УДК 517.98+517.95
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.3.08

ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

А.Ю. ПОТАПЕНКО

Аннотация. Одной из задач бесконечномерного анализа является поиск методов исследования корректности краевых задач в пространстве бесконечномерного аргумента. Предложен метод расширения класса корректных задач сведением их к задачам «канонического типа», рассмотренным ранее. Процесс такого сведения состоит в поиске диффеоморфизма определенного класса между римановыми многообразиями, в том числе между областями гильбертового пространства, при котором удается исходную задачу преобразовать в более простую. Краевая задача рассматривается в «L_2-версии». Приведен пример такой задачи; для его реализации найдены производные в сильном смысле диффеоморфизма и обратного отображения. Доказана ограниченность диффеоморфизма — условие использования теоремы о краевой задаче, ассоциированной с диффеоморфизмом.

Ключевые слова: гильбертово пространство, риманово многообразие, диффеоморфизм, борелевская мера, дифференцирование мер, оператор Лапласа, задача Дирихле.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением работы [1]. Основным результатом работы [1] является теорема, позволяющая расширить класс корректных краевых задач на римановом многообразии, и, в частности, на гильбертовом пространстве, путем сведения *ассоциированной с диффеоморфизмом* краевой задачи к задаче Дирихле определенного вида (задаче Дирихле на гильбертовом пространстве [2]). Представлен пример использования основного результата работы [1] для сведения определенного класса краевых задач на гильбертовом пространстве к задаче, ранее исследованной в работе [2].

Цель работы — проиллюстрировать метод расширения класса корректных краевых задач из работы [1] конкретным примером.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть M — риманово сепарабельное многообразие класса C^2 с модельным пространством H. Риманов тензор позволяет для каждого $p \in M$ задать на T_pM скалярное произведение $(\cdot,\cdot)=(\cdot,\cdot)_p$, а следовательно, и соответствующую норму $\|\cdot\|=\|\cdot\|_p$. Таким образом, следующее определение корректно.

Определение. Пусть M_1, M_2 — римановы многообразия; диффеоморфизм $F: M_1 \to M_2$ будем называть *ограниченным*, если существует такое

$K>0$, что для всяких $p\in M_1$ и $q\in M_2$ выполняются неравенства $\|F'(p)\|\le K$ и $\|(F^{-1})'(q)\|\le K$.

Определение. Атлас $\Omega=\{(\varphi,U_\varphi)\}$ ($\varphi:U_\varphi\to H$) риманового многообразия M будем называть *равномерным* [3], если существуют такие $r>0$, $\delta^-,\delta^+>0$, что

1) для каждой точки $p\in M$ существует такая карта (φ_p,U_p), что $\varphi_p(U_p)\supset B_r(\varphi_p(p))=\{q\in H:\|\ \varphi_p(p)-q\ \|\ <r\}$;

2) для каждых $p\in M$, $q\in U_p$, $\xi\in T_qM$ выполняется $\delta^-\left\|\xi^{\varphi_p}\right\|_H^2\le\|\xi\|_q^2\le$ $\le\delta^+\left\|\xi^{\varphi_p}\right\|_H^2$ для карты (φ_p,U_p) из п. 1).

Обозначим через $C_b(M)$ пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на M, через $C_b(M;TM)$ пространство всех непрерывных ограниченных векторных полей на M, через $C_b^1(M)$ (соответственно, $C_b^1(M;TM)$) пространство всех функций $f\in C_b(M)$ (соответственно, полей $\mathbf{X}\in C_b(M;TM)$), дифференцируемых в каждой точке $x\in M$ с непрерывной и ограниченной на всем M производной $f'(\cdot)$ (соответственно $\mathbf{X}'(\cdot)$). Здесь $f'(p)\in T_p^*M$ определен формулой $f'(p):T_pM\ni\mathbf{Y}_p\mapsto$ $\mapsto\mathbf{Y}_pf\in\mathbb{R}$; $\mathbf{X}'(p)$ — линейный оператор в T_pM, определённый формулой $\mathbf{X}'(p):\mathbf{Y}_p\mapsto\nabla_{\mathbf{Y}_p}\mathbf{X}$, где ∇ — связность Леви–Чивиты на M (бесконечномерный вариант [4, с. 83]. Через $\Phi_t^{\mathrm{Z}}x$ обозначим поток векторного поля Z.

Пусть M_1,M_2 — сепарабельные римановы многообразия с равномерными атласами; G_1 — область с гладкой границей в M_1; $S_1=\partial(G_1)$; $G_2=F(G_1)$ — область с гладкой границей в M_2; $S_2=F(S_1)=\partial(G_2)$; на M_1 задана мера с полным носителем μ_1.

