МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

УДК 539.3
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.3.06

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИГО ТІЛА З ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНОЮ КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ОДНОВІСНОГО РОЗТЯГУ

В.С. КИРИЛЮК, О.І. ЛЕВЧУК

Анотація. Развинуто математичну модель для аналізу напруженого стану в ортотропному електропружному матеріалі з довільно орієнтованою круговою тріщиною. Модель ґрунтується на розгляді зв'язаної системи рівнянь статики електропружності. Розглянуто задачу про електричний та напружений стани в ортотропному електропружному просторі з довільно орієнтованою круговою тріщиною за однорідних навантажень. Розв'язок задачі отримано за допомогою потрійного перетворення Фур'є та Фур'є-образу функції Гріна для нескінченного анізотропного п'єзоелектричного середовища. Тестування підходу виконано для випадку розташування тріщини у площині ізотропії трансверсально-ізотропного п'єзоелектричного матеріалу, для якого існує точний розв'язок задачі. Порівняння результатів обчислень підтверджує ефективність використаного підходу. Проведено числові дослідження, вивчено розподіл напружень вздовж фронту кругової тріщини за різних її орієнтацій в електропружному ортотропному матеріалі в разі одновісного розтягу.

Ключові слова: математичне моделювання, зв'язана система рівнянь електропружності, ортотропний п'єзоелектричний матеріал, кругова тріщина, довільна орієнтація, одновісний розтяг, напружений стан.

ВСТУП

Використання у процесі створення перетворювачів енергії та датчиків для вимірювальних приладів п'єзоелектричних крихких матеріалів стимулює інтерес до вивчення та аналізу розподілу напружень та концентрації силових і електричних полів у п'єзоелектричних тілах з дефектами типу порожнини, включень, тріщин. Але розв'язання просторових задач електропружності пов'язане зі значними труднощами математичного характеру, оскільки основна система рівнянь електропружності є зв'язаною стосовно силових і електричних полів системою диференціальних рівнянь у частинних похідних [1, 4], розв'язок якої отримати набагато важче, ніж розв'язок чисто пружної задачі. Тому на цей час з більшою повнотою вивчено простіші двовимірні задачі електропружності, серед яких можна вирізнити праці [11, 13, 14, 23, 27], присвячені дослідженню електропружного стану як поблизу одиночних порожнин, включень, тріщин, так і у взаємодії кількох концентраторів електричних і механічних полів. У працях [5, 24] запропоновано методологічно подібні підходи до побудови загальних розв'язків зв'язаної системи тривимірних статичних рівнянь електропружності для трансверсально-ізотропних тіл, за допомогою яких отримано точні розв'язки низки задач електропружності за спеціальної орієнтації концентратора напружень відносно осі симетрії трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу. З метою їх використання традиційно припускається, що вісь симетрії матеріалу збігається з віссю обертання концентратора напружень або вона перпендикулярна до площини розташування плоскої тріщини [6, 8–12, 16–18, 20–24, 27]. За інших орієнтацій концентратора силових та електричних полів відносно осі симетрії трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу для тривимірних задач електропружності ці підходи є неефективними.

Відзначимо, що результати досліджень коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) для кругових тріщин у пружних тілах з достатньою повнотою відображено у монографіях [3, 7, 15, 26]. Для елетропружних трансверсально-ізотропних тіл (за обмежень на орієнтацію концентраторів напружень) подібні дослідження проведено у працях [6, 8, 9, 10, 16–18, 22]. Розподіл КІН для довільної орієнтації кругової тріщини відносно осі симетрії електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу вивчено у праці [12]. Напружений і електричний стани в ортотропному електропружному матеріалі з круговою та еліптичною тріщинами у площині ортотропії матеріалу (за спеціальної орієнтації плоскої тріщини) у разі однорідних навантажень досліджено у працях [2, 17] відповідно.

У роботі вперше вивчено розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень для довільно орієнтованої кругової тріщини в ортотропному електропружному матеріалі за одновісного розтягу. Робота ґрунтується на узагальненні підходу [26] (для анізотропного чисто пружного простору з еліптичною тріщиною) на випадок ортотропного електропружного матеріалу. Під час розв'язання задачі використано потрійне (по просторових координатах) перетворення Фур'є, Фур'є-образ функції Гріна для електропружного анізотропного матеріалу і теорему Коші про лишки. Спеціальні контурні інтеграли, що виникають у процесі розв'язання задачі, обчислено за квадратурними формулами Гауса. Для окремого випадку (розташування тріщини у площині ізотропії електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу) отримані результати узгоджуються з даними, знайденими іншими методами. Обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень і коефіцієнти інтенсивності електричної індукції вздовж межі кругової тріщини за різних її орієнтацій в ортотропному п'єзоелектричному матеріалі.

