УДК 519.86
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.1.03

АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ СТАНІВ РІВНОВАГИ ЗА УМОВИ ЗАЛЕЖНОСТІ СТРУКТУРИ СПОЖИВАННЯ ВІД ОБСЯГІВ ВИПУСКУ

А.П. МАХОРТ

Анотація. Доведено існування рівноваги в економічній системі з монополістами та споживчими уподобаннями, що формуються з урахуванням інформації про обсяги випуску товарів. Установлено умови на задані економічні характеристики, які гарантуватимуть розв'язність рівнянь рівноваги в заданій області значень. Указано алгоритми знаходження рівноважних характеристик. Розглянуто можливість оптимального вибору значень рівноважних характеристик. Оптимальність пов'язується з бажанням окремих суб'єктів економічної системи забезпечити якомога повніше задоволення своїх потреб. Знайдено граничні оцінки значень економічних характеристик, які дозволяють установити можливість досягнення станів рівноваги з вибраними властивостями.

Ключові слова: рівновага, попит, пропозиція, монополісти, ціноутворення.

ВСТУП

Дослідження економічних систем за допомогою рівноважних підходів дає змогу виявити інструменти і засоби впливу на них для реалізації сценаріїв функціонування із заданими властивостями. Зокрема, використання рівноваги вальрасового типу [1,2] дозволяє виявляти чинники, що призводять до порушення балансу між попитом і пропозицією товарів в економічній системі, та з'ясувати інтервали значень змінних характеристик економічної системи, які гарантуватимуть дотримання цього балансу. Дисбаланси пов’язані з розвитком процесів, що негативно діють на суб'єкти економічної системи. Поява таких процесів може бути наслідком взаємовідносин між суб'єктами економічної системи.

Формування споживчих уподобань суб'єктів економічної системи є одним з проявів взаємовідносин. На формування уподобань можуть впливати різні чинники, серед них і виробничі технології. З усіх складових виробничих технологій (в найширшому сенсі) тут йтиметься про обсяги товарів на ринку. Економічні обґрунтування вагомості цього чинника досить очевидні. Звернемо увагу лише на один із фактів, а саме: взаємозв'язок між певними типами товарів, використання яких відбувається в комплексі. Тому потреба у споживанні деяких типів товарів безпосередньо зумовлюється наявністю на ринку пов'язаних з ними товарів. Споживчі уподобання значною мірою впливають на умови встановлення рівноваги в економічній системі, а урахування того, чи іншого чинника може суттєво змінити характеристики станів рівноваги і процес ціноутворення в економічній системі.

Мета роботи — з’ясування впливу залежності коефіцієнтів споживання, що описують споживчі уподобання суб'єктів економічної системи, від обсягів випуску продукції на умови встановлення рівноваги економічної системи, з урахуванням інших чинників впливу в економічній системі, таких як монополізм.

Будемо визначати ті характеристики станів рівноваги економічної системи, перебування в яких буде прийнятним за рівнем споживання для всіх суб'єктів економічної системи.

У раніше розглянутих спробах розв'язати поставлену задачу [3] виникли додаткові припущення про розміщення ненульових елементів матриці попиту, яка складається з коефіцієнтів споживання. У дослідженні використовуватимемо альтернативний підхід до розв'язання задачі, щоб уникнути таких припущень.

ОПИС МОДЕЛІ ЕКОНОМІКИ

Нехай економічна система утворена сукупністю l суб'єктів, кожен з яких є споживачем товарів. Усього $n < l$ різновидів товарів, а їх обсяг виробництва характеризує вектор випусків $x = \{x_i\}_{i=1}^{n}$. Споживчі уподобання суб'єктів економічної системи задаватиме матриця попиту $C(x) = \left\| c_{kj}(x) \right\|_{k=1,\, j=1}^{n,\quad l}$ із залежними від обсягів випуску товарів елементами. Споживачів в економічній системі вважатимемо ненасичуваними (вони мають намір витрачати весь свій прибуток на придбання нових товарів). Матричний елемент $c_{kj}(x)$ визначає кількість k-го товару, яку бажає придбати j-й споживач, якщо обсяг випуску товарів задають компоненти вектора x. Очевидно, для кожного ненасичуваного споживача існує мінімальний набір необхідних йому товарів. Потреба у нових товарах, як і прибуток суб'єктів економічної системи, не є необмеженими, тому є і верхня межа споживчих інтересів. Цілком слушно вважати, що для елементів матриці попиту $C(x)$ справедливі оцінки $c_{kj}^0 \ge c_{kj}(x) \ge c_{kj}^1$, а також $\forall\, k = \overline{1, n}\ \ \exists\, j \in [1, l]:\ c_{kj}^1 \ne 0$. Останнє означатиме, що мінімальний набір товарів не повинен бути нульовим (інакше споживач не буде ненасичуваним).

Вважатимемо, що в економічній системі наявні n суб'єктів, які виробляють один з можливих типів товарів для підтримування свого функціонування. Решта $l - n$ суб'єктів економічної системи функціонують за рахунок зовнішніх надходжень. Ці надходження можуть бути сформовані в результаті оподаткування прибутків. Відповідно вектор $\pi = \{\pi_i\}_{i=1}^{n}$ вказуватиме рівні оподаткування суб'єктів економічної системи. Економічна система відкрита, і її суб'єкти можуть як отримувати додаткові обсяги товарів ззовні, так і експортувати частину своїх товарів. Таку взаємодію із зовнішнім оточенням задаватимуть вектори експорту $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ та імпорту $\{i_i\}_{i=1}^{n}$. Серед виробників товарів є $n - t$ монополістів. Виробники отримують свій прибуток в результаті певної виробничої діяльності. Їх рішення використовувати один з можливих технологічних процесів для виготовлення обраного типу товарів описуватиме матриця $\left\| a_{kj} + b_{kj} / x_j \right\|_{k,\, j=1}^{n}$. Елементи технологічної матриці задають ті витрати, які потрібні для виробництва одиниці випуску товару в натуральних показниках з урахуванням постійних витрат, що скеровуються на підтримання функціонування самого виробництва. Крім виготовлення власних нових товарів, суб'єкти економічної системи можуть володіти також і деяким запасом раніше вироблених товарів, як своїх, так і виготовлених іншими виробниками. Структуру запасу товарів в економічній системі характеризують елементи матриці $\left\| b_{kj}^1 \right\|_{k,j=1}^n$. Її елементи b_{kj}^1 вказують на кількість запасу k-го товару у j-го суб'єкта економічної системи.

ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

У моделі задаватимемо складові технологічної матриці $\left\| a_{kj} \right\|_{k,j=1}^n$, $\left\| b_{kj} \right\|_{k,j=1}^n$, елементи матриць $C^0 = \left\| c_{kj}^0 \right\|_{k=1,\,j=1}^{n,\ \ l}$ і $C^1 = \left\| c_{kj}^1 \right\|_{k=1,\,j=1}^{n,\ \ l}$, які визначають граничні споживчі набори товарів суб'єктів економічної системи. Відомі і елементи матриці $\left\| b_{kj}^1 \right\|_{k,j=1}^n$. Весь запас товарів його власник може виставляти на продаж. Виняток становитимуть хіба що товари монополістів. Сенс монополізму полягає в тому, що їх товари не можуть виставлятись на продаж іншими суб'єктами, унаслідок чого відповідні елементи матриці запасу товарів мають бути нульовими. Згідно з економічними реаліями стратегія оподаткування, що описується вектором $(\pi_1^0, \ldots, \pi_t^0)$, має бути визначеною. Щодо рівнів оподаткування монополістів $(\pi_{t+1}, \ldots, \pi_n)$, то вони можуть розглядатись як важіль впливу на монополістів і залежати від стану рівноваги, у якому перебуватиме економічна система. Регулювання зовнішньоекономічної діяльності потребує фіксованих обсягів експорту $(e_1^0, \ldots, e_n^0)$ та імпорту товарів $(i_1^0, \ldots, i_n^0)$. Стратегії поведінки виробників, крім заданих технологічних коефіцієнтів, передбачають певне додаткове планування їх діяльності. Для монополістів це означає, що вони самостійно здатні контролювати рівень цін своїх товарів $(p_{t+1}^0, \ldots, p_n^0)$. Решта виробників здійснюють планування контролем значень обсягів випуск своїх товарів $(x_1^0, \ldots, x_t^0)$.

Із досягненням рівноваги в економічній системі встановлюватиметься баланс між попитом на товари і їх пропозицією. Рівновага економічної системи з указаними характеристиками описується рівняннями [1, 3]:

$$\sum_{j=1}^{l} c_{kj}(x) y_j = x_k - \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i - \sum_{i=1}^{n} b_{ki} + \sum_{i=1}^{n} b_{ki}^1 - e_k + i_k, \quad k = \overline{1,n}; \tag{1}$$

$$\pi_j x_j \left(p_j - \sum_{k=1}^{n} a_{kj} p_k \right) - \pi_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj} p_k +$$

$$+ \pi_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^1 p_k = y_j \sum_{s=1}^{n} c_{sj}(x) p_s, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Система рівнянь (1), (2) задає рівність попиту і пропозиції в економічній системі. За її допомогою можна визначити всі ймовірні стани рівноваги з прибутковим виробництвом суб'єктів економічної системи [1]. Характеристиками різних станів рівноваги будуть вектори $\{p_i\}_{i=1}^{t}$, $\{\pi_i\}_{i=t+1}^{n}$, $\{x_i\}_{i=t+1}^{n}$ і $\{y_i\}_{i=1}^{l}$. Саме стосовно цих векторів і розв'язуватимемо систему рівнянь (1), (2) з рештою заданих величин. Серед станів рівноваги одні є прийнятними для всіх споживачів, інші можуть бути для них небажаними. Вважатимемо, що прийнятні стани рівноваги визначаються значеннями ступенів задоволення потреб споживачів і компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^{l}$ мають належати інтервалу $y^m \le y_i \le y^M$, $i = \overline{1,l}$.

ОПТИМАЛЬНІ СТУПЕНІ ЗАДОВОЛЕННЯ ПОТРЕБ СПОЖИВАЧІВ

Вважатимемо матрицю $A = \left\| a_{jk} \right\|_{j,k=1}^{n}$ продуктивною. Тоді із системи рівнянь (1) для частини індексів отримаємо вираз

$$\sum_{s=1}^{n} (E - A)_{ks}^{-1} \tilde{z}_s^1 = \tilde{b}_k^0, \quad k = \overline{1,t}, \tag{3}$$

де введено нові невідомі величини

$$\tilde{z}_i^1 = \sum_{j=1}^{l} c_{ij}(x) y_j, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Права частина виразу (3) буде заданою

$$\tilde{b}_k^0 = x_k^0 - \sum_{s=1}^{n} (E - A)_{ks}^{-1} \left[e_s - i_s + \sum_{j=1}^{n} b_{sj} - \sum_{i=1}^{n} b_{si}^1 \right], \quad k = \overline{1,t}.$$

Для решти індексів маємо

$$x_k = \sum_{s=1}^{n} (E - A)_{ks}^{-1} \tilde{z}_s^1 + \sum_{s=1}^{n} (E - A)_{ks}^{-1} \times$$

$$\times \left[e_s - i_s + \sum_{j=1}^{n} b_{sj} - \sum_{i=1}^{n} b_{si}^1 \right], \ k = \overline{t+1,n}, \tag{5}$$

Функціональну залежність величин $\tilde{z}_s^1$, $s = \overline{1,n}$ від вектора x тимчасово не братимемо до уваги і розглядатимемо їх як незалежні змінні. Якщо із системи рівнянь (3) визначити вектор $\tilde{z}^1 = \{\tilde{z}_s^1\}_{s=1}^{n}$, то за ним з підсистеми рівнянь (5) можна однозначно визначити і невідомі обсяги випуску продукції монополістів $\{x_i\}_{i=t+1}^{n}$. Але у виразі (3) невідомих більше ніж рівнянь. У цьому випадку для вектора $\tilde{z}^1 = \{\tilde{z}_s^1\}_{s=1}^{n}$ можна застосувати параметричне подання розв'язку. Такого типу параметричне подання згідно з працею [1] описуватиме всі можливі додатні розв'язки задачі вигляду (3) стосовно вектора $\tilde{z}^1$. Щоб використати це подання, необхідно виконати певні вимоги. Для зменшення кількості параметрів потрібно щоби ранг матриці $\left\|(E-A)^{-1}_{ks}\right\|^{t,n}_{k,s=1}$ дорівнював t. Із припущення про продуктивність матриці $A=\left\|a_{jk}\right\|^{n}_{j,k=1}$ випливатиме існування невиродженої матриці $\left\|(E-A)^{-1}_{ks}\right\|^{t}_{k,s=1}$ [4]. Далі слід вимагати, щоб елементи оберненої до неї матриці $\left\|H^{0}_{ki}\right\|^{t}_{k,i=1}$ задовольняли нерівності

$$(\widetilde{b}^{0},H^{0}_{i})=\sum_{s=1}^{t}\widetilde{b}^{0}_{s}H^{0}_{si}>0,\quad i=\overline{1,t}.$$

Тоді можна записати параметричний розв'язок $\widetilde{z}^{1}=\widetilde{z}^{1}(\widetilde{\gamma})$ рівняння (3):

$$\widetilde{z}^{1}(\widetilde{\gamma})=\Big\{(\widetilde{b}^{0},H^{0}_{1})-\sum_{j=t+1}^{n}(d_{j},H^{0}_{1})\widetilde{\gamma}_{j}\widetilde{z}^{*}_{j},\ldots,(\widetilde{b}^{0},H^{0}_{t})-$$

$$-\sum_{j=t+1}^{n}(d_{j},H^{0}_{t})\widetilde{\gamma}_{j}\widetilde{z}^{*}_{j},\widetilde{\gamma}_{t+1}\widetilde{z}^{*}_{t+1},\ldots,\widetilde{\gamma}_{n}\widetilde{z}^{*}_{n}\Big\},\tag{6}$$

