УДК 517.9
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.3.11

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ И ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ГЕОМАГНИТНЫХ ИНДЕКСОВ

С.Н. ИВАНОВ, В.А. ЯЦЕНКО

Аннотация. Предложен способ численного расчета размерности по Ляпунову по реализации одной переменной динамической системы. Отмечены равенство информационной и по Ляпунову размерностей, а также случай равенства этих размерностей ёмкости. Рассмотрены совместно энтропия распределения норм касательных векторов динамической системы и размерность по Ляпунову. Теоретические выкладки сопровождаются примером численного расчета размерности по Ляпунову и упомянутой энтропии для временных рядов геомагнитных Кр, Dst и АЕ индексов. У рассматриваемых индексов энтропия близка к максимальному значению, а это приводит к близости размерности по Ляпунову к ёмкости. Обнаружена переменная структура Dst индекса. На примере геомагнитных индексов подтверждается, что корреляционная размерность Грасбергера–Прокаччи меньше размерности по Ляпунову.

Ключевые слова: динамическая система, размерность по Ляпунову, многообразие, распределение, экспоненты Ляпунова, геомагнитные индексы.

ВВЕДЕНИЕ

Метрическая или фрактальная размерность по соответствующим определениям имеет два общих типа: размерности, зависящие от метрических свойств, и размерности, которые зависят от частоты или вероятности посещения траекторией динамической системы разных её областей [1–4]. При этом основной проблемой остается выбор той размерности, которая достаточно эффективно отражает структуру исследуемой динамической системы (заданной системой дифференциальных уравнений), например, на компактном гладком многообразии класса C^{σ}, $\sigma \geq 2$. Компактность многообразия гарантирует, что решения дифференциальных уравнений продолжаются неограниченно [5].

Описанная проблема возникает в задачах реконструкции динамических систем, при которой ее поведение соответствует реальным экспериментальным данным [6], а также в задачах прогнозирования временных рядов [7], анализа реконструированной системы и распространении найденных свойств на реальный процесс [5–7], оценивания размерности фазового пространства (количества экспонент Ляпунова) [8]. Понятие размерности необходимо для характеристики свойств динамической системы, которая показывает общую информацию, необходимую для указания позиции точки с заданной точностью, например на аттракторе [3]. Оценкой нижней границы количества переменных, определяющих динамику системы, является фрактальная размерность [3]. В статье [9] отмечается, что основными числами, характеризующими «хаотическое» поведение, являются положительные экспоненты Ляпунова и наличие нецелочисленной метрической (фрактальной) размерности. Это понятие получило развитие и для оптического её измерения, используя аналоговые устройства [2], например, для некоторых простых задач, таких как двумерное отображение Пуанкаре [2]. В работе [2] описывается оптическая интерпретация корреляционного интеграла и предлагается схема экспериментальной установки.

Вычисление размерности по Ляпунову и исследование взаимосвязей с другими размерностями имеет важное прикладное применение для прогнозирования геомагнитных индексов, являющиеся неотъемлемой частью космической погоды [7].

Под метрической (фрактальной) размерностью обычно понимается размерность Хаусдорфа–Безиковича [1], основанная на покрытии некоторого исследуемого множества точек гиперкубами в фазовом пространстве, причем подсчет этих гиперкубов требует очень больших вычислительных затрат [1, 2]. Поэтому используют определения, упрощающие и допускающие численный расчет [1]. Оценкой сверху для хаусдорфовой размерности считается предельная ёмкость [1–2], которая является чисто метрической. В случае динамической системы, необходимо учитывать вероятностную меру, т.е. такую частоту, с которой фазовая траектория посещает различные части многообразия. Одной из таких оценок является информационная размерность [1–3, 8]. Грасбергер и Прокаччи показали, что размерность, названная корреляционной, учитывает совместную вероятность попадания пары точек в каждый элемент разбиения и должна быть численно меньше информационной размерности [8]. Обобщенная размерность, описываемая энтропией Реньи некоторого порядка, объединяет ёмкость, информационную и корреляционную размерности [1–2, 8, 10]. Также выделяется хаусдорфова размерность ядра, ёмкость ядра [1–2] и др. Одной из наиболее часто используемых при численном моделировании является размерность по Ляпунову [1, 3–4], предложенная Капланом и Йорки [3–4], которая устанавливает соотношение между фрактальной размерностью, информационной энтропией и экспонентами Ляпунова [1, 3]. Авторы настоящей работы придерживаются термина «экспоненты Ляпунова», чтобы отметить их значение среднего экспоненциального темпа дивергенции (конвергенции) соседних орбит в фазовом пространстве. Каплан и Йорки использовали числа Ляпунова, от которых можно перейти к экспонентам Ляпунова. Для регулярных аттракторов ляпуновская размерность совпадает с топологической размерностью Лебега [1].