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай ортотропний електропружний простір містить кругову тріщину. Припустімо, що одна з осей симетрії матеріалу збігається з віссю Oz, кут між якою і нормаллю до площини тріщини α, а на електропружний простір діють однорідні силові та електричні поля. Наявність тріщини у матеріалі як концентратора призводить до виникнення збурень електричного і напруженого станів.

Повна система статичних рівнянь електропружності набуває такого вигляду:

рівняння рівноваги за відсутності об'ємних сил

$$\sigma_{ij,j} = 0\,; \tag{1}$$

рівняння вимушеної електростатики

$$D_{i,i} = 0;\ E_i = -\Psi_{,i}\,; \tag{2}$$

співвідношення Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\,;$$

рівняння стану

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + e_{nij}\Psi_{,n}\,;\ D_i = e_{imn}\varepsilon_{mn} - k_{in}\Psi_{,n}\,, \tag{3}$$

де σ_{ij}, ε_{ij}, u_i, D_i, E_i, Ψ — компоненти напружень, деформацій, переміщень, електричних переміщень (електричної індукції), напруженість електричного поля і електричний потенціал відповідно. Також уведено позначення тензорів: C_{ijmn}, e_{imn}, k_{ij} — пружні модулі, п'езомодулі, діелектричні проникності. Для п'єзоелектричних тіл, які є ортотропними за своїми властивостями, пружні характеристики матеріалу описуються дев'ятьма незалежними сталими $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}$, $c_{13}, c_{23}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$, п'езомодулі — п'ятьма величинами e_{15}, e_{24}, e_{31}, e_{32}, e_{33}, діелектричні проникності —трьома незалежними сталими k_{11}, k_{22}, k_{33}. Компоненти вказаних тензорів пов'язані з відповідними незалежними сталими таким чином:

$$C_{1111} = c_{11}\,;\ C_{2222} = c_{22}\,;\ C_{3333} = c_{33}\,;\ C_{1122} = C_{2211} = c_{12}\,;$$

$$C_{1133} = C_{3311} = c_{13}\,;\ C_{2233} = C_{3322} = c_{23}\,;\ C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}\,;$$

$$C_{3131} = C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}\,;\ C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}\,; \tag{4}$$

$$e_{113} = e_{131} = e_{15}\,; e_{223} = e_{232} = e_{24}\,;\ e_{311} = e_{31}\,; e_{322} = e_{32}\,;\ e_{333} = e_{33}\,; k_{11}\,;\ k_{22}\,;\ k_{33}\,.$$

Інші компоненти цих трьох тензорів дорівнюють нулю.

Відзначимо, що зі співвідношень (1)–(3) і наведених компонентів тензорів (4) випливають рівняння статики електропружного ортотропного тіла стосовно переміщень та електричного потенціалу.

Для розв'язання задачі зручно ввести нову систему координат, у якій напрямок однієї з осей збігається з напрямком нормалі до площини тріщини. Припустімо, що вихідна система координат $Oxyz$ залежить від нової (локальної) системи $Ox^1y^1z^1$, оскільки вона отримана з вихідної системи координат обертанням навколо осі Ox на кут α. Тоді тензори пружних модулів, п'езомодулів і діелектричених сталих C_{ijkl}^{α}, e_{ijk}^{α}, k_{ij}^{α} у новій системі координат отримаємо за допомогою перетворень тензорів відповідних рангів: $C_{ijkl}^{\alpha} = C_{mnpk}\alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kp}\alpha_{lq}$; $e_{ijk}^{\alpha} = e_{mnp}\,\alpha_{im}\,\alpha_{jn}\,\alpha_{kp}$; $k_{ij}^{\alpha} = k_{mn}\,\alpha_{im}\,\alpha_{jn}$, де α_{ij} — матриця перетворення вигляду

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Довільну орієнтацію тріщини у матеріалі можна отримати за допомогою послідовного обертання на кути α, β, γ навколо осей старої системи координат $0x, 0y, 0z$ відповідно. Тоді матриця перетворень T_{ij} матиме вигляд

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}.$$

Вона є результатом послідовного перемноження трьох матриць, подібних до виразу (5), що відображають праві обертання навколо кожної з осей координат:

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}; \ \beta_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}; \ \gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нові тензори пружних модулів, п'єзомодулів і діелектричних сталих $C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$, $e_{ijk}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$, $k_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ отримаємо за допомогою перетворень тензорів відповідних порядків:

$$C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = C_{mnpk}T_{im}T_{jn}T_{kp}T_{lq}; \ e_{ijk}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = e_{mnp}\,T_{im}\,T_{jn}\,T_{kp}; \ k_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = k_{mn}\,T_{im}\,T_{jn},$$

де за індексами, що повторюються, виконується підсумовування.