Пусть известно, что оператор градиента на G_1 $\mathbf{grad}_{G_1}$ замыкаем; на M_1 фиксировано *строго трансверсальное* к S_1 поле $\mathbf{n}_1\in C_b^1(M_1)$. Под строгой трансверсальностью понимается существование такого $T>0$, что для всех $p\in S_1$ выполняется неравенство $(\mathbf{n}_1(p),\mathbf{n}_{S_1}(p))_p\ge T$, где $\mathbf{n}_{S_1}$ — поле внешней единичной нормали. Пусть также логарифмическая производная $\operatorname{div}_{\mu_1}\mathbf{n}_1$ меры μ_1 вдоль поля $\mathbf{n}_1$ обладает свойством

$$\operatorname{div}_{\mu_1}\mathbf{n}_1|_{G_1}\in L_\infty(G_1)=L_\infty(G_1,\mu_1).$$

Данное условие, вместе с замыкаемостью $\mathbf{grad}_{G_1}$, позволяет корректно определить граничный оператор следа

$$\gamma_1:D(\overline{\mathbf{grad}_{G_1}})\to L_2(S_1)=L_2(S_1,\tau_1),$$

который является расширением на $D(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1})$ оператора ограничения: $u \mapsto u|_{S_1}$ для функций $u \in C^1(\overline{G_1})$ — непрерывно дифференцируемых на $\overline{G_1}$ функций. На гильбертовом пространстве граничный оператор следа введен в работе [2], случай риманового многообразия аналогичен. Поверхностная мера τ_1 на S_1 задается соотношением

$$\int_{S_1} f\, d\tau_1 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\Phi_t^{\mathbf{n}_1} G_1} f\, d\mu_1,$$

справедливым для всякой $f \in C_b(M)$ [5].

Дивергенция по мере на G_1 определяется следующим образом:

$$\operatorname{div}_{G_1} = -(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}|_{\operatorname{Ker}\gamma_1})^*.$$

Пусть теперь $\mathbf{n}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{n}_1(F^{-1}(\cdot))$ и $\mu_2(A) = \mu_1(F^{-1}(A))$. В работе [1] доказано, что в случае замыкаемости $\mathbf{grad}_{G_1}$ и выполнения приведенных выше достаточных условий корректности определения γ_1 и div_{G_1} на G_1 соответствующие операторы $\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}$, γ_2 и div_{G_2} также корректно определены.

Рассмотрим следующую краевую задачу в области риманового многообразия, корректность которой (под корректностью здесь и далее понимается существование и единственность решения) на гильбертовом пространстве обоснована в работе [6], на римановом многообразии для случая $k \equiv 1$ — в работах [7–8]:

$$\operatorname{div}_{G_1}(k\, \overline{\mathbf{grad}}_{G_1} u) - au = f; \tag{1}$$

$$\gamma_1(u) = \varphi, \tag{2}$$

где $f \in L_2(G_1),\ k \in C^1(G_1),\ a \in C(G_1),\ k(x) \ge \delta > 0,\ a(x) \ge \alpha > 0,\ \varphi \in \operatorname{Im}\gamma_1$.

Следующая теорема, доказанная в работе [1], позволяет расширить класс корректных краевых задач.

Теорема 1. Функция $u = u_2$ будет решением (F*-ассоциированной*) краевой задачи на $G_2 \subset M_2$:

$$\operatorname{div}_{G_2}((k \circ F^{-1})F'(F^{-1}(\cdot))(F'(F^{-1}(\cdot)))^* \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u) - (a \circ F^{-1})u = f \circ F^{-1};$$

$$\gamma_2(u) = \varphi \circ F^{-1}$$

в том и только том случае, если $u = u_1 = u_2 \circ F$ будет решением задачи Дирихле (1)–(2).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H — гильбертово пространство; G_2 — область в H с гладкой границей $S_2 = \partial G_2$; пусть также $G_2 \subset \{y \in H : 0 < K_1 \le \|y\| \le K_2\}$; γ_2 — граничный оператор следа на G_2. Пусть $h \in L_2(G_2)$; $k \in C^1(G_2)$; $a \in C(G_2)$; $k(y) \geq \delta > 0$; $a(y) \geq \alpha > 0$; $\varphi \in \mathrm{Im}\gamma_2$. Рассмотрим краевую задачу относительно $u = u(y)$:

$$\mathrm{div}_{G_2}(k(y)(\|y\|^2 \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u(y) + \beta(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u(y), y)y) - a(y)u(y) = h(y), \quad (3)$$

где $\beta > -1$, с краевым условием

$$\gamma_2(u) = \varphi. \quad (4)$$

Докажем при помощи теоремы 1, что задача (3)–(4) сводится к рассмотрению варианта задачи Дирихле в гильбертовом пространстве, исследованного в работе [6].