В работе [3] показано, что информационная и Ляпунова размерности равны, причем возникает энтропия распределения вероятностей, количество которых равно размерности фазового пространства или количеству экспонент Ляпунова. С такими же свойствами энтропия рассматривалась в работах [6, 11]. Однако вопрос об этой энтропии и о размерности Ляпунова требует дальнейшего рассмотрения.

Цель работы — рассмотреть размерность по Ляпунову и энтропию распределения норм касательных векторов для динамических систем на компактном гладком многообразии и представить способ численного их расчета по дискретным временным рядам на примере геомагнитных индексов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть M — компактное гладкое многообразие класса C^{σ}, $\sigma \geq 2$ размерности фазового пространства d. Пусть имеется автономная динамическая система обыкновенных дифференциальных уравнений, заданная векторным полем f на многообразии M:

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $\dot{x} = dx/dt$, f и df/dx — определены и непрерывны на множестве $\{t \in [t_0, +\infty), x \in M\}$. Наложенные ограничения гарантируют существование и единственность решения $x(t)$ задачи Коши при любых начальных условиях. Многообразие M локально гомеоморфно некоторой области евклидова пространства $\Re^d$, $d \geq 2$ (размерность M принимается равной размерности пространства, $\dim M = d$), исходя из определения метрического пространства [12]. Пусть f — нелинейная вектор-функция класса гладкости C^{σ}, $\sigma \geq 2$.

Рассмотрим следующие траектории в d-мерном фазовом пространстве системы (1), начав с двух соседних начальных условий x_0 и $\widetilde{x}_0 = x_0 + \delta x_0$, которые эволюционируют во времени по следующим векторам $x(t)$ и $\widetilde{x}(t) = x(t) + \delta x(t)$. Тогда расстояние между ними с использованием евклидовой нормы задается формулой $\|r(x_0, t)\| = \|\delta x(x_0, t)\| = (\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + ... + \delta x_d^2)^{1/2}$.

Пусть система (1) имеет нулевое решение $x(t) = 0$. Если f — вектор-функция класса гладкости C^{σ}, $\sigma \geq 2$, то уравнение (1) можно разложить в ряд Маклорена в некоторой окрестности начала координат и записать в следующем виде: $\dot{x} = Jx + \sum\limits_{\varsigma} \frac{1}{\varsigma!} V_{\varsigma}(x)$, $\varsigma \geq 2$, где $J = df/dx|_{x=x_0}$ — матрица Якоби для f, а слагаемые $V_{\varsigma}(x)$ описывают члены от второго и более высокого порядка малости, $\varsigma \geq 2$. Эволюция касательного вектора в пространстве касательных на $x(t)$ представляется линеаризацией уравнения (1): $\dot{r}(x_0, t) = Jr(x_0, t)$.

Кроме того, имеется d ортонормальных векторов e_i на $r(x_0, t)$, $i = \overline{1, d}$. То есть имеется d норм касательных векторов $\|r(x_0^i, t)\|$, $i = \overline{1, d}$ [9], которые будем обозначать как $\|r_i^t\|$, $i = \overline{1, d}$. Обозначим вероятностное распределение $p_i\left(\|r(x_0^i, t)\|\right) = \|r(x_0^i, t)\| \Big/ \sum\limits_{i} \|r(x_0^i, t)\|$ этой нормы $\|r(x_0^i, t)\|$, $i = \overline{1, d}$, для каждого времени t, которое обозначим как p_i.