Далі у тексті роботи використано звичайний тензорний запис виразів, тобто за індексами , що повторюються у виразах, виконується підсумовування.Без жодних змін у схемі розв'язання задачі замість перетворення T_{ij}, зумовленого обертанням навколо осей координат $0x, 0y, 0z$, цілком аналогічно можна було б увести інше перетворення, наприклад, з використанням кутів Ейлера. Але для наочності у роботі вибрано перетворення, що відповідає послідовним обертанням навколо трьох різних осей координат.

Для опису електропружного стану введемо більш уніфіковані позначення [12], на основі яких запишемо такі вирази:

Пружні переміщення і електричний потенціал

$$U_M = \begin{cases} u_m, & M = 1, 2, 3; \\ \Psi, & M = 4. \end{cases} \qquad (6)$$

Пружні деформації або електричне поле

$$Z_{Mn}=\begin{cases}\varepsilon_{mn}, & M=1,2,3;\\ \Psi_n, & M=4.\end{cases} \quad (7)$$

Напруження або електричні переміщення

$$\Sigma_{iJ}=\begin{cases}\sigma_{ij}, & J=1,2,3;\\ D_i, & j=4.\end{cases} \quad (8)$$

Електропружні модулі

$$E^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{iJMn}=\begin{cases}C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijmn}, & J,M=1,2,3;\\ e^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{nij}, & J=1,2,3;\ M=4;\\ e^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{imn}, & J=4;\ M=1,2,3;\\ -k^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{in}, & J,\ M=4.\end{cases} \quad (9)$$

За допомогою позначень (6)–(9) рівняння стану (3) можна подати як

$$\Sigma_{iJ}=E^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{iJMn}Z_{Mn}\,. \quad (10)$$

Задачу для плоскої кругової тріщини не поділяють, як у випадку розташування тріщини в площині ізотропії для трансверсально-ізотропного матеріалу, на дві — симетричну і антисиметричну. Її розглядають у загальній постановці, коли у граничні умови одночасно входять і нормальні, і дотичні зусилля, а також нормальна складова вектора електричної індукції на поверхні тріщини. За однорідних силових і електричних навантажень маємо такі граничні умови:

$$\tau^{\pm}_{13}\big|_S=f^{(\alpha,\beta,\gamma)};\quad \tau^{\pm}_{23}\big|_S=g^{(\alpha,\beta,\gamma)};$$

$$\sigma^{\pm}_{33}\big|_S=-P^{(\alpha,\beta,\gamma)};\quad D^{\pm}_3\big|_S=-D^{(\alpha,\beta,\gamma)})\ ;U_M(\vec{x})\to 0\,,\ \text{якщо}\ |\vec{x}|\to\infty\,,$$

де S — поверхня тріщини, віднесена до нової системи координат (отримана послідовним обертанням на кути α,β,γ навколо осей старої системи); навантаження подано у новій системі координат. За заданого основного напруженого стану та електричної індукції в середовищі і вільної від силових і електричних навантажень поверхні тріщини, виразивши електронапружений стан суперпозицією основного і збуреного станів, отримаємо граничні умови для визначення збуреного стану.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Функція Гріна $G_{IJ}(\vec{x}-\vec{x}')$ для нескінченного електропружного анізотропного простору (фундаментальний розв'язок) задовольняє рівняння:

$$E^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{kJMn}G_{JM,kn}+\delta_{JM}\delta(\vec{x}-\vec{x}')=0\,; \quad (11)$$

де $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ — дельта функція Дірака; δ_{JM} — символ Кронекера. Кома після індексу означає диференціювання за відповідною змінною. Скористаємось інтегральним виразом фундаментального розв'язку

$$G_{JM}(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A_{JM}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi})\, e^{i\vec{\xi}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 , \tag{12}$$

де $A_{JM}(\vec{\xi})$ — відповідні алгебричні доповнення елементів матриці

$$\{K_{JM}(\vec{\xi})\} = \{E_{iJMn}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\, \xi_i \xi_n\} ; \tag{13}$$

$D(\vec{\xi})$ — її визначник, який є багаточленом восьмого порядку.

