

ПРОГНОЗУВАННЯ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ НА ОСНОВІ МАТРИЧНОЇ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ: ПРИКЛАДИ

І.М. НАЗАРАГА

Анотація. Для розв'язання задачі прогнозування на основі методу найменших квадратів використано клас матричних функцій з набором матричних аргументів (матричну множинну регресію). Послідовне розв'язання задачі прогнозування виконано із застосуванням математичного апарату сингулярного розкладу і техніки псевдообернення за Муром-Пенроузом у межах розвитку концепції коротезних операторів. Алгоритм оцінювання невідомих параметрів реалізовано у Wolfram Mathematica. Запропонований метод продемонстровано для прогнозування основних макроекономічних показників економіки України. Підхід перевірявся на статистичних даних про економічні показники за період 2007 – 2016 рр.; наведено результати розрахунків. Як показано на прикладах, матрична множинна регресія може бути ефективним інструментом прогнозування в економіці з прийнятною для процесів планування точністю.

Ключові слова: матрична множинна регресія, метод найменших квадратів, макроекономіка, прогноз.

ВСТУП

З огляду на важливість та складність прийняття керівниками вищих рівнів обґрунтованих та ефективних рішень для управління економікою виникає потреба у передбаченні наслідків цих рішень. Тому наразі підвищується роль науково обґрунтованих прогнозів макроекономічних показників.

Створення, удосконалення та модифікація математичних моделей та методів прогнозування економічних процесів сприяють розробленню узагальненої методології макроекономічного моделювання, а реалізація та апробація відповідних алгоритмів прогнозування є важливими для відпрацювання відповідних рекомендацій щодо прийняття управлінських рішень.

АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

В Україні дослідження у сфері макромоделювання економічних процесів проводяться у багатьох наукових інститутах та державних структурах.

Результати цих досліджень знайшли відображення у низці моделей, основними з яких є:

- макромоделі економіки України-1 (розроблена в Інституті економіки і прогнозування НАНУ, автори В.М. Геєць, М.І. Скрипниченко, М.П. Соколик, С.С. Шумська [1–3]);
- модель середньострокового прогнозування Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України (розробники Л. Гуляницький, І. Сергієнко, Б. Панасюк [4]);

- моделювальна система «Бюджет» (автори М.В. Михалевич, В.С. Михалевич, Сергієнко І.В. [5], розробка Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України);
- макроекономічна модель Києво-Могилянської академії, розроблена під керівництвом І.Г. Лук'яненко [6, 7];
- моделі прогнозування, які ґрунтуються на методі групового врахування аргументів; розроблений у Кібернетичному центрі НАН України О.Г. Івахненком та його учнями [8–10];
- макроекономічна модель Міжнародного центру перспективних досліджень, Міністерства економіки України та Національного банку України [11];
- макроекономічна модель Науково-дослідного економічного інституту Міністерства економіки України (автор А. О. Сігайов [12]);
- макроекономічна модель міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем ЮНЕСКО/МПІ НАН України та Міністерства освіти і науки України, подана низкою економетричних моделей «УКРМАКРО» (автори О. Бакаєв, Г. Бондаренко, І. Лукінов [13]);
- довгострокова економетрична модель економічного зростання у перехідних економіках (розроблена співробітниками Міжнародного валютного фонду О. Гаврилишиним, І. Изворські, Р. Рооденом [14]);
- макроекономічна модель центру соціальних та економічних досліджень (CASE); автори-розробники М. Гроніцкі, Я. Ширмер, К. П'єтка [15, 16];
- модель макроекономіки України «Альфа», що розроблена в державному НДІ інформатизації та моделювання економіки Міністерства економіки України та розвивається в Національному інституті стратегічних досліджень при Президентові України й Інституті економіки промисловості України (автор Ю.М. Харазішвілі [17, 18]).

Аналізуючи праці [1–18], можна констатувати, що в Україні сформувалися такі два основні підходи до макроекономічного моделювання:

- 1) застосування різних варіантів регресійного аналізу та побудова регресійних (лінійних та нелінійних) рівнянь для моделювання тих чи інших економічних змінних на основі передісторії з наступною екстраполяцією;
- 2) моделювання соціально-економічних процесів на базі аналітичних (точних) залежностей із застосуванням сучасних економічних теорій, що відображають функціональні зв'язки між показниками. Головною та найважливішою перевагою аналітичних методів є невідривність від самого об'єкта прогнозування.