У виразі (6)

$$(d_{k},H^{0}_{i})=\sum_{s=1}^{t}(E-A)^{-1}_{sk}H^{0}_{si},\quad k=\overline{t+1,n},$$

для заданого додатного вектора $\widetilde{z}^{*}=\{\widetilde{z}^{*}_{i}\}^{n}_{i=t+1}$ мають виконуватись вимоги

$$(\widetilde{b}^{0},H^{0}_{k})\geq(d_{j},H^{0}_{k})\widetilde{z}^{*}_{j},\quad j=\overline{t+1,n},\quad k=\overline{1,t},$$

а компоненти вектора параметрів $\widetilde{\gamma}=(\widetilde{\gamma}_{t+1},\ldots,\widetilde{\gamma}_{n})$ належатимуть множині Γ^{*}, яка задається обмеженнями

$$(\widetilde{b}^{0},H^{0}_{k})>\sum_{j=t+1}^{n}(d_{j},H^{0}_{k})\widetilde{\gamma}_{j}\widetilde{z}^{*}_{j},\quad k=\overline{1,t};$$

$$\widetilde{\gamma}_{i}>0,\quad i=\overline{t+1,n};$$

$$\sum_{j=t+1}^{n}\widetilde{\gamma}_{j}+\widetilde{\gamma}_{n+1}=1.$$

Параметр $\widetilde{\gamma}_{n+1}$ відіграє роль масштабного доданка, тому він може бути і від'ємним. Якщо з рівняння (5) за вектором $\widetilde{z}^{1}(\widetilde{\gamma})$ визначити рівноважний вектор обсягів випуску товарів монополістами $\{x_{i}\}^{n}_{i=t+1}$, його компоненти залежатимуть від вибору вектора параметрів $\widetilde{\gamma}$. Через функціональну залежність елементів матриці попиту $C(x)$ від вектора x тепер вони теж залежатимуть від вектора $\widetilde{\gamma}$. Позначимо:

$$c^{*}_{kj}(\widetilde{\gamma})=c_{kj}(x),\quad k=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,l}.$$

Як і для елементів матриці $C(x)$, для елементів матриці $\left\| c_{kj}^*(\widetilde{\gamma}) \right\|_{k=1,\, j=1}^{n,\ \ l}$ мають зберегтися обмеження

$$c_{kj}^0 \ge c_{kj}^*(\widetilde{\gamma}) \ge c_{kj}^1, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,l}, \quad \widetilde{\gamma} \in \Gamma^*. \tag{7}$$

Урахуємо тепер зв'язок (4) між величинами $\widetilde{z}_s^1(\widetilde{\gamma})$, $s = \overline{1,n}$ і компонентами вектора x, унаслідок чого отримаємо рівняння для знаходження рівноважних значень ступенів задоволення потреб споживачів

$$\sum_{j=1}^{l} c_{ij}^*(\widetilde{\gamma}) y_j = \widetilde{z}_i^1(\widetilde{\gamma}), \quad i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Очевидно, що область значень компонентів вектора y залежить від того, якими будуть вибрані значення компонентів вектора параметрів $\widetilde{\gamma}$ з множини Γ^*. Сама ж система рівнянь (8) не дає змоги однозначно визначити компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^{l}$. З'ясуємо, чи можна визначати характеристики, прийнятні для суб'єктів економічної системи, ґрунтуючись на принципах оптимальності. Визначити прийнятні значення ступенів задоволення потреб споживачів, тобто з інтервалу $y^m \le y_i \le y^M$, $i = \overline{1,n}$, можна, розв'язавши екстремальну задачу за фіксованого вектора $\widetilde{\gamma}$ з множини Γ^*

$$\min_{(y_1,\ldots,y_n)} \widetilde{\mathcal{F}}^0(\widetilde{\gamma}), \quad \widetilde{\mathcal{F}}^0(\widetilde{\gamma}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} [\beta_j(\widetilde{\gamma}) - y_j]^2, \tag{9}$$

з урахуванням рівностей (8) як додаткових вимог. Використаємо раніше отримані результати [5]. Тоді величини $\{\beta_i(\widetilde{\gamma})\}_{i=1}^{n}$ задаватимемо виразами

$$\beta_s(\widetilde{\gamma}) = \Delta_1 \alpha_s + \sum_{k=1}^{t} \alpha_k c_{ks}^*(\widetilde{\gamma}), \quad s = \overline{1,t},$$

$$\beta_s(\widetilde{\gamma}) = \Delta_0 \alpha_s^1 + \sum_{k=1}^{t} \alpha_k c_{ks}^*(\widetilde{\gamma}), \quad s = \overline{t+1,n},$$

а задачу (9) розв'язуватимемо за додаткових вимог

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj}^*(\widetilde{\gamma}) y_j + \Delta_1 y_k = \Delta_0 \widetilde{z}_k^1(\widetilde{\gamma}), \quad k = \overline{1,t}. \tag{10}$$

Відповідно до результатів [5] значення ступенів задоволення потреб споживачів $(y_1,\ldots,y_n)$, які розв'язуватимуть екстремальну задачу (9), (10), описуватимуться рівняннями

$$y_s = \Delta_1(\alpha_s - \lambda_s) + \sum_{k=1}^{t} (\alpha_k - \lambda_k) c_{ks}^*(\widetilde{\gamma}), \quad s = \overline{1,t}; \tag{11}$$

$$y_s = \Delta_0 \alpha_s^1 + \sum_{k=1}^{t} (\alpha_k - \lambda_k) c_{ks}^*(\widetilde{\gamma}), \quad s = \overline{t+1,n}, \tag{12}$$

де величини $\{\alpha_i - \lambda_i\}_{i=1}^{t}$ будуть розв'язком операторного рівняння

$$\alpha_k - \lambda_k = \widetilde{\Theta}_k^{\widetilde{\gamma}}(\widetilde{\gamma}, \alpha_1 - \lambda_1, \ldots, \alpha_t - \lambda_t), \quad k = \overline{1,t}; \tag{13}$$

$$\widetilde{\Theta}_k^{\widetilde{\gamma}}(\widetilde{\gamma}, \alpha_1 - \lambda_1, \ldots, \alpha_t - \lambda_t) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(\widetilde{z}_k^1(\widetilde{\gamma}) - \sum_{s=t+1}^{n} c_{sk}^*(\widetilde{\gamma})\alpha_s^1\right) -$$

$$-\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t} c_{kj}^*(\widetilde{\gamma})(\alpha_j - \lambda_j) + \sum_{j=1}^{t} c_{jk}^*(\widetilde{\gamma})(\alpha_j - \lambda_j)\right) -$$

$$-\frac{1}{\Delta_1^2}\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} c_{ki}^*(\widetilde{\gamma})c_{ji}^*(\widetilde{\gamma})\right](\alpha_j - \lambda_j), \quad k = \overline{1,t}.$$