Використовуючи у подальших перетвореннях вирази (10)–(13), подамо збурений електричний і напружений стани, узагальнюючи чисто пружний випадок, за допомогою невідомих стрибків переміщень і електричного потенціалу через двосторонню поверхню тріщини:

$$U_I(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{N=1}^{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{lJM3}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\, \xi_l^N\, A_{IJ}(\vec{\xi}^N)}{\partial D(\vec{\xi}^N)/\partial \xi_3} \iint_S b_M(\vec{x}')\, e^{-i\vec{\xi}^N\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} d\xi_1 d\xi_1 dx_1' dx', \tag{14}$$

де для кругової тріщини невідомий вектор $\vec{b}(\vec{x})$ набуває вигляду

$$\vec{b}(\vec{x}) = \vec{b}^{(0)}(1 - x_1^2/a^2 - x_2^2/a^2)^{1/2} ; \tag{15}$$

a — радіус кругової тріщини; $\vec{b}^{(0)}$ — сталий вектор четвертого порядку, компоненти якого у загальному випадку є комплексними числами. Підсумовування у формулі (14) з використанням виразу (15) виконуємо для ξ_3^M — коренів рівняння $D(\vec{\xi}) = 0$ з від'ємною уявною частиною для $x_3 > 0$; вектор $\vec{\xi}^M$ має вигляд $\vec{\xi}^M = \left(\xi_1, \xi_2, \xi_3^M(\xi_1, \xi_2)\right)$. Компоненти напружень і електричної індукції визначаємо за виразом

$$\Sigma_{iJ}(\vec{x}) = E_{iJKl}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\, U_{K,l} =$$

$$= \left(\frac{-i}{4\pi^2}\right)\sum_{N=1}^{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\iint_S \frac{E_{iJKl}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\, E_{pQM3}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\, \xi_p^N \xi_l^N A_{KQ}(\vec{\xi}^N)}{\partial D(\vec{\xi}^N)/\partial \xi_3} \times$$

$$\times\, b_M(\vec{x}')\, e^{-i\vec{\xi}^M\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx_1 dx_2 .$$

Використовуючи перетворення, аналогічні пружному випадку [26], у площині тріщини за однорідних силових і електричних навантажень у матеріалі знаходимо компоненти напружень і електричної індукції в площині тріщини у вигляді

$$\Sigma_{iJ}(\vec{x}) = \left(\frac{-i}{4}\right)\int_0^{2\pi}\sum_{N=1}^{4} F_{iJM}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\eta_1/a_1, \eta_2/a_2, \xi_3^N(\eta_1/a_1, \eta_2/a_2))\, b_M^{(0,0)} d\varphi , \tag{16}$$

де функція

$$F_{iJM}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=E_{iJKl}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\,E_{pQM3}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\,\xi_p^N\,\xi_l^N\,\frac{A_{KQ}(\vec{\xi}^N)}{\partial D(\vec{\xi}^N)/\partial\xi_3}\,. \qquad (17)$$

Одновимірний інтеграл у формулах (16) (з використанням позначень (17)) обчислюємо за квадратурними формулами Гауса.

Після додаткового аналізу асимптотичних виразів для напружень і електричної індукції в площині тріщини і, скороставшись визначенням коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{I}, K_{II}, K_{III} та електричної індукції K_D, отримаємо:

$$k_{iJ}=i\sqrt{\pi a}\,(x_1^2/a_1^4+x_2^2/a_2^4)^{-1/4}\sum_{N=1}^{4}F_{iJM}(x_1/a_1^2,x_2/a_2^2,\xi_3^N(x_1/a_1^2,x_2/a_2^2))b_M^{(0,0)};$$

$$K_1=k_{33};\; K_{\text{II}}=k_{31}n_1+k_{32}n_2;\; K_{\text{III}}=k_{31}(-n_2)+k_{32}n_1;\; K_{\text{IV}}=K_D=k_{34}. \quad (18)$$

Для кругової тріщини компоненти вектора нормалі мають вигляд $n_1=(x_1/a^2)/(x_1^2/a^4+x_2^2/a^4)^{1/2}$; $n_2=(x_2/a^2)/(x_1^2/a^4+x_2^2/a^4)^{1/2}$. Використовуючи для обчислення одновимірних інтегралів метод квадратур Гауса і задовольняючи граничні умови на поверхні тріщини, знаходимо невідомі значення стрибків переміщень і електричної індукції, а потім за формулами (18) обчислюємо коефіцієнти інтенсивності напружень і електричної індукції.