Переважає більшість установ, які здійснюють макроекономічний аналіз та прогнозування, використовує перший підхід, тобто такий, який базується на застосуванні часових рядів макропоказників і поліномів, побудованих на їх основі. Зауважимо, що для макроекономіки перехідного періоду значення і роль передісторії дещо знижуються, що зумовлено, особливо в короткостроковому періоді, швидкими кардинальними змінами економічного, ринково-кон'юнктурного, соціально-політичного характеру. Утім не підлягає запереченню використання методів регресійного аналізу і прогнозування на основі передісторії, які можна і потрібно застосовувати

для знаходження значень змінних і параметрів та для яких неможливо встановити модельні зв'язки, зокрема в умовах перехідних економік.

У працях [19–22] запропоновано нові методи аналізу об'єктів, які можна подати складними багаторозмірними табличними структурами (матрицями), і проводиться дослідження сучасного математичного апарату, що дозволяє оперувати із цими структурами. Зокрема, у працях [20–22] В.С. Донченком та його учнями запропоновано концепцію кортежних операторів, що дає змогу перенести техніки сингулярного розкладу і псевдообернення на евклідові простори матриць фіксованої розмірності.

Таким чином, для розв'язання задач прогнозування запропоновано до розгляду клас матричних функцій набору матричних аргументів — матричну множинну регресію [21]. У процесі розвитку концепції кортежних операторів [20–22] розроблено математичний апарат сингулярного розкладу і техніки псевдообернення за Муром–Пенроузом, що дозволило поставити і конструктивно розв'язати задачу оцінювання методом найменших квадратів для множинної матричної регресії. Зокрема, запропоновано алгоритм оцінювання методом найменших квадратів для вектора невідомих параметрів згаданого класу матричних функцій [21]. Оскільки для економічних завдань природними представниками досліджуваних об'єктів є табличні структури, наприклад, таблиці показників за роками, кварталами чи місяцями, то запропоновані методи можна успішно застосовувати для прогнозування економічних показників.

Мета дослідження — з'ясувати можливість використання запропонованого у праці [21] алгоритму на основі матричної множинної регресії для розв'язання задач прогнозування макроекономічних показників з прийнятною для планування точністю.

Емпіричними даними для розрахунків стали дані Державної служби статистики України про такі макроекономічні показники: внутрішній валовий продукт, оплата праці найманих працівників, кінцеві споживчі витрати, експорт товарів та послуг, імпорт товарів та послуг.

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ МЕТОДУ ПРОГНОЗУВАННЯ НА ОСНОВІ МАТРИЧНОЇ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ

Теоретичні основи методу аналізу та прогнозування об'єктів, що виражені матрицями, детально подано у працях [20–22].

Отже, нехай маємо M матриць спостережень: X_1, X_2, \dots, X_M .

Формуємо матричні пари, що задають вхідні та вихідні дані моделі: $(O_1, Y_1), (O_2, Y_2), \dots, (O_N, Y_N)$, де $Y_i, i = \overline{1, N}$ — відгуки прогнозу, $Y_i = X_{K+i}, i = \overline{1, N}$, а $O_i, i = \overline{1, N}$ — матричні кортежі-рядки, які називатимемо основами (опорами) прогнозу: $O_1 = (X_1 : \dots : X_K)$, $O_2 = (X_2 : \dots : X_{K+1}), \dots$, $O_N = (X_N : \dots : X_{K+N-1})$; $M > N + K$, K — довжина основи.

Множинну матричну регресію з матричними значеннями визначимо таким чином [21]: як матричну функцію Y матричного кортежу-рядка $\alpha_{1,K} = (X_1 : \dots : X_K)$, $X_k \in R^{m \times n}$, $k = \overline{1, K}$ такого вигляду $Y(\alpha_{1,K}) = \beta_1 X_1 + \dots + \beta_K X_K$, $\beta_k \in R^1$, $k = \overline{1, K}$, що визначаються на основі спостере-

жень $(\alpha_{1,K}^{(i)}, Y_i), i = \overline{1, N}$, де $\alpha_{1,K}^{(i)}, i = \overline{1, N}$ — i -та компонента матричного кортежу-рядка $\alpha_{1,K} = (X_1 \dotsc X_K)$.