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕОМОРФИЗМА

Пусть $\alpha = \sqrt{1+\beta} - 1 > -1$. Рассмотрим отображение

$$F : x \mapsto \|x\|^\alpha x.$$

Не составляет труда найти обратное к F отображение:

$$F^{-1} : y \mapsto \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} y.$$

Заметим, что тут неравенство $\beta \neq -1 \Rightarrow \alpha \neq -1$ критично, иначе F не будет обратимым.

Обозначим

$$G_1 = F^{-1}(G_2) \subset \{x \in H : 0 < K_1 \leq \|F(x)\| \leq K_2\} = \{x \in H : 0 < K_1^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq \|x\| \leq K_2^{\frac{1}{1+\alpha}}\}.$$

Для удобства обозначим $T_1 = K_1^{\frac{1}{1+\alpha}}, T_2 = K_2^{\frac{1}{1+\alpha}}$, тогда G_1 является подмножеством кольца $\{x \in H : 0 < T_1 \leq \|x\| \leq T_2\}$. Поскольку F^{-1} — гладкое отображение, то граница G_1 $S_1 = \partial G_1 = F^{-1}(S_2)$ будет гладкой.

Везде в дальнейшем рассматриваем F как функцию из G_1 в G_2, а F^{-1}, соответственно, как функцию из G_2 в G_1.

ПРОИЗВОДНАЯ ДИФФЕОМОРФИЗМА

Лемма 1. $F'(x)z = \|x\|^\alpha z + \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x,z)x.$

Доказательство. Необходимо доказать, что

$$\left\|F(x+h) - F(x) - \|x\|^\alpha h - \alpha \| x \|^{\alpha-2} (x,h)x\right\| = o(\|h\|).$$

Используя формулу производной сложной функции и тождество $(\|x\|^2)' = 2x$, получаем

$$(\|x\|^{\alpha})' = \frac{\alpha}{2}(\|x\|^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} 2x = \alpha \|x\|^{\alpha-2} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x+h\|^{\alpha} - \|x\|^{\alpha} - \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x,h) = o(\|h\|),$$

следовательно

$$F(x+h) - F(x) - \|x\|^{\alpha} h - \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x,h)x = (\|x+h\|^{\alpha} - \|x\|^{\alpha} - \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x,h))x +$$

$$+ (\|x+h\|^{\alpha} - \|x\|^{\alpha})h = o(\|h\|)x + o(1)h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\| F(x+h) - F(x) - \|x\|^{\alpha} h - \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x,h)x \right\| = o(\|h\|).$$

Следствие 1. Для $x \in G_1$ выполняется $\|F'(x)\| \le \begin{cases} (1+\alpha)T_2^{\alpha}, & \alpha \ge 0; \\ (1-\alpha)T_1^{\alpha}, & \alpha \in (-1,0). \end{cases}$

Доказательство. Поскольку для любого $x \in G_1$ $\|x\| \in [T_1, T_2]$, то

$$\frac{\|F'(x)z\|}{\| z \|} \le \frac{\|x\|^{\alpha}\|z\|}{\|z\|} + |\alpha| \frac{\|x\|^{\alpha-1}|(x,z)|}{\|z\|} \le (1+|\alpha|)\|x\|^{\alpha} \le \begin{cases} (1+\alpha)T_2^{\alpha}, & \alpha \ge 0; \\ (1-\alpha)T_1^{\alpha}, & \alpha \in (-1,0). \end{cases}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ К ДИФФЕОМОРФИЗМУ

Лемма 2. $(F^{-1})'(y)z = z\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \dfrac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y,z)y.$

Доказательство. Необходимо доказать, что

$$\left\| F^{-1}(y+h) - F^{-1}(y) - h\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y,h)y \right\| = o(\|h\|).$$

Используя формулу производной сложной функции и тождество $(\|y\|^2)' = 2y$, получаем

$$\left(\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right)' = -\frac{\alpha}{2+2\alpha}(\|y\|^2)^{-\frac{\alpha}{2+2\alpha}-1} 2y = -\frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{2+3\alpha}{1+\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y+h\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y,h) = o(\|h\|),$$

следовательно

$$F^{-1}(y+h) - F^{-1}(y) - h\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y,h)y =$$

$$= \left(\|y+h\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y,h) \right) y +$$

$$+ \left(\|y+h\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right) h = o(\|h\|)y + o(1)h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\| F^{-1}(y+h) - F^{-1}(y) - h\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y,h)y \right\| = o(\|h\|).$$