Определение 1. $E_p = -\sum\limits_{i} p_i \ln p_i$, $i = \overline{1, d}$ [6], называется энтропией.

Определение 2. $\overline{E_p} = \lim\limits_{t \to \infty} - \sum\limits_i \overline{p_i} \ln \overline{p_i}$, где $\overline{p_i} = \dfrac{\left\| r_i^0 \right\| \exp(\lambda_i)}{\sum\limits_i \left\| r_i^0 \right\| \exp(\lambda_i)}$, $i = \overline{1, d}$, называется средней энтропией.

Ставятся следующие задачи.

1. Описать соотношение размерности по Ляпунову и средней энтропии распределения норм касательных векторов для линеаризованной части системы (1); рассмотреть предельность этой энтропии для случая постоянной, переменной, а также структурно переменной матрицы Якоби.

2. Представить алгоритм приближенного оценивания экспонент Ляпунова по временному ряду единственной переменной динамической системы.

3. На примере временных рядов геомагнитных Кр, Dst и АЕ индексов оценить корреляционную размерность Грасбергера–Прокаччи, размерность фазового пространства и энтропию $\overline{E_p}$ и рассчитать размерность по Ляпунову.

РАЗМЕРНОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

В случае, когда система (1) — аттрактор, Каплан и Йорки предложили оценивать фрактальную размерность с помощью чисел Ляпунова, от которых можно перейти к экспонентам Ляпунова [2]. Представим упорядочение спектра экспонент Ляпунова в порядке их убывания: $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_d$, тогда ляпуновская размерность Каплана–Йорки приобретает следующий вид [1–2]:

$$D_L = \zeta + \frac{1}{\lambda_{\zeta+1}} \sum_{i=1}^{\zeta} \lambda_i ,$$

где ζ определяется из условий $\sum\limits_{i=1}^{\zeta} \lambda_i \ge 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\zeta+1} \lambda_i < 0$.

Отметим, что ζ — это количество первых неотрицательных экспонент Ляпунова в спектре: если экспоненты Ляпунова все отрицательны, то $\zeta = 0$ [1–2].

В работе [3] показано, что ляпуновская размерность равна информационной и определяется для двумерного случая следующим выражением: $D_I = D_L = 1 + \dfrac{H(\alpha)}{\alpha \ln(1/\lambda_1) + \beta \ln(1/\lambda_2)}$, $\beta = 1 - \alpha$, $\alpha > 0$. Это равенство также отмечается в работе [2], причем энтропия $H(\alpha)$ такая, что количество вероятностей в их распределении равно размерности фазового пространства или количеству экспонент Ляпунова.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $\alpha = \beta = 0.5$, $D_I = D_L = 1 + \dfrac{H(\alpha)}{p_1 \ln(1/\lambda_1) + p_2 \ln(1/\lambda_2)}$; $D_I = D_L = \; = 1 + \dfrac{\ln 2}{\ln(1/\lambda)} = D_C$. Таким образом, для данного случая имеется равенство $D_I = D_L = D_C$, где D_C — ёмкость; D_I — информационная размерность [2–3].

Исследования информационной и ляпуновской размерностей в работе [3] важны и особенно привлекают внимание их равенство и появление энтропии распределения вероятностей со свойствами, описанными в работах [6, 11]. По-видимому, энтропия $H(\alpha)$ может быть представлена как средняя энтропия распределения норм касательных векторов $\overline{E_p}$, поэтому последняя представляет интерес для анализа, поскольку обладает экстремальными свойствами [6, 11].

