(G)$ и $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kochenberger G.* The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey / G. Kochenberger, J.-K. Hao, F. Glover etc // Journal of Combinatorial Optimization. — 2014. — N 1. — P. 58-81. DOI: 10.1007/s10878-014-9734-0.
2. *Pichugina O.* Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications / O. Pichugina, S. Yakovlev // J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. — 2016. — Vol. 4(2) . — P. 129–152. DOI: 10.1166/jcsmd.2016.1103
3. *Стоян Ю.Г.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. — К. : Наук. думка, 1986. — 268 с.
4. *Стоян Ю.Г.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О. О. Ємець. — К. : Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. — 188 с.
5. *Стоян Ю.Г.* Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств (Препринт АН УССР/Институт проблем машиностр.; 85) / Ю.Г. Стоян. — Харьков, 1980. — 22 с.
6. *Taha H. A.* Integer Programming: Theory, Applications, and Computations. Edited by J. William Schmidt / H.A. Taha. — New York: Academic Press, 2014. — 392 p.
7. *Sherali H.D.* A reformulation-linearization technique for solving discrete and continuous nonconvex problems / H.D. Sherali, W.P. Adams, P.M. Pardalos (eds.).— Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 518 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-4388-3.
8. *Pichugina O.* Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems / O. Pichugina, S. Yakovlev // Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering, Edited J. Bélair et al. — Springer, Switzerland. — 2016. — P. 689–700. DOI: 10.1007/978-3-319-30379-6_62.
9. *Pichugina O.S.* Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization / O.S. Pichugina, S.V. Yakovlev // Cybernetics and Systems Analysis. — 2016. — Vol. 52, N 6. — P. 921–930. DOI: 10.1007/s10559-016-9894-2.
10. *Pichugina O.* Continuous Representation Techniques in Combinatorial Optimization / O. Pichugina, S. Yakovlev // IOSR Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 13, N 2, Ver.V. — P. 12–25. DOI: 10.9790/5728-1302051225.
11. *Pichugina O.* Optimization on Polyhedral-Spherical Sets: Theory and Applications / O. Pichugina, S. Yakovlev // In 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engeneering (UKRCON) . — 2017. — P. 1167–1174. DOI: 10.1109/UKRCOM.2017.8100436.
12. *Яковлев С.В.* Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников / С. В. Яковлев // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1994. — 34, № 7. — С. 1112–1119.
13. *Яковлев С.В.* О некоторых классах задач оптимизации на комбинаторных множествах размещений / С.В. Яковлев, И.В. Гребенник // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1991. — №11. — С. 26 – 30.
14. *Postnikov A.* Permutohedra, associahedra, and beyond / A. Postnikov // IMRN: International Mathematics Research Notices. — 2009. — N 6. — P. 1026-1106. DOI: 10.1093/imrn/rnn153.
15. *Weisstein E.W.* CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Second Edition / E.W. Weisstein. — Boca Raton: CRC Press, 2002. — 3242 p.
16. *Емеличев В.А.* Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников) / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. — М.: Наука. Гл. ред. физико-мат. лит-ры, 1981. — 344 с.

17. *Onaka S.* Superspheres: intermediate shapes between spheres and polyhedra / S. Onaka // Symmetry. — 2012. — Vol.4, N 3. — P. 336–343. DOI: 10.3390/sym4030336.
18. *Пичугина О.С.* Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества / О.С. Пичугина, С.В. Яковлев // Eastern-European Journal of Enterprise Technologie. — 2016. — № 1 — С. 101–126. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.58550.
19. *Berstein Y.* Parametric nonlinear discrete optimization over well-described sets and matroid intersections / Y. Berstein, J. Lee, S. Onn, R. Weismantel // Mathematical Programming. — 2010. — Vol. 124, N 1/2 — P. 233–253. DOI: 10.1007/s10107-010-0358-6.
20. *Bertsekas D.P.* Nonlinear Programming, 2nd edn. / D.P. Bertsekas. — Belmont: Athena Scienific, 1999. — 708 p.
21. *Гуляницький Л.Ф.* Прикладні методи комбінаторної оптимізації : навчальний посібник / Л.Ф. Гуляницький, О.Ю. Мулеса. — К: Видавничо-поліграф. центр "Київський університет", 2016. — 142 с.
22. *Sergienko I.V.* Methods of optimization and systems analysis for problems of transcomputational complexity / I.V. Sergienko. — New York: Springer, 2012. — 226 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-4211-0.

Поступила 16.06.2017