За кожного фіксованого вектора $\widetilde{\gamma} = \left(\widetilde{\gamma}_{t+1}, \ldots, \widetilde{\gamma}_n\right)$, $\widetilde{\gamma} \in \Gamma^*$ у рівняннях (10)–(13) сталі Δ_0, Δ_1 є заданими, їх значення вибираються з умов

$$\left(\sum_{j=n+1}^{l} c_{kj}^*(\widetilde{\gamma}) - \Delta_1\right)(\widetilde{z}_k^1(\widetilde{\gamma}) - \Delta_0 \widetilde{z}_k^1(\widetilde{\gamma})) > 0, \quad k = \overline{1,t},$$

$$y^m\left|\sum_{j=n+1}^{l} c_{kj}^*(\widetilde{\gamma}) - \Delta_1\right| \le \left|\widetilde{z}_k^1(\widetilde{\gamma}) - \Delta_0 \widetilde{z}_k^1(\widetilde{\gamma})\right| \le y^M\left|\sum_{j=n+1}^{l} c_{kj}^*(\widetilde{\gamma}) - \Delta_1\right|, \quad k = \overline{1,t},$$

Заданими є і сукупність параметрів $\{\alpha_{t+1}^1, \ldots, \alpha_n^1\}$. Для існування розв'язку зі встановленими обмеженнями на вектор ступенів задоволення потреб споживачів достатньо виконати такі умови: для величин σ^m, σ^M, вибраних з оцінок

$$y^m \le \sigma^m\left(\Delta_1 + \sum_{k=1}^{t} c_{ks}^*(\widetilde{\gamma})\right) \le \sigma^M\left(\Delta_1 + \sum_{k=1}^{t} c_{ks}^*(\widetilde{\gamma})\right) \le y^M, \quad s = \overline{1,t};$$

$$y^m - \Delta_0\alpha_s^1 \le \sigma^m \sum_{k=1}^{t} c_{ks}^*(\widetilde{\gamma}) \le \sigma^M \sum_{k=1}^{t} c_{ks}^*(\widetilde{\gamma}) \le y^M - \Delta_0\alpha_s^1, \quad s = \overline{t+1,n},$$

і сталих Δ_0, Δ_1 справедливі нерівності

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(\widetilde{z}_s^1(\widetilde{\gamma}) - \sum_{k=t+1}^{n} c_{ks}^*(\widetilde{\gamma})\alpha_k^1\right) - \frac{\sigma^m}{\Delta_1^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{t} c_{sk}^*(\widetilde{\gamma}) \times\right.$$

$$\left.\times c_{ik}^*(\widetilde{\gamma}) + \Delta_1\sum_{i=1}^{t} c_{si}^*(\widetilde{\gamma}) + \Delta_1\sum_{i=1}^{t} c_{is}^*(\widetilde{\gamma})\right) \le \sigma^M, \quad s = \overline{1,t};$$

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(\widetilde{z}_s^1(\widetilde{\gamma}) - \sum_{k=t+1}^{n} c_{ks}^*(\widetilde{\gamma})\alpha_k^1\right) - \frac{\sigma^M}{\Delta_1^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{t} c_{sk}^*(\widetilde{\gamma}) \times\right.$$

$$\left.\times c_{ik}^*(\widetilde{\gamma}) + \Delta_1\sum_{i=1}^{t} c_{si}^*(\widetilde{\gamma}) + \Delta_1\sum_{i=1}^{t} c_{is}^*(\widetilde{\gamma})\right) \ge \sigma^m, \quad s = \overline{1,t}.$$

Виникає питання як вибирати вектор $\widetilde{\gamma}$ з множини Γ^*. Припустімо, що він має бути розв'язком системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj}^{*}(\widetilde{\gamma}) y_j + \Delta_1 y_k = \Delta_0 \widetilde{z}_k^1(\widetilde{\gamma}), \quad k = \overline{t+1, n}. \tag{14}$$

або відповідно до подання (6)

$$\widetilde{\gamma}_k = \frac{1}{\Delta_0 \widetilde{z}_k^*} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{kj}^{*}(\widetilde{\gamma}) y_j + \Delta_1 y_k \right), \quad k = \overline{t+1, n}. \tag{15}$$

Сформулюємо умови існування додатного розв'язку із заданими властивостями системи рівнянь (11)–(13), (15).

Теорема 1. Нехай для заданих значень сталих Δ_0, Δ_1 і параметрів $\{\alpha_{t+1}^1, \ldots, \alpha_n^1\}$, а також вибраних на підставі оцінок

$$y^m \le \sigma^m \left(\Delta_1 + \sum_{k=1}^{t} c_{ks}^1 \right) \le \sigma^M \left(\Delta_1 + \sum_{k=1}^{t} c_{ks}^0 \right) \le y^M, \quad s = \overline{1, t};$$

$$y^m - \Delta_0 \alpha_s^1 \le \sigma^m \sum_{k=1}^{t} c_{ks}^1 \le \sigma^M \sum_{k=1}^{t} c_{ks}^0 \le y^M - \Delta_0 \alpha_s^1, \quad s = \overline{t+1, n},$$

величин σ^m, σ^M справедливі нерівності

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left(\widetilde{z}_s^M - \sum_{k=t+1}^{n} c_{ks}^1 \alpha_k^1 \right) - \frac{\sigma^m}{\Delta_1^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{t} c_{sk}^1 \times \right.$$

$$\left. \times c_{ik}^1 + \Delta_1 \sum_{i=1}^{t} c_{si}^1 + \Delta_1 \sum_{i=1}^{t} c_{is}^1 \right) \le \sigma^M, \quad s = \overline{1, t};$$

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left(\widetilde{z}_s^m - \sum_{k=t+1}^{n} c_{ks}^0 \alpha_k^1 \right) - \frac{\sigma^M}{\Delta_1^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{t} c_{sk}^0 \times c_{ik}^0 + \Delta_1 \sum_{i=1}^{t} c_{si}^0 + \Delta_1 \sum_{i=1}^{t} c_{is}^0 \right) \ge \sigma^m, \quad s = \overline{1, t},$$