Аналогічно до праць [21, 22] визначимо оператор $\wp_{\alpha_{N,K}} : R^K \rightarrow R^{N,m \times n}$ — матричний кортежний оператор з евклідового простору R^K в евклідові простір стовпчикових кортежів довжини N з матриць розмірності $m \times n$ і покомпонентним скалярним добутком для стовпчикових кортежів

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_N \end{pmatrix} \in R^{N,m \times n}, \chi_2 = \begin{pmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_N \end{pmatrix} \in R^{N,m \times n} \text{ у такому вигляді: } (\chi_1, \chi_2)_{N,m \times n} = \sum_{i=1}^N (A_i, B_i)_{tr}, \text{ а } \wp_{\alpha_{N,K}}^* : R^{N,m \times n} \rightarrow R^K \text{ — оператор, спряжений до } \wp_{\alpha_{N,K}}.$$

АЛГОРИТМ ПРОГНОЗУВАННЯ ПОКАЗНИКІВ

1. Побудова стовпчикових «компонентних» кортежів $\chi_j, j = \overline{1, K}, \chi_Y$:

$$\chi_j = \begin{pmatrix} O_1^{(j)} \\ O_2^{(j)} \\ \dots \\ O_N^{(j)} \end{pmatrix}, \text{ де } O_i^{(j)} \text{ — } j\text{-та компонента } O_i, i = \overline{1, N}, \chi_Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_N \end{pmatrix} \text{ — ма-}$$

тричний стовпчиковий кортеж, отриманий зі значень спостережень $Y_i, i = \overline{1, N}$.

2. Побудова матриці Грама \mathbf{F} стовпчикових «компонентних» кортежів $\mathbf{F} = (\chi_i, \chi_j)_{i,j=\overline{1,K}}$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} (\chi_1, \chi_1) & (\chi_1, \chi_2) & \dots & (\chi_1, \chi_K) \\ (\chi_2, \chi_1) & (\chi_2, \chi_2) & \dots & (\chi_2, \chi_K) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\chi_K, \chi_1) & (\chi_K, \chi_2) & \dots & (\chi_K, \chi_K) \end{pmatrix},$$

де $(\chi_i, \chi_j)_{i,j=\overline{1,K}}$ — «скалярний» добуток матричних кортежів, який визначається покомпонентним скалярним добутком відповідних матриць.

Зауваження: для матриць $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ скалярний добуток визначається так: $(A, B) = \sum_{i=1, m, j=1, n} a_{ij} b_{ij} = tr A^T B$.

3. Розв’язання задачі на власні значення для \mathbf{F} . Обчислення ненульових сингулярностей $(v_i, \lambda_i^2), i = \overline{1, r}, r = rank \mathbf{F}$ матриці Грама \mathbf{F} стовпчикових «компонентних» кортежів.

Зауваження: ненульові сингулярності (v_i, λ_i^2) , $i = \overline{1, r}$ записуємо у відповідності до зростання власних значень.

4. Обчислення власних кортежів $\psi_i : \psi_i = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{k=1}^K \chi_k v_{ki}$, $i = \overline{1, r}$ оператора

$$\mathcal{P}_{\alpha_{N,K}} \mathcal{P}_{\alpha_{N,K}}^*$$

5. Обчислення скалярних добутків $sk_i = (\psi_i, \chi_Y)_{N, m \times n}$, $i = \overline{1, r}$.

6. Обчислення $\hat{\beta}$ за формулою $\hat{\beta} = \sum_{k=1}^r \lambda_k^{-1} v_k (\psi_k, \chi_Y)_{N, m \times n}$.

7. Обчислення прогнозової функції $\hat{Y} = \sum_{k=1}^K \hat{\beta}_k X_{N+k}$, $X_i \in R^{m \times n}$, $i = \overline{1, K}$.

ЕМПІРИЧНІ ДАНІ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ

Для розглянутих у роботі прикладів використано статистичні дані Державної служби статистики України із квартальною дискретизацією [23]. Зокрема, у табл. 1 – 5 подано значення валового внутрішнього продукту (ВВП), оплати праці найманих працівників (ОПНП), кінцевих споживчих витрат (КСВ), експорту (Е) та імпорту (І) за 2007 – 2016 рр. (квартальні дані у фактичних цінах).