ОБ ЭНТРОПИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМ КАСАТЕЛЬНЫХ ВЕКТОРОВ И ЕЕ ПРЕДЕЛЬНОСТИ

Лемма 1. Если J — ненулевая постоянная матрица Якоби и $d \geq 2$, то $\left\| r_i^t \right\|$, $i = \overline{1, d}$, имеет распределение, максимизирующее функционал

$$\Phi_p = -\sum_i p_i \ln p_i + \beta \sum_i p_i \widetilde{l}_i^{\,t} + \mu \sum_i p_i \ln \left\| r_i^0 \right\| + \gamma \sum_i p_i \to \max , \qquad (2)$$

где β, μ, γ — множители Эйлера–Лагранжа; $\beta \widetilde{l}_i^{\,t}$ — экспоненциальный темп дивергенции (конвергенции) для каждого момента t (отметим, что экспоненты Ляпунова λ_i означают средний экспоненциальный темп дивергенции); начальные условия $Con_p = \sum_i p_i \ln \left\| r_i^0 \right\|$ и условие нормирования вероятностей p_i, $Nor_p = \sum_i p_i$.

Доказательство приводится в работе [6].

Распределение вероятностей, удовлетворяющее функционалу (2) имеет вид

$$p_i = \frac{\left\| r_i^0 \right\|^{\mu} \exp(\beta \widetilde{l}_i^{\,t})}{\sum_i \left\| r_i^0 \right\|^{\mu} \exp(\beta \widetilde{l}_i^{\,t})} .$$

Теорема 1. Если экспоненциальный темп дивергенции (конвергенции) равен $R_p = \beta \widetilde{l}_i^{\,t} t$ в (2) и спектр экспонент Ляпунова упорядочивается в порядке их убывания: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_d$, то $\beta \widetilde{l}_i^{\,t} = \lambda_i$, а $\overline{E_p} = -\sum_i \overline{p_i} \ln \overline{p_i} = 0$, $p_1 = 1$, $p_i = 0$, $i = \overline{2, d}$, $d \geq 2$.

Доказательство. Если $R_p = \beta \widetilde{l}_i^{\,t} t$, то из условия максимизации функционала (2) $d\Phi_p / dp = 0$ и с применением условия нормирования $Nor_p = \sum_i p_i = 1$, $i = \overline{1, d}$, функция распределения примет вид:

$p_i(t) = \dfrac{\left\|r_i^0\right\|^{\mu} \exp(\beta \tilde{l}_i^{\,t} t)}{\sum_i \left\|r_i^0\right\|^{\mu} \exp(\beta \tilde{l}_i^{\,t} t)}$. Выразим $\beta \tilde{l}_i^{\,t}$ через другие переменные из этого распределения: при $\mu = 1$, $\left\|r_i^t\right\| = \left\|r_i^0\right\| \exp(\beta \tilde{l}_i^{\,t} t)$, тогда $\beta \tilde{l}_i^{\,t} = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{1}{t} \ln \dfrac{\left\|r_i^t\right\|}{\left\|r_i^0\right\|}$. Поэтому $\beta \tilde{l}_i^{\,t}$ имеет определение экспонент Ляпунова при $R_p = \beta \tilde{l}_i^{\,t} t$, т.е. $\beta \tilde{l}_i^{\,t} = \lambda_i$, $i = \overline{1, d}$.

Найдем предел $p_1 = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\left\|r_1^0\right\|^{\mu} \exp(\lambda_1 t)}{\sum_i \left\|r_i^0\right\|^{\mu} \exp(\lambda_i t)} = [: \exp(\lambda_1 t)] = \dfrac{\left\|r_1^0\right\|^{\mu}}{\left[\left\|r_1^0\right\|^{\mu} + \ldots + 0\right]} = 1$.

Теперь очевидно, что $p_i = 0$, $i = \overline{2, d}$, $d \geq 2$, учитывая упорядочение $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_d$. При таких значениях распределения $\overline{E_p} = 0$.

Лемма 2. Если J — ненулевая постоянная матрица Якоби, то имеется следующий предел средней энтропии $\overline{E_p} = \lim\limits_{t \to \infty} - \sum_i \overline{p_i} \ln \overline{p_i}$, $i = \overline{1, d}$, где $\overline{p_i} = \dfrac{\left\|r_i^0\right\| \exp(\lambda_i)}{\sum_i \left\|r_i^0\right\| \exp(\lambda_i)}$; $\lambda_i = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{1}{t} \ln \dfrac{\left\|r_i^t\right\|}{\left\|r_i^0\right\|}$, где λ_i и $\overline{p_i}$ — предельные величины.