де

$$\widetilde{z}_i^m = (\widetilde{b}^0, H_i^0) - \frac{y^M}{\Delta_0} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i^+} (d_j, H_i^0) \left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^0 + \Delta_1 \right) +$$

$$+ \frac{y^m}{\Delta_0} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i^-} \left| (d_j, H_i^0) \right| \left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^1 + \Delta_1 \right) > 0, \quad i = \overline{1, t};$$

$$\widetilde{z}_i^M = (\widetilde{b}^0, H_i^0) - \frac{y^m}{\Delta_0} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i^+} (d_j, H_i^0) \left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^1 + \Delta_1 \right) +$$

$$+ \frac{y^M}{\Delta_0} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i^-} \left| (d_j, H_i^0) \right| \left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^0 + \Delta_1 \right) \ge \widetilde{z}_i^m, \quad i = \overline{1, t};$$

$$\mathcal{Q}_i^+ = \{ k \in [t+1, n], \quad k : (d_k, H_i^0) > 0 \}, \quad i = \overline{1, t};$$

$$\mathcal{Q}_i^- = \{ k \in [t+1, n], \quad k : (d_k, H_i^0) < 0 \}, \quad i = \overline{1, t}.$$

Тоді існує додатний розв'язок задачі (11)–(13), (15). Розв'язком будуть вектори $\{y_i\}_{i=1}^n$, $\{\tilde{\gamma}_i\}_{i=t+1}^n$ і $\{\alpha_i - \lambda_i\}_{i=1}^t$. Крім того, компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^n$ задовольнятимуть обмеження $y^m \le y_i \le y^M$, $i = \overline{1,n}$.

Доведення. Унаслідок припущення про властивості елементів матриці $\left\| c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) \right\|_{k=1,\, j=1}^{n,\ \ l}$, для яких мають виконуватись обмеження (7)

$$c_{kj}^0 \ge c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) \ge c_{kj}^1, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,l}, \quad \tilde{\gamma} \in \Gamma^*,$$

з виразу (15) отримаємо граничні значення параметрів $\{\tilde{\gamma}_{t+1}, \ldots, \tilde{\gamma}_n\}$:

$$\tilde{\gamma}_k^m = \frac{y^m}{\Delta_0 \tilde{z}_k^*}\left(\sum_{j=1}^n c_{kj}^1 + \Delta_1\right), \quad k = \overline{t+1,n};$$

$$\tilde{\gamma}_k^M = \frac{y^M}{\Delta_0 \tilde{z}_k^*}\left(\sum_{j=1}^n c_{kj}^0 + \Delta_1\right), \quad k = \overline{t+1,n},$$

якщо всі компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^n$ міститимуться в інтервалі $[y^m, y^M]$. За цими граничними значеннями утворимо множину

$$\tilde{\Gamma}^1 = \left\{ \tilde{\gamma} \in R_+^{n-t}, \quad \left| \frac{(\tilde{\gamma}_j^M + \tilde{\gamma}_j^m)}{2} - \tilde{\gamma}_j \right| \le \frac{(\tilde{\gamma}_j^M - \tilde{\gamma}_j^m)}{2}, \quad j = \overline{t+1,n} \right\} \subset \Gamma^*,$$

на якій також мають виконуватись обмеження (7).

Розглянемо дію оператора $\{\tilde{\Theta}_i^{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}, \alpha_1 - \lambda_1, \ldots, \alpha_t - \lambda_t)\}_{i=1}^t$ на вектор з множини

$$\mathcal{M}_\gamma = \left\{ \alpha_k - \lambda_k \in R, \quad \left| \frac{(\sigma^M + \sigma^m)}{2} - \alpha_k + \lambda_k \right| \le \frac{(\sigma^M - \sigma^m)}{2}, \quad k = \overline{1,t} \right\}$$

за довільно вибраного вектора $\tilde{\gamma}$ з множини $\tilde{\Gamma}^1$. Для кожного вектора з множини $\mathcal{M}_\gamma$ та вектора $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}^1$ на підставі умов теореми для оператора $\{\tilde{\Theta}_i^{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}, \alpha_1 - \lambda_1, \ldots, \alpha_t - \lambda_t)\}_{i=1}^t$ можна записати оцінки зверху

$$\tilde{\Theta}_k^{\tilde{\gamma}} \le \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(\tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \sum_{s=t+1}^n c_{sk}^1 \alpha_s^1 \right) - \frac{1}{\Delta_1^2} \sum_{j=1}^t \left[\sum_{i=1}^n c_{ki}^1 c_{ji}^1 \right] \times$$

$$\times (\alpha_j - \lambda_j) - \frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^t c_{kj}^1 (\alpha_j - \lambda_j) + \sum_{j=1}^t c_{jk}^1 (\alpha_j - \lambda_j) \right) \le$$

$$\le \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(\tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \sum_{s=t+1}^n c_{sk}^1 \alpha_s^1 \right) - \frac{1}{\Delta_1} \sigma^m \left(\sum_{j=1}^t c_{kj}^1 + \sum_{j=1}^t c_{jk}^1 \right) -$$

$$- \frac{1}{\Delta_1^2} \sigma^m \sum_{j=1}^t \left[\sum_{i=1}^n c_{ki}^1 c_{ji}^1 \right] \le \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(\tilde{z}_k^M - \sum_{s=t+1}^n c_{sk}^1 \alpha_s^1 \right) -$$

$$-\frac{1}{\Delta_1}\sigma^m\left(\sum_{j=1}^{t}c_{kj}^1+\sum_{j=1}^{t}c_{jk}^1\right)-\frac{1}{\Delta_1^2}\sigma^m\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n}c_{ki}^1 c_{ji}^1\right]\le\sigma^M,\quad k=\overline{1,t},$$

і оцінки знизу

$$\widetilde{\Theta}_k^{\widetilde{\gamma}}\ge\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(\widetilde{z}_k^1(\widetilde{\gamma})-\sum_{s=t+1}^{n}c_{sk}^0\alpha_s^1\right)-\frac{1}{\Delta_1^2}\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n}c_{ki}^0 c_{ji}^0\right]\times$$

$$\times(\alpha_j-\lambda_j)-\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t}c_{kj}^0(\alpha_j-\lambda_j)+\sum_{j=1}^{t}c_{jk}^0(\alpha_j-\lambda_j)\right)\ge$$

$$\ge\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(\widetilde{z}_k^1(\widetilde{\gamma})-\sum_{s=t+1}^{n}c_{sk}^0\alpha_s^1\right)-\frac{1}{\Delta_1^2}\sigma^M\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n}c_{ki}^0 c_{ji}^0\right]-$$

$$-\frac{1}{\Delta_1}\sigma^M\left(\sum_{j=1}^{t}c_{kj}^0+\sum_{j=1}^{t}c_{jk}^0\right)\ge\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(\widetilde{z}_k^m-\sum_{s=t+1}^{n}c_{sk}^0\alpha_s^1\right)-$$

$$-\frac{1}{\Delta_1^2}\sigma^M\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n}c_{ki}^0 c_{ji}^0\right]-\frac{1}{\Delta_1}\sigma^M\left(\sum_{j=1}^{t}c_{kj}^0+\sum_{j=1}^{t}c_{jk}^0\right)\ge\sigma^m,\quad k=\overline{1,t}.$$