Таблиця 1. Значення 5 показників поквартально за 2007 – 2008 рр. (млн грн)

Показник	I	II	III	IV	I	II	III	IV
	2007	2007	2007	2007	2008	2008	2008	2008
ВВП	139444	166869	199535	214883	191459	236033	276451	244113
ОПНП	69078	82021	91922	108915	100492	116441	121522	132009
КСВ	112494	130245	140935	174907	161565	182154	194262	220921
Е	67513	79664	88491	87537	88516	116640	132177	107526
І	76022	85992	93895	108464	110802	135800	144433	129553

Таблиця 2. Значення 5 показників поквартально за 2009 – 2010 рр. (млн грн)

Показник	I	II	III	IV	I	II	III	IV
	2009	2009	2009	2009	2010	2010	2010	2010
ВВП	189028	214103	250306	259908	217286	256754	301251	307278
ОПНП	99206	111616	114251	126270	114062	133690	139108	153791
КСВ	172426	188041	196074	216285	194511	216027	232397	271295
Е	86994	95390	114962	126218	112105	134553	145563	157144
І	92892	96846	116057	133065	114550	131242	156102	179050

Таблиця 3. Значення 5 показників поквартально за 2011 – 2012 рр. (млн грн)

Показник	I 2011	II 2011	III 2011	IV 2011	I 2012	II 2012	III 2012	IV 2012
ВВП	261878	314620	376019	364083	293493	349212	387620	378564
ОПНП	135831	155367	158186	178727	158145	180432	179944	199638
КСВ	236580	268688	285548	314385	272970	311851	328173	356607
Е	156545	179626	184258	187524	165810	181413	188467	181657
I	173046	187916	202131	215935	186323	215091	214364	219616

Таблиця 4. Значення 5 показників поквартально за 2013 – 2014 рр. (млн грн)

Показник	I 2013	II 2013	III 2013	IV 2013	I 2014	II 2014	III 2014	IV 2014
ВВП	303753	354814	398000	408631	316 905	382391	440476	447143
ОПНП	163364	183339	180058	203892	169 089	186692	188225	190937
КСВ	285787	330494	341854	371497	304 578	352472	351349	421560
Е	149357	152499	162010	165535	151 712	202040	204937	212440
I	172928	173944	212798	205060	162 853	210717	216959	236235

Таблиця 5. Значення 5 показників поквартально за 2015 – 2016 рр. (млн грн)

Показник	I 2015	II 2015	III 2015	IV 2015	I 2016	II 2016	III 2016	IV 2016
ВВП	375991	456715	566997	588841	455637	535324	669170	723051
ОПНП	166364	194932	195389	220961	192014	220039	224611	240612
КСВ	345298	404693	429804	529418	438528	470927	508831	600568
Е	249852	250632	266601	278843	251845	283191	299323	340266
I	261354	252318	274856	294910	294328	292715	351084	385000

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ ЗА АЛГОРИТМОМ ДЛЯ РІЗНИХ ВАРІАНТІВ ГРУПУВАННЯ СПОСТЕРЕЖУВАНИХ ДАНИХ

На підставі даних табл. 1 очевидним чином формуємо матриці спостережень X_1 та X_2, \dots , на підставі даних табл. 5 – матриці X_9 і X_{10} .

Маємо 10 матриць спостережень: X_1, X_2, \dots, X_{10} .

Поданий вище алгоритм реалізовано у середовищі Wolfram Mathematica і за ним виконано розрахунки для різних варіантів групування даних.

Далі наведемо детальну схему розрахунку першого варіанта, а в решті випадків подаватимемо лише вхідні дані та результуючі таблиці прогнозних значень показників.