Доказательство очевидно.

Вероятности $\overline{p_i}$, $i = \overline{1, d}$ неотрицательны, их сумма равна $\sum_i \overline{p_i} = 1$. Для каждого $\overline{p_i}$, $i = \overline{1, d}$, имеется предел, поэтому существует предел $\overline{E_p} = \lim\limits_{t \to \infty} - \sum_i \overline{p_i} \ln \overline{p_i}$, $i = \overline{1, d}$.

В случае переменной матрицы Якоби $J(t)$ также существует предел энтропии $\overline{E_p}$. При структурном изменении матрицы Якоби энтропия $\overline{E_p}$ может иметь локальные максимумы и минимумы, сигнализирующие об изменении структуры.

ОЦЕНИВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ЯКОБИ ПО ВРЕМЕННОМУ РЯДУ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭКСПОНЕНТ ЛЯПУНОВА

Представляется метод оценивания локальной матрицы Якоби по временному ряду одной переменной динамической системы, а также вычисляется спектр экспонент Ляпунова.

В работе [9] приводится метод оценивания матрицы Якоби по временному ряду, где орбитальная точка фактически выбирается произвольно. Предлагаем в качестве орбитальной точки находить близкую к равновесной или часто встречающуюся.

Пусть $\{y_j\}, j = \overline{1,N}$ обозначает дискретный временной ряд в некоторый численно измеренный интервал времени Δt, т.е. $y_j = y(t_0 + (j-1)\Delta t)$, $j = \overline{1,N}$ [9], для некоторой нелинейной динамической системы $\dot{y} = F(y)$, правая часть которой представляет собой нелинейные векор-функции.

Рассмотрим небольшой шар радиусом ξ, центрированный от орбитальной точки y_j [9], или часто встречающейся, а также найдем любое множество точек $\{y_{k_s}\}, s = \overline{1,n}$, заключенных в этом шаре, т.е.

$$\{dev_y^s\} = \{y_{k_s} - y_j \mid \quad \left\| y_{k_s} - y_j \right\| \le \xi\}, \tag{3}$$

где dev^s — вектор разницы, определенной в (3), а $\left\| y_{k_s} - y_j \right\|$ — евклидова норма разницы. Поскольку орбитальная точка y_j наиболее часто встречающаяся, то это обеспечит наибольшее количество соседних точек, удовлетворяющих условию (3). После эволюции временного интервала $\tau = m\Delta t$, орбитальная точка y_j стремится к y_{j+m}, а вектор разницы отображается в такой вектор:

$$\{dev_z^s\} = \{y_{k_s+m} - y_{j+m} \mid \quad \left\| y_{k_s} - y_j \right\| \le \xi\}.$$

Если радиус ξ — достаточно малый для векторов $\{dev_y^s\}$ и $\{dev_z^s\}$, то это дает хорошую аппроксимацию векторов касательных в пространстве касательных [9], а эволюция $\{dev_y^s\}$ к $\{dev_z^s\}$ может быть представлена матрицей Jac_j [9]:

$$dev_z^i = Jac_j dev_y^s,$$

где Jac_j — локальная матрица Якоби.

Используя алгоритм наименьшей квадратичной ошибки, как в работе [9], можно получить:

$$\min_{Jac_j} SE = \min_{Jac_j} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \left\| dev_z^s - Jac_j dev_y^s \right\|^2.$$

Оценив матрицу Якоби, можно вычислить экспоненты Ляпунова:

$$\lambda_i = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{j=1}^{n} \ln \left\| Jac_j e_i^j \right\|, \; i = \overline{1,d},$$