Следствие 2. Для $y \in G_2$ выполняется

$$\|(F^{-1})'(y)\| \le \begin{cases} \dfrac{1+2\alpha}{1+\alpha} K_1^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, & \alpha \ge 0; \\ \dfrac{1}{1+\alpha} K_2^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, & \alpha \in (-1{,}0). \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку для любого $y \in G_2$ $\|y\| \in [K_1, K_2]$, то

$$\frac{\|(F^{-1})'(y)z\|}{\|z\|} \le \frac{\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\|z\|}{\|z\|} + \frac{|\alpha|}{1+\alpha}\frac{\|y\|^{-\frac{2\alpha+1}{1+\alpha}}(y,z)}{\|z\|} \le$$

$$\le \frac{1+\alpha+|\alpha|}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \le \begin{cases} \dfrac{1+2\alpha}{1+\alpha} K_1^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, & \alpha \ge 0; \\ \dfrac{1}{1+\alpha} K_2^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, & \alpha \in (-1{,}0). \end{cases}$$

Таким образом, из следствий 1 и 2 следует, что F является *ограниченным диффеоморфизмом*.

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ (3)–(4) К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

Заметим, что оператор $F'(x)$ является самосопряженным, следовательно

$$F'(x)(F')^*(x)z =$$

$$= \|x\|^{\alpha}\left(\|x\|^{\alpha} z + \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x,z)x\right) + \alpha\|x\|^{\alpha-2}\left(x, \|x\|^{\alpha} z + \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x,z)x\right)x =$$

$$= \|x\|^{2\alpha} z + \alpha(2+\alpha)\|x\|^{2\alpha-2}(z,x)x = \|x\|^{2\alpha} z + \beta\|x\|^{2\alpha-2}(z,x)x,$$

а потому

$$F'(F^{-1}(y))(F')^*(F^{-1}(y)) = \|y\|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} z + \beta\|y\|^{-\frac{2}{1+\alpha}}(z,y)y =$$

$$= \|y\|^{-\frac{2}{1+\alpha}}(\|y\|^2 z + \beta(z,y)y) = \|F^{-1}(y)\|^{-2}(\|y\|^2 z + \beta(z,y)y).$$

Пусть γ_1 — граничный оператор следа на G_1. Опираясь на теорему 1 и полученные выше результаты, доказываем следующую теорему.

Теорема 2. Функция $u(y) = u_2(y)$ будет решением задачи (3)–(4) на области G_2 тогда и только тогда, когда функция $u(x) = u_1(x) = u_2(F(x))$ станет решением такой задачи Дирихле на области $G_1 = F^{-1}(G_2)$:

$$\operatorname{div}_{G_1}(((k \circ F)\,\|\cdot\|^2\, \overline{\mathbf{grad}}_{G_1} u) - (a \circ F)u = h \circ F, \qquad (5)$$

$$\gamma_1(u) = \varphi \circ F. \tag{6}$$

Замечание. Задача (5)–(6) действительно будет задачей Дирихле в терминах работы [6], задачей вида (1)–(2), так как для любого $y \in G_1$: $\|y\|^2 \geq T_1^2 > 0$.

ВЫВОДЫ

В работе рассмотрен пример краевой задачи, ассоциированной с диффеоморфизмом между областями в гильбертовом пространстве, и проиллюстрирован метод доказательства корректности определенного класса краевых задач. В контексте дальнейших исследований видится целесообразным продолжение рассмотрения пар диффеоморфных римановых многообразий и получение таким образом новых классов корректных краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапенко А.Ю.* Краевая задача, ассоциированная с диффеоморфизмом между римановыми многообразиями / А.Ю. Потапенко // Системные исследования и информационные технологии. — 2018. — № 1. — С. 132–140.
2. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2-версии / Ю.В. Богданский // Укр. мат. журн. — 2011. — 63, № 9. — С. 1169–1178.
3. *Потапенко О.Ю.* Нескінченновимірні ріманові многовиди з рівномірною структурою / О.Ю. Потапенко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2016. — Т. 108, № 4. — С. 73–79.
4. *Далецкий Ю.Л.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия / Ю.Л. Далецкий, Я.И. Белопольская. — К.: Вища шк., 1989. — 296 с.
5. *Богданский Ю.В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра / Ю.В. Богданский // Укр. мат. журн. — 2015. — 67, № 11. — С. 1450–1460.
6. *Богданский Ю.В.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве / Ю. В. Богданский, Я.Ю. Санжаревский // Укр. мат. журн. — 2014. — 66, № 6. — С. 733–739.
7. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. I / Ю.В. Богданский, А.Ю. Потапенко // Укр. мат. журн. — 2016. — 68, № 7. — С. 897–907.
8. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. II / Ю.В. Богданский, А.Ю. Потапенко // Укр. мат. журн. — 2016. — 68, № 11. — С. 1443–1449.

Поступила 15.03.2018