Варіант 1

$$K = 3, N = 5;$$

$$O_1 = (X_1 X_2 X_3), Y_1 = X_4; O_2 = (X_2 X_3 X_4), Y_2 = X_5;$$

$$O_3 = (X_3 X_4 X_5), Y_3 = X_6; O_4 = (X_4 X_5 X_6), Y_4 = X_7;$$

$$O_5 = (X_5 X_6 X_7), Y_5 = X_8.$$

1. Побудова стовпчикових «компонентних» кортежів:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}; \chi_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}; \chi_Y = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислення матриці Грама:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3238471770363 & 3695301166916 & 3695301166916 \\ 3695301166916 & 4275319205765 & 4640650457122 \\ 4022783818779 & 4640650457122 & 5096736715966 \end{pmatrix}, r = \text{rank } \mathbf{F} = 3.$$

3. Обчислення ненульових сингулярностей матриці Грама \mathbf{F} стовпчикових «компонентних» кортежів:

$$v_1 = (0,481782; -0,802513; 0,351937), \lambda_1 = 147468,756;$$

$$v_2 = (-0,715427; -0,128307; 0,686805), \lambda_2 = 198378,243;$$

$$v_3 = (-0,506014; -0,582676; -0,635955), \lambda_3 = 3542517,005.$$

4. Обчислення власних кортежів $\psi_i, i = \overline{1, r}$. Отримуємо три власні кортежі-матриці розмірності 24×4 , які не наводимо у зв'язку з їх великим розміром.

5. Обчислення скалярних добутків:

$$sk_1 = 118985,393; sk_2 = 75188,228; sk_3 = -2478812,622.$$

6. Знаходження $\hat{\beta}$: $\hat{\beta} = (0,472; -0,288; 0,989)$.

7. Обчислення прогнозної функції:

Прогноз показників на 2015 р. (поквартально і за рік у цілому) подано в табл. 6.

Таблиця 6. Прогнозні значення 5 показників поквартально на 2015 р. (млн грн)

Показник	I 2015	II 2015	III 2015	IV 2015	У цілому 2015 р.
ВВП	364319,03	440654,63	503775,36	503033,39	1811782,41
ОПНП	194744,65	216909,02	219141,72	224238,91	855034,30
КСВ	347626,57	400450,07	403760,81	478079,33	1629916,78
Е	185209,21	241449,93	244899,63	248093,53	919652,29
I	199107,07	259732,61	254358,38	278136,40	991334,46

Варіант 2

$$K = 3, N = 6;$$

$$O_1 = (X_1 X_2 X_3), Y_1 = X_4; O_2 = (X_2 X_3 X_4), Y_2 = X_5;$$

$$O_3 = (X_3 X_4 X_5), Y_3 = X_6; O_4 = (X_4 X_5 X_6), Y_4 = X_7;$$

$$O_5 = (X_5 X_6 X_7), Y_5 = X_8; O_6 = (X_6 X_7 X_8), Y_6 = X_9.$$

Стовпчикові «компонентні» кортежі:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}; \chi_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}; \chi_Y = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{pmatrix}.$$

Результат обчислень за алгоритмом (прогноз значень показників на 2016 р.) наведено в табл. 7 (квартальні дані та за рік у цілому).

Таблиця 7. Прогнозні значення 5 показників поквартально на 2016 р. (млн грн)

Показник	I 2016	II 2016	III 2016	IV 2016	У цілому 2016 р.
ВВП	433695,44	518619,66	630096,81	655502,51	2237914,41
ОПНП	199021,37	232587,48	230267,10	269508,70	931384,65
КСВ	397228,75	464485,67	496709,00	584068,04	1942491,45
Е	277954,75	260259,57	280771,61	291889,10	1110875,03
І	299942,78	272343,05	316996,86	323553,21	1212835,89

Варіант 3

$$K = 4, N = 4;$$

$$O_1 = (X_1 X_2 X_3 X_4), Y_1 = X_5; O_2 = (X_2 X_3 X_4 X_5), Y_2 = X_6;$$

$$O_3 = (X_3 X_4 X_5 X_6), Y_3 = X_7; O_4 = (X_4 X_5 X_6 X_7), Y_4 = X_8.$$

Стовпчикові «компонентні» кортежі:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}; \chi_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}; \chi_4 = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}; \chi_Y = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}.$$

Прогноз на 2015 р. подається у табл. 8 (квартальні дані та за рік):

Таблиця 8. Прогнозні значення 5 показників поквартально на 2015 р. (млн грн)