где d — размерность фазового пространства; $\{e_i^j\}$ — множество базисных векторов пространства касательных y_j. По теореме Такенса [13], предварительно определив размерность пространства вложений d (например, с помощью алгоритма Грасбергера и Прокаччи [1]) и временную задержку t_d (например, используя автокорреляционную функцию), можно реконструировать по временному ряду одной переменной некоторой системы в d-мерном фазовом пространстве: $y_i = [x(i\tau), ..., x(i\tau + (d-1)t_d)]$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ НА ПРИМЕРЕ ГЕОМАГНИТНЫХ ИНДЕКСОВ

Рассмотрим пример, когда векторное поле системы неизвестно, а имеется лишь временной ряд одной её переменной. Предлагается применить метод вычисления экспонент Ляпунова по временному ряду, описанный выше, а также рассчитать размерность Ляпунова и корреляционную по Грасбергеру и Прокаччи [8]. Размерность фазового пространства оценивается с использованием корреляционной размерности. В ближайшей точке насыщения корреляционной размерности выбирается размерность фазового пространства.

Возьмем временные ряды Kp, Dst и AE индексов в базе данных OMNI2 [14] (за период 07.2008 – 05.2016). Предполагается, что шумовые эффекты сведены к минимуму, поэтому шум пренебрегается. Результаты расчетов приведены ниже, причем программная реализация выполнена в MatLab 2015.

Для данных временных рядов корреляционная размерность Kp, Dst и AE индексов оценена в 6,01, 4,08 и 6,39 соответственно, а размерность фазового пространства равна 8, 6 и 10 соответственно (рис. 1). Подтверждается неравенство $D_{GP} < D_L$ (рис. 2), где D_{GP} — корреляционная размерность Грасбергера и Прокаччи.

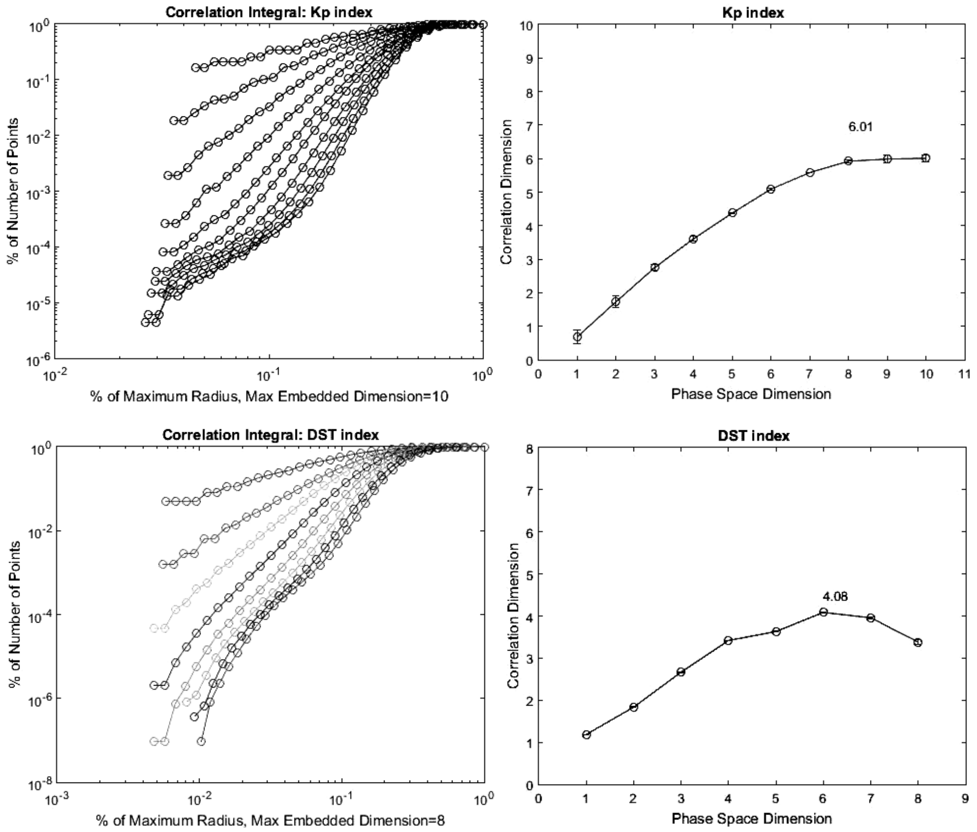
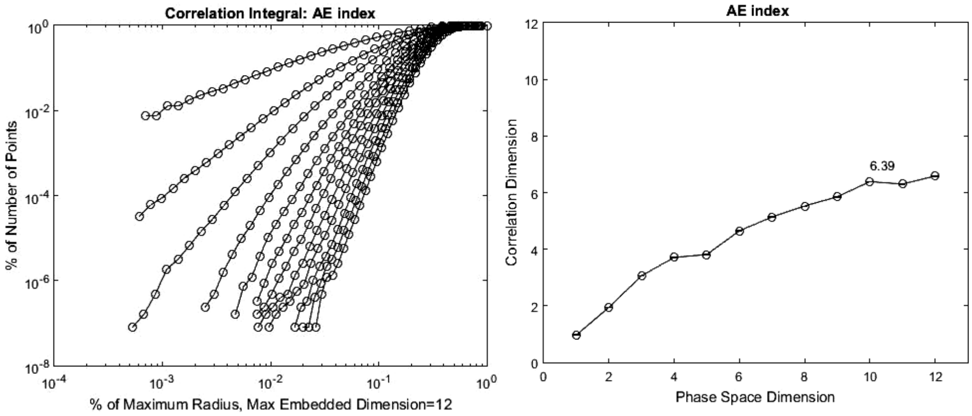