Виконання цих оцінок означатиме, що за будь-якого вектора $\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}^1$ оператор $\{\widetilde{\Theta}_i^{\widetilde{\gamma}}(\widetilde{\gamma},\alpha_1-\lambda_1,\ldots,\alpha_t-\lambda_t)\}_{i=1}^t$ переводитиме множину $\mathcal{M}_\gamma$ саму в себе. Тоді для величин $\{\alpha_i-\lambda_i\}_{i=1}^t$ будуть справедливими обмеження

$$\sigma^m\le\alpha_k-\lambda_k\le\sigma^M,\quad k=\overline{1,t}.$$

Відповідно для векторів $\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}^1$ і $\{\alpha_i-\lambda_i\}_{i=1}^t\in\mathcal{M}_\gamma$ з виразів (11), (12) випливатимуть оцінки знизу

$$y_s\ge\Delta_1\sigma^m+\sigma^m\sum_{k=1}^{t}c_{ks}^1\ge y^m,\quad s=\overline{1,t};$$

$$y_s\ge\Delta_0\alpha_s^1+\sigma^m\sum_{k=1}^{t}c_{ks}^1\ge y^m,\quad s=\overline{t+1,n},$$

і оцінки зверху

$$y_s\le\Delta_1\sigma^M+\sigma^M\sum_{k=1}^{t}c_{ks}^0\le y^M,\quad s=\overline{1,t};$$

$$y_s\le\Delta_0\alpha_s^1+\sigma^M\sum_{k=1}^{t}c_{ks}^0\le y^M,\quad s=\overline{t+1,n}.$$

Таким чином, якщо для розв'язання системи рівнянь (11)–(13), (15) використати ітераційний процес і початкові вектори $\{y_i^{[0]}\}_{i=1}^n$, $\{\alpha_i^{[0]}-\lambda_i^{[0]}\}_{i=1}^t$ та $\widetilde{\gamma}^{[0]}$ вибирати відповідно з множин

$$\left\{y_k\in R,\quad\left|\frac{(y^M+y^m)}{2}-y_k\right|\le\frac{(y^M-y^m)}{2},\quad k=\overline{1,n}\right\},$$

$\mathcal{M}_\gamma$ і $\widetilde{\Gamma}^1$, отримаємо, що подальші ітерації теж належатимуть до цих множин. У результаті на підставі теорем про нерухому точку можемо зробити висновок про існування розв'язку з потрібними властивостями задачі (11) – (13), (15).

Теорему доведено.

Так визначені компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^n$ задовольнятимуть рівняння (10), (14). А щоб значення ступенів задоволення потреб споживачів відповідали одному зі станів рівноваги для компонентів вектора $\{y_i\}_{i=1}^l$, мають бути справедливими рівності

$$\widetilde{z}_k^1(\widetilde{\gamma}) - \Delta_0 \widetilde{z}_k^1(\widetilde{\gamma}) + \Delta_1 y_k = \sum_{j=n+1}^{l} c_{kj}^*(\widetilde{\gamma}) y_j, \quad k = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Тоді вони розв'язуватимуть і рівняння (8). Вважатимемо надалі, що у матриці $\left\| \sum_{s=n+1}^{l} c_{ks}^1 c_{js}^1 \right\|_{k,j=1}^{n}$ найбільше власне значення $\widetilde{\lambda}^1$ додатне. Щоб знайти потрібні значення ступенів задоволення потреб споживачів $\{y_i\}_{i=t+1}^l$, використаємо екстремальну задачу [5]

$$\min_{(y_{n+1},\ldots,y_l)} \widetilde{\mathcal{F}}^1(\widetilde{\gamma}), \quad \widetilde{\mathcal{F}}^1 = \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{l} [\beta_j(\widetilde{\gamma}) - y_j]^2 \tag{17}$$

за додаткових вимог (16). Розв'язок задачі має задовольняти і обмеження

$$y^m \le y_k \le y^M, \quad k = \overline{n+1,l}. \tag{18}$$

Відповідно до результатів [5] існуватиме додатний вектор $\{\hat{\alpha}_i^1\}_{i=1}^n$, за якого величини $\{\beta_i(\widetilde{\gamma})\}_{i=1}^n$ будуть означені виразом

$$\beta_s = \sum_{k=1}^{n} \hat{\alpha}_k^1 c_{ks}^*(\widetilde{\gamma}), \quad s = \overline{n+1,l},$$

а задача (16)–(18) розв'язна.

Справді, для екстремальної задачі (16), (17) можна записати функцію Лагранжа

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} \left[\sum_{k=1}^{t} \hat{\alpha}_k^1 c_{kj}^*(\widetilde{\gamma}) - y_j \right]^2 + \sum_{k=1}^{n} \hat{\lambda}_k^1 \left[\widetilde{z}_k^1(\widetilde{\gamma}) - \Delta_0 \widetilde{z}_k^1(\widetilde{\gamma}) + \Delta_1 y_k - \sum_{j=n+1}^{l} c_{kj}^*(\widetilde{\gamma}) y_j \right].$$

За такої функції Лагранжа для будь-якого довільно вибраного ненульового вектора $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ справедливі нерівності

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^2 \hat{\mathcal{L}}}{\partial y_i \partial y_j} \psi_i \psi_j = \sum_{s=1}^{l} \psi_s^2 > 0,$$

а розв'язок екстремальної задачі (16), (17) задовольнятиме вимоги

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial y_s} = y_s - \sum_{j=1}^{n} \hat{\alpha}^1_j c^*_{js}(\widetilde{\gamma}) + \sum_{k=1}^{n} \hat{\lambda}^1_k c^*_{ks}(\widetilde{\gamma}) = 0, \quad s = \overline{n+1, l}; \tag{19}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \hat{\lambda}^1_k} = \widetilde{z}^1_k(\widetilde{\gamma}) - \Delta_0 \widetilde{z}^1_k(\widetilde{\gamma}) + \Delta_1 y_k - \sum_{j=n+1}^{l} c^*_{kj}(\widetilde{\gamma}) y_j = 0, \quad k = \overline{1, n}. \tag{20}$$