Показник	I 2015	II 2015	III 2015	IV 2015	У цілому 2015 р.
ВВП	371635,11	456049,62	528706,34	515384,32	1871775,39
ОПНП	197063,78	220652,68	226220,82	226534,14	870471,42
КСВ	351978,00	402954,30	407662,26	491269,19	1653863,75
Е	202554,83	277783,02	278407,39	279384,65	1038129,88
І	212596,58	294916,31	266538,41	305262,57	1079313,86

Варіант 4

$$K = 4, N = 5;$$

$$O_1 = (X_1 X_2 X_3 X_4), Y_1 = X_5;$$

$$O_2 = (X_2 X_3 X_4 X_5), Y_2 = X_6;$$

$$O_3 = (X_3 X_4 X_5 X_6), Y_3 = X_7;$$

$$O_4 = (X_4 X_5 X_6 X_7), Y_4 = X_8;$$

$$O_5 = (X_5 X_6 X_7 X_8), Y_5 = X_9.$$

Стовпчикові «компонентні» кортежі:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}; \chi_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}; \chi_4 = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}; \chi_Y = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{pmatrix}.$$

Результат розрахунку за алгоритмом (прогноз значень відповідних показників на 2016 р.) подано у табл. 9 (квартальні дані та в цілому за рік).

Таблиця 9. Прогнозні значення 5 показників поквартально на 2016 р. (млн грн)

Показник	I 2016	II 2016	III 2016	IV 2016	У цілому 2016 р.
ВВП	450775,44	537064,93	648284,26	668516,46	2304641,08
ОПНП	205713,68	243697,16	240385,16	289982,96	979778,95
КСВ	407938,32	475514,47	518184,18	593590,41	1995227,38
Е	304062,75	268825,30	292743,44	298281,97	1163913,46
І	331339,33	292423,06	336455,97	337617,27	1297835,63

Варіант 5

$$K = 5, N = 3;$$

$$O_1 = (X_1 X_2 X_3 X_4 X_5), Y_1 = X_6;$$

$$O_2 = (X_2 X_3 X_4 X_5 X_6), Y_2 = X_7;$$

$$O_3 = (X_3 X_4 X_5 X_6 X_7), Y_3 = X_8.$$

Стовпчикові «компонентні» кортежі:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}; \chi_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}; \chi_4 = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}; \chi_5 = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}; \chi_Y = \begin{pmatrix} X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}.$$

Прогноз значень показників на 2015 р. (квартальні дані та в цілому за рік) як результат обчислень за алгоритмом подано в табл. 10.

Таблиця 10. Прогнозні значення 5 показників поквартально на 2015 р. (млн грн)

Показник	I 2015	II 2015	III 2015	IV 2015	У цілому 2015 р.
ВВП	320262,93	389877,65	458030,44	449476,61	1617647,64
ОПНП	168548,28	188293,25	191653,25	198948,83	747443,61
КСВ	301161,34	345971,84	351874,82	413788,92	1412796,91
Е	174465,46	227054,45	228378,01	232141,21	862039,14
І	187870,08	237520,45	232869,67	257369,89	915630,08

Варіант 6

$$K = 5, N = 4;$$

$$O_1 = (X_1 X_2 X_3 X_4 X_5), Y_1 = X_6; O_2 = (X_2 X_3 X_4 X_5 X_6), Y_2 = X_7;$$

$$O_3 = (X_3 X_4 X_5 X_6 X_7), Y_3 = X_8; O_4 = (X_4 X_5 X_6 X_7 X_8), Y_4 = X_9.$$

Стовпчикові «компонентні» кортежі:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}; \chi_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}; \chi_4 = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}; \chi_5 = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}; \chi_Y = \begin{pmatrix} X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{pmatrix}.$$

У результаті застосування алгоритму отримуємо прогноз значень показників на 2016 р. (квартальні дані та в цілому за рік), табл. 11.

Таблиця 11. Прогнозні значення 5 показників поквартально на 2016 р. (млн грн)

Показник	I 2016	II 2016	III 2016	IV 2016	У цілому 2016 р.
ВВП	402460,80	482792,18	566956,08	568345,28	2020554,34
ОПНП	196277,51	228834,31	228353,18	261436,26	914901,26
КСВ	368337,09	425160,03	455892,61	519157,90	1768547,64
Е	257878,01	258518,25	273517,80	272129,22	1062043,28
І	280807,45	288234,60	299236,38	310479,10	1178757,52

ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЕНЬ

Для визначення точності прогнозу показників використаємо формальний критерій точності (Absolute Percentage Error): $APE = \left| \frac{z - \hat{z}}{z} \right|$, де z — фактичне, а \hat{z} — прогнозне значення відповідного показника.