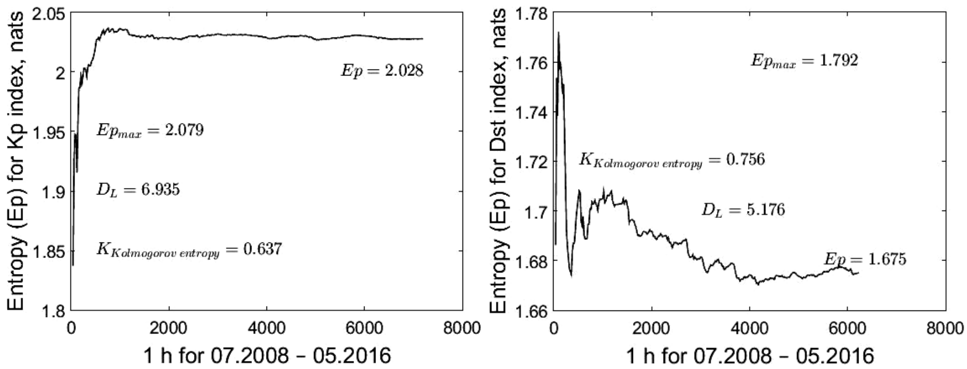
Рис. 1. Корреляционная размерность для геомагнитных индексов: *а* — корреляционные интегралы (Kp, Dst и AE индексов); *б* — оценивание размерности фазового пространства Kp, Dst и AE индексов (см. также с. 130)



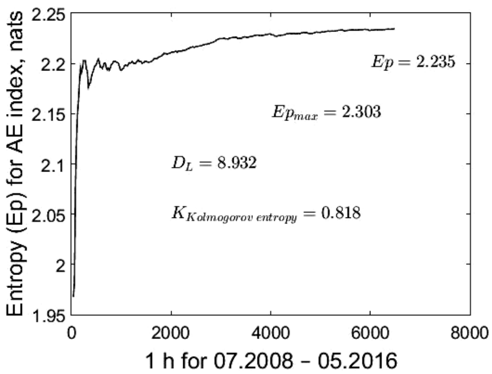
а *б*

Рис. 1. Окончание

На рис. 2 отмечается энтропия Колмогорова (K) как сумма неотрицательных показателей Ляпунова, оцененных по методу, описанному выше.