На підставі вимог (19), (20) отримаємо рівняння на множники Лагранжа $\{\hat{\lambda}^1_i\}_{i=1}^n$:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{s=n+1}^{l} c^*_{ks}(\widetilde{\gamma}) c^*_{js}(\widetilde{\gamma}) \right] (\hat{\alpha}^1_j - \hat{\lambda}^1_j) = \widetilde{z}^1_k(\widetilde{\gamma}) - \Delta_0 \widetilde{z}^1_k(\widetilde{\gamma}) + \Delta_1 y_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Якщо матриця $\left\| \sum_{s=n+1}^{l} c^*_{ks}(\widetilde{\gamma}) c^*_{js}(\widetilde{\gamma}) \right\|_{k,j=1}^{n}$ нерозкладна, то згідно з теоремою Перона–Фробеніуса [6] існує додатний власний вектор, який відповідає найбільшому власному значенню $\widetilde{\lambda}$. Якщо ж матриця розкладна, власний вектор буде принаймні невід'ємним. Нехай $\{(1+\nu)\hat{\alpha}^1_i - \hat{\lambda}^1_i\}_{i=1}^n$ і є таким вектором. Тоді рівняння на множники Лагранжа подамо у вигляді

$$\widetilde{\lambda}(\alpha^1_k + \nu\alpha^1_k - \lambda^1_k) = \nu \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{s=n+1}^{l} c^*_{ks}(\widetilde{\gamma}) c^*_{js}(\widetilde{\gamma}) \right] \hat{\alpha}^1_j +$$

$$+ \widetilde{z}^1_k(\widetilde{\gamma}) - \Delta_0 \widetilde{z}^1_k(\widetilde{\gamma}) + \Delta_1 y_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

звідки випливатиме, що для гарантованого існування ненульових множників Лагранжа $\{\hat{\lambda}^1_i\}_{i=1}^n$ достатньо відповідним чином підібрати компоненти векторів $\{\alpha^1_i\}_{i=1}^n$ і значення параметра ν. У випадку, якщо в матриці $\left\| \sum_{s=n+1}^{l} c^1_{ks} c^1_{js} \right\|_{k,j=1}^{n}$ найбільше власне значення $\widetilde{\lambda}^1$ додатне, то з нерівностей

$$\sum_{s=n+1}^{l} c^*_{ks}(\widetilde{\gamma}) c^*_{js}(\widetilde{\gamma}) \geq \sum_{s=n+1}^{l} c^1_{ks} c^1_{js}, \quad k, j = \overline{1, n},$$

випливатиме $\widetilde{\lambda} \geq \widetilde{\lambda}^1 > 0$. У результаті рівноважні значення ступенів задоволення потреб споживачів $\{y_i\}_{i=n+1}^{l}$ визначатимуться за формулою

$$y_s = \frac{1}{\widetilde{\lambda}} \sum_{k=1}^{n} c^*_{ks}(\widetilde{\gamma}) \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{s=n+1}^{l} c^*_{ks}(\widetilde{\gamma}) c^*_{js}(\widetilde{\gamma}) \right] \nu \hat{\alpha}^1_j +$$

$$+ \frac{1}{\widetilde{\lambda}} \sum_{k=1}^{n} c^*_{ks}(\widetilde{\gamma}) (\widetilde{z}^1_k(\widetilde{\gamma}) - \Delta_0 \widetilde{z}^1_k(\widetilde{\gamma}) + \Delta_1 y_k - \nu\alpha^1_k), \quad s = \overline{n+1, l}.$$

Вибір величин $\{\alpha^1_i\}_{i=1}^n$ і ν, крім забезпечення ненульових значень множників Лагранжа $\{\hat{\lambda}^1_i\}_{i=1}^n$, може гарантувати і виконання вимоги (18).

Зауваження. Достатніми умовами справедливості обмежень (18) для розв'язку задачі (16), (17) є

$$\frac{1}{\widetilde{\lambda}^0}\sum_{k=1}^{n} c_{ks}^1 \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{s=n+1}^{l} c_{ks}^1 c_{js}^1\right]\nu\hat{\alpha}_j^1 +$$

$$+\frac{1}{\widetilde{\lambda}^0}\sum_{k=1}^{n} c_{ks}^1 (\widetilde{z}_k^m - \Delta_0 \widetilde{z}_k^m + \Delta_1 y^m - \nu\alpha_k^1) \geq y^m, \quad s=\overline{n+1,l};$$

$$\frac{1}{\widetilde{\lambda}^1}\sum_{k=1}^{n} c_{ks}^0 \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{s=n+1}^{l} c_{ks}^0 c_{js}^0\right]\nu\hat{\alpha}_j^1 +$$

$$+\frac{1}{\widetilde{\lambda}^1}\sum_{k=1}^{n} c_{ks}^0 (\widetilde{z}_k^M - \Delta_0 \widetilde{z}_k^M + \Delta_1 y^M - \nu\alpha_k^1) \leq y^M, \quad s=\overline{n+1,l}.$$

де $\widetilde{\lambda}^0$ — найбільше власне значення матриці $\left\| \sum_{s=n+1}^{l} c_{ks}^0 c_{js}^0 \right\|_{k,j=1}^{t}$.

ОПТИМАЛЬНІ ЦІНИ ТОВАРІВ

Ціни є рівноважними, якщо вони задовольнятимуть рівняння вигляду (2). Нехай технології виробництва товарів такі, що для деякої додатної сталої $\widetilde{C}_0$ справедлива оцінка

$$a_{sj} x_j \geq \widetilde{C}_0, \quad j=\overline{1,t}, \quad s=\overline{1,t}.$$

Для запобігання надлишковому нагромадженню товарів, коли запас певних типів товарів в економічній системі такий, що їх подальше виготовлення може призвести до перевиробництва і порушення рівноваги, на елементи матриці запасу товарів установимо обмеження

$$\frac{y_j^m}{\pi_j} c_{sj}^1 + b_{sj} - b_{sj}^1 \geq -\widetilde{C}, \quad j=\overline{1,t}, \quad s=\overline{1,t}. \tag{21}$$

якщо виконуватиметься вимога

$$\frac{y_j^M}{\pi_j} c_{sj}^0 + b_{sj} - b_{sj}^1 > 0, \quad j=\overline{1,t}, \quad s=\overline{1,t}. \tag{22}$$

де $\widetilde{C}_0 \geq \widetilde{C}$, а y_j^M і y_j^m — відповідно найвищий і найнижчий прийнятні для j-го суб'єкта економічної системи рівні задоволення потреб. Спектральний радіус матриці $A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^{n}$ вважається меншим за одиницю, тому вираз (2) можна трансформувати до вигляду

$$p_k = \hat{\mathcal{P}}_k^x(p), \quad k=\overline{1,t}; \tag{23}$$

$$\hat{\mathcal{P}}_k^x(p) = \sum_{j=1}^{t} (E-A)_{jk}^{-1}\left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j}{\pi_j x_j} \times\right.$$

$$\times \sum_{s=1}^{n} c_{sj}(x) p_s + \frac{1}{x_j} \sum_{s=1}^{n} (b_{sj} - b_{si}^1) p_s \Bigg], \quad k = \overline{1,t}.$$

Теорема 2. За умови виконання обмежень (21), (22) і нерівностей

$$\sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} (E-A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \max_{s\in[1,t]} \left[\frac{y_j^M}{\pi_j} c_{sj}^0 + b_{sj} - b_{sj}^1 \right] < 1,$$

де стала $\widetilde{C}$ така, що

$$\sum_{j=1}^{t} (E-A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j^m}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=t+1}^{n} c_{sj} p_s^0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=t+1}^{n} b_{sj} p_s^0 - \frac{1}{x_j^0} \rho_1 \widetilde{C} \right] > 0, \quad k = \overline{1,t};$$

$$\rho_1 = \frac{\sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} (E-A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \left[x_j^0 \sum_{s=t+1}^{n} a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j^M}{\pi_j} \sum_{s=t+1}^{n} c_{sj} p_s^0 + \sum_{s=t+1}^{n} b_{sj} p_s^0 \right]}{1 - \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} (E-A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \max_{s\in[1,t]} \left(\frac{y_j^M}{\pi_j} c_{sj} + b_{sj} - b_{sj}^1 \right)},$$

існує додатний розв’язок рівняння (23).