Для перевірки якості запропонованого методу використано ретроспективне оцінювання прогнозу. Загальноприйнятим є те, що значення APE , яке менше за 10%, відповідає високій точності прогнозу, а отже, і якості моделі чи підходу; від 10 до 20 % — добрій точності; від 20 до 50 % — задовільній; більше як 50 % — незадовільній.

Розраховані значення похибок прогнозу річних значень показників за вказаним критерієм для кожного з варіантів подано у табл. 12.

Таблиця 12. Точність прогнозу для 5 показників для різних варіантів групування даних

Показник	Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4	Варіант 5	Варіант 6
ВВП, %	8,89	6,10	5,87	3,30	18,65	15,22
ОПНП, %	9,95	6,17	11,94	11,68	3,88	4,29
КСВ, %	4,64	3,78	3,24	1,17	17,34	12,40
Е, %	12,07	5,43	0,75	0,91	17,58	9,58
І, %	8,50	8,34	0,38	1,91	15,49	10,91

Як бачимо з табл. 12, для варіанта 2 значення похибок менші за 10%, що відповідає високій точності прогнозу. Для інших варіантів похибки не перевищують 20%, що свідчить про добру точність прогнозу і, відповідно, якість методу прогнозування.

Таким чином, згідно з обчисленими значеннями критерію APE (від 0% до 20%) точність прогнозування вказаних економічних показників є доброю. Перевищення 10% значення похибки можна пояснити використанням статистичних даних кризових 2008 – 2009 рр., а також специфікою статистичних даних Державної служби статистики України: за 2011 – 2015 рр. використовуються дані без урахування тимчасово окупованої території АР Крим, м. Севастополя та частини зони проведення антитерористичної операції.

ВИСНОВКИ

У роботі розглядаються приклади застосування матричної множинної регресії для прогнозування макроекономічних показників. З метою розв'язання задачі оцінювання методом найменших квадратів для множинної матричної регресії використано розроблений математичний апарат сингулярного розкладу і техніку псевдообернення за Муром–Пенроузом у межах розвитку концепції кортежних операторів.

Емпіричними даними для обчислень стали дані Державної служби статистики України за 2007 – 2016 рр. із квартальною дискретизацією. Розра-

хунки виконано у середовищі Wolfram Mathematica. Розглянуто декілька варіантів групування спостережуваних даних.

Згідно з обчисленими значеннями похибок прогнозу річних значень показників за критерієм APE для кожного з варіантів групування даних (від 0% до 20%), точність прогнозу і відповідно якість методу прогнозування вказаних економічних показників є доброю.