Для апробації використовуваного підходу спочатку розглянемо задачу про кругову тріщину в електропружному трансверсально-ізотропному матеріалі, яка розташована у площині його ізотропії, за сталого тиску P_0 на поверхні тріщини та зсувних зусиль $\sigma_{13}^0\neq 0$. Нормальна компонента електричної індукції D_3^0 у розгляді задачі вважалась нульовою. У цьому випадку коефіцієнти інтенсивності напружень K_1 згідно з результатами праці [16] не залежать від властивостей матеріалу і збігаються з їх виразом для чисто пружного ізотропного матеріалу (для такої самої форми тріщини і того ж симетричного навантаження), а значення $K_D=0$. Водночас коефіцієнти інтенсивності напружень K_{II}, K_{III} у разі зсуву залежать від пружних і електричних властивостей матеріалу [14]. Згідно з дослідженнями [14] для знаходження КІН K_{II}, K_{III} в електропружному трагсверсально-ізотропному матеріалі з плоскою тріщиною у площині ізотропії матеріалу достатньо взяти їх вирази для ізотропного пружного матеріалу за тих самих зсувних навантажень, а замість коефіцієнта Пуасона ν у відповідних виразах КІН підставити значення ν_{PIEZO}, яке обчислюється з урахуванням властивостей електропружного матеріалу за спеціальною процедурою. Оскільки формула для визначення цієї величини надто громіздка, а процедура її отримання детально описана у праці [14], наведемо значення ν_{PIEZO} для окремих п’езоелектричних матеріалів у таблиці [14]. Вихідні дані про електричні і пружні властивості відповідають наведеним у працях [1, 9, 12, 14] характеристикам. Значення ν_{ELAST}, знайдено тільки за пружними властивостями трансверсально-ізотропного матеріалу (без урахування його електричних властивостей) згідно з результатами [14]. Значення ν_{CONTROL} отримано з виразу ν_{PIEZO} за наявності дуже слабких електричних властивостей у матеріалів (під час розрахунків їх знайдено домноженням значень п'езомодулів e_{31}, e_{15}, e_{33} і діелектричних проникностей k_{11}, k_{33} відповідних матеріалів на 10^{-12}). Видно, що згідно з даними таблиці значення ν_{CONTROL} і ν_{ELAST} збігаються з високою точністю.

Значення ν_{PIEZO} для деяких електропружних матеріалів

Значення	PZT-4	PXE-5	ЦТС-19	PZT-5	PZT-7A	BaTiO3	PZT-5H
ν_{PIEZO}	0,48513	0,48815	0,45958	0,51190	0,47324	0,34369	0,37867
ν_{ELAST}	0,35034	0,34591	0,36359	0,36965	0,35239	0,29768	0,30074
ν_{CONTROL}	0,35034	0,34591	0,36359	0,36965	0,35239	0,29768	0,30074

Згідно з результатами праць [13, 14] для електропружного простору, що містить дископодібну тріщину, за внутрішнього тиску P_0 на поверхні тріщини і зсуву σ_{13}^0 у п'єзоелектричному матеріалі маємо такі вирази КІН уздовж фронту тріщини:

$$K_{\text{I}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(P_0\sqrt{a})\,; \quad K_{\text{II}} = \frac{4}{(2-\nu_{\text{PIEZO}})\sqrt{\pi}}(\sigma_{13}^0\sqrt{a})\cos\varphi\,;$$

$$K_{\text{III}} = \frac{-4(1-\nu_{\text{PIEZO}})}{(2-\nu_{\text{PIEZO}})\sqrt{\pi}}(\sigma_{13}^0\sqrt{a})\sin\varphi\,. \qquad (19)$$

Для апробації використовуваного підходу виконано розрахунки КІН K_{I}, K_{II} і K_{III} для випадку розташування кругової тріщини у площині ізотропії електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу за допомогою аналітичних виразів (19) і (18). Для п'єзоелектричних матеріалів з таблиці результати досліджень узгоджувались між собою (до 7 значущих цифр). Для обчислень одновимірних інтегралів у виразах (16) використано квадратурну формулу Гауса за 24 