а *б*



в

Рис. 2. Размерность по Ляпунову и энтропия $\overline{E_p}$ для временных рядов геомагнитных индексов (Kp, Dst и AE): *а* — Kp индекс; *б* — Dst индекс; *в* — AE индекс

Оцененная энтропия $\overline{E_p}$ близка к максимальному значению для всех рассматриваемых индексов за период с июля 2008 по май 2016 г., т.е. для Kp индекса: $\overline{E_{p_{\max}}} = \ln(8) \approx 2{,}079$, Dst индекса: $\overline{E_{p_{\max}}} = \ln(6) \approx 1{,}792$, AE индекса: $\overline{E_{p_{\max}}} = \ln(10) \approx 2{,}303$, поэтому рассчитанная размерность Ляпунова должна быть близка к емкости.

ВЫВОДЫ

В работе обосновано совместное рассмотрение размерности по Ляпунову и энтропии распределения норм касательных векторов. Доказывается предельность этой энтропии для конечномерных динамических систем с постоянной матрицей Якоби, а также условие равенства энтропии нулю. Приводится пример численного расчета размерности по Ляпунову и упомянутой энтропии для временных рядов геомагнитных Кр, Dst и АЕ индексов. Отмечается, что у рассматриваемых индексов энтропия $\overline{E_p}$ близка к максимальному значению, а это приводит к близости размерности Ляпунова к емкости. Проведение вычисления размерности по Ляпунову и экспонент Ляпунова необходимо для реконструкции локально топологически эквивалентных динамических систем по временному ряду, а также исследования хаотической динамики. У Dst индекса средняя энтропия не стремится к пределу, что свидетельствует о переменной структуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анищенко В.С.* Лекции по нелинейной динамике / В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова. — М.: Ин-т компьют. исследований, 2011. — 516 с.
2. *Мун Ф.* Хаотические колебания: Водный курс для научных работников и инженеров / Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 312 с.
3. *Farmer J.D.* The dimension of chaotic attractors / J.D. Farmer, E. Ott, J.A. Yorke // Physica 7D. — 1983. — P. 153–180.
4. *Frederickson P.* The Liapunov Dimension of Strange Attractors / P. Frederickson, J.L. Kaplan, E.D. Yorke, J.A. Yorke // Journal of differential equations. — **49**. — 1983. — P. 185–207.
5. *Arnold V.I.* Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations / V.I. Arnold. — New York: Springer, 2011. — 351 p.
6. *Іванов С.М.* Виявлення екстремальних властивостей локально дифеоморфних систем / С.М. Іванов // Вісн. Київ. ун-ту. Серія. Фізико- математичні науки. — 2017. — №4. — С. 83–86.
7. *Іванов С.М.* Прогнозування геомагнітного Кр індексу за допомогою дискретної білінійної моделі / С.М. Іванов, В.О. Яценко // Вісн. Київ. ун-ту. — Серія. Фізико-математичні науки. — 2016. — №3. — С. 65–68.
8. *Grassberger P.* Characterization of strange attractors / P. Grassberger, I. Procaccia // Phys. Rev. Lett. — 1983. — **50**. — P. 346–349.
9. *Sano M.* Measurement of Lyapunov spectrum from a chaotic time series / M. Sano, Y. Sawada // Phys. Rev. Lett. — 1985. — N 55. — P. 1082–1085.

10. *Renyi A.* On measures of entropy and information / A. Renyi // In Proc. of the 4th Berkeley Symp. on Math. Statistics and Prob. — Univ. of Calif. Press, 1961. — Vol. 1. — P. 547–561.
11. *Іванов С.М.* Декомпозиція експонент Ляпунова хаотичних динамічних систем / С.М. Іванов // Dynam. syst. model. and stab. investig.: inter. conf., 24–26 May 2017, Kyiv, Ukraine: abstracts. — Kyiv, 2017. — P. 87.
12. *Андреев Г.Н.* Тензорное исчисление: учеб. пособие / Г.И. Андреев. — М.: МГИУ, 2008. — 184 с.
13. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics. — 1981. — N 989. — P. 366–381.
14. *GSFC/SPDF* OMNIWeb [Электронный ресурс]. — Available at: http:// omniweb.gsfc.nasa.gov/

Поступила 30.07.2018