Таким чином, виконані розрахунки показують, що матрична множинна регресія може бути використана для розв'язання задач прогнозування макроекономічних показників з прийнятною для планування точністю.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гесць В.* Секторальні макромоделі прогнозування економіки України / В. Гесць, М. Скрипниченко, М. Соколик, С. Шумська // *Економіст*. — 1998. — №5. — С. 58–67.
2. *Моделі* ендогенного зростання економіки України / [ред. М.І. Скрипниченко]. — К.: ДУ «Ін-т економіки та прогнозування», 2007. — 576 с.
3. *Макроекономічне* моделювання за секторами національної економіки у програмно-аналітичному інструментарії «Макропрогноз економіки України» / В.М. Гесць, М.І. Скрипниченко // *Математичне моделювання в економіці: зб. наук. пр.* — 2013. — Вип. 1. — С. 116–129.
4. *Гуляницький Л.* Розробка моделей середньострокового прогнозування ВВП України / Л. Гуляницький, І. Сергієнко, Б. Панасюк // *Економіст*. — 1998. — № 5. — С. 68–71.
5. *Михалевич М.В.* Моделювання перехідної економіки. Моделі, методи, інформаційні технології / М.В. Михалевич, І.В. Сергієнко. — К.: *Наук. думка*, 2005. — 670 с.
6. *Лук'яненко І.Г.* Динамічні макроекономічні моделі. Новий концептуальний підхід / І.Г. Лук'яненко. — К.: Вид. дім «Києво-Могилянська академія», 2003. — 50 с.
7. *Лук'яненко І.Г.* Макрофінансова стабільність: моделі та методи оцінки: моногр. [Електронний ресурс] / І.Г. Лук'яненко, О.І. Фарина. — К.: НаУКМА, 2016. — 185 с. — Режим доступу: <http://www.ekmair.ukma.edu.ua/handle/123456789/10878>
8. *Івахненко О.* Індуктивні методи прогнозування та аналізу складних економічних систем / О. Івахненко, Г. Івахненко // *Економіст*. — 1998. — № 5. — С. 88–97.
9. *Степашко В.С.* Опыт применения системы АСТРИД для моделирования экономических процессов по статистическим данным / В.С. Степашко, Ю.В. Коппа // *Кибернетика и вычислительная техника*. — 1998. — № 117. — С. 24–31.
10. *Зайченко Ю.П.* Нечіткий метод групового врахування аргументів та його застосування в задачах прогнозування макроекономічних показників / Ю.П. Зайченко, О.Г. Кеббал, В.Ф. Крачковський // *Наук. вісті НТТУ «КПІ»*. — 2000. — № 2. — С. 18–26.
11. *Початкова* робоча модель для України: інформаційний бюлетень Міжнародного центру перспективних досліджень // *Вісник центру*. — № 154, 17 черв. 2002 р.
12. *Сігайов А.О.* Методичний та організаційний аспекти аналізу монетарних показників / А.О. Сігайов. — К.: *Наук. думка*, 2003. — 370 с.
13. *Бакаєв О.* Системи макроеконометричних моделей прогнозування економіки України / О. Бакаєв, Г. Бондаренко, І. Лукінов // *Економіст*. — 1998. — № 5. — С. 35–44.
14. *Havrylyshyn O.* Recovery and Growth During the Transition Economy / O. Havrylyshyn, Ivailo Izvorski and Ron van Rooden // *IMF Working paper WP*. — 1998. — 141 p.

15. *Гроніцкі М.* Альтернативні сценарії розвитку економіки України у 1998 – 1999 роках / М. Гроніцкі, Я. Ширмер, К. П'єтка // *Економіст*. — 1998. — № 5. — С. 72–76.
16. *Gronicki M.* Macroeconomic Models for Ukraine / М. Gronicki, К. Piêtka // *CASE Working paper*, 1999. — 56 p.
17. *Харазішвілі Ю.М.* Теоретичні основи системного моделювання соціально-економічного розвитку України: моногр. / Ю.М. Харазішвілі. — К.: ПоліграфКонсалтинг, 2007. — 324 с.
18. *Харазішвілі Ю.М.* Неформальна складова в структурі регіональної економіки: спроба моделювання та оцінки / Ю.М. Харазішвілі, Р.В. Прокопенко, В.І. Ляшенко // *Вісник економічної науки України*. — 2017. — № 1 (32). — С. 109–116.
19. *Donchenko V.* Vectors and matrixes least square method: foundation and application examples / V. Donchenko, I. Nazaraga, O. Tarasova // *International Journal Information Theories and Applications*. — 2013. — Vol. 20, N 4. — P.311–322.
20. *Donchenko V.* “Feature Vectors” in Grouping Information Problem in Applied Mathematics: Vectors and Matrixes / V. Donchenko, T. Zinko, F. Skotarenko // *Problems of Computer Intellectualization: international conference, Institute of Cybernetics NASU, ITHEA*. — Kyiv, Ukraine, – Sofia, Bulgaria. — 2012. — P. 111–124.
21. *Донченко В.С.* Матрична множинна регресія / В.С. Донченко, О.В. Тарасова // *Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки*. — 2015. — № 2. — С. 133–138.
22. *Донченко В.С.* Концепція кортежності для лінійних операторів та її реалізація для матричних кортежів / В.С. Донченко, Т.П. Зінько, Ф.М. Скотаренко // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. — 2015. — №3 (120). — С. 127–140.
23. *Офіційний сайт Державної служби статистики України [Електронний ресурс]*. — Режим доступу: <http://www.ukrstat.gov.ua>.

Надійшла 12.10.2017