Доведення. Для суми $\sum_{k=1}^{t} \hat{\mathscr{P}}_k^x(p)$ справедливий ланцюжок нерівностей

$$\sum_{k=1}^{t} \hat{\mathscr{P}}_k^x(p) \le \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} (E-A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j^M}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=1}^{n} c_{sj}(x) p_s + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=1}^{n} (b_{sj} - b_{sj}^1) p_s \right] \le \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} (E-A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj} p_s^0 + \right.$$

$$\left. + \frac{y_j^M}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=1}^{n} c_{sj}^0 p_s + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=1}^{n} (b_{sj} - b_{sj}^1) p_s \right] \le \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} (E-A)_{jk}^{-1} \times$$

$$\times \left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j^M}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=t+1}^{n} c_{sj}^0 p_s^0 + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=t+1}^{n} b_{sj} p_s^0 \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} (E-A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \max_{s\in[1,t]} \left[\frac{y_j^M}{\pi_j} c_{sj}^0 + b_{sj} - b_{sj}^1 \right] \sum_{s=1}^{t} p_s .$$

Урахувавши обмеження (21), отримаємо, що завжди можна підібрати значення параметра $\rho_0 > 0$, для якого виконуватиметься оцінка знизу:

$$\hat{\mathcal{P}}_k^x(p) \geq \sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj}p_s^0 + \frac{y_j^m}{\pi_j x_j^0}\sum_{s=1}^{n} c_{sj}(x)p_s + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x_j^0}\sum_{s=1}^{n}(b_{sj}-b_{sj}^1)p_s\right] \geq \sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj}p_s^0 + \right.$$

$$\left. + \frac{y_j^m}{\pi_j x_j^0}\sum_{s=1}^{n} c_{sj}^1 p_s + \frac{1}{x_j^0}\sum_{s=1}^{n}(b_{sj}-b_{sj}^1)p_s\right] \geq \sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1} \times$$

$$\left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj}p_s^0 + \frac{y_j^m}{\pi_j x_j^0}\sum_{s=t+1}^{n} c_{sj}^1 p_s^0 + \frac{1}{x_j^0}\sum_{s=t+1}^{n} b_{sj}p_s^0\right] + \rho_0 \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j^0}\sum_{s=1}^{t}\left(\frac{y_j^m}{\pi_j}c_{sj}^1 + b_{sj} - b_{sj}^1\right) \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj}p_s^0 + \frac{y_j^m}{\pi_j x_j^0}\sum_{s=t+1}^{n} c_{sj}^1 p_s^0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x_j^0}\sum_{s=t+1}^{n} b_{sj}p_s^0\right] - \rho_0 t\widetilde{C}\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j^0} \geq \rho_0, \quad k = \overline{1,t}\,.$$

Тепер, якщо задати параметр ρ так, щоб задовольнити нерівності

$$\frac{\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j^0}\left[x_j^0\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj}p_s^0 + \frac{y_j^M}{\pi_j}\sum_{s=t+1}^{n} c_{sj}^0 p_s^0 + \sum_{s=t+1}^{n} b_{sj}p_s^0\right]}{1-\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j^0}\max_{s\in[1,t]}\left(\frac{y_j^M}{\pi_j}c_{sj}^0 + b_{sj} - b_{sj}^1\right)} \leq \rho;$$

$$\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj}p_s^0 + \frac{y_j^m}{\pi_j x_j^0}\sum_{s=t+1}^{n} c_{sj}^1 p_s^0 + \frac{1}{x_j^0}\sum_{s=t+1}^{n} b_{sj}p_s^0 - \frac{1}{x_j^0}\rho\widetilde{C}\right] > 0, \quad k = \overline{1,t}\,,$$

то компактна опукла множина

$$\left\{p_k \geq \rho_0, \quad k = \overline{1,t}, \quad \sum_{k=1}^{t} p_k \leq \rho\right\}$$

переводитиметься оператором $\{\hat{\mathcal{P}}_k^x(p)\}_{k=1}^t$ сама в себе. У результаті на підставі теорем про нерухому точку [7] встановимо існування додатного розв’язку рівняння (23).

Теорему доведено.

Зауваження. Виконання умов теореми гарантуватиме існування розв'язку рівняння (23) і у випадку, якщо стала $\widetilde{C}_0$ така, що $\widetilde{C}_0 < \widetilde{C}$.

ВИСНОВКИ

У цьому дослідженні доведено існування рівноваги в економічній системі з монополістами та споживчими уподобаннями, що формуються з урахуванням інформації про обсяги випуску товарів. Існування рівноваги означає розв'язність рівнянь, якими вона описується. Кожному їх розв'язку відповідатиме один з можливих станів рівноваги. Установлені умови на задані економічні характеристики гарантуватимуть розв'язність рівнянь рівноваги в заданій області значень, тобто вказано умови реалізації станів рівноваги із заданими властивостями. Такі стани рівноваги гарантують забезпечення хоча б мінімального рівня задоволення потреб окремих суб'єктів економічної системи. Указано алгоритми знаходження рівноважних характеристик. На відміну від попередніх результатів [3] знято встановлені там вимоги на розміщення ненульових елементів матриці попиту. Указано граничні оцінки рівноважних значень економічних характеристик, за якими можна виокремити стани рівноваги з вибраними властивостями.

Роботу виконано за часткової підтримки НАН України (проект 0118U003196).

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гончар М.С.* Математичні основи інформаційної економіки / М.С. Гончар. — К.: Ін-т теор. фізики, 2007. — 464 с.
2. *Debreu G.* Existence of competitive equilibrium / G. Debreu // Handbook of Mathematical Economics, ed. by K.J.Arrow and M.D.Intriligator. — Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982. — Vol. II. — P.698–742.
3. *Махорт А.Ф.* О влиянии потребительских предпочтений на равновесие в открытой экономической системе / А.Ф. Махорт // Кибернетика и системный анализ. — 2016. — № 4. — С. 11–28.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
5. *Махорт А.П.* Про алгоритми визначення станів рівноваги відкритої економічної системи за наявності монополістів / А.П. Махорт // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 95–107.
6. *Воеводин В.В.* Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
7. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 442 с.

Надійшла 19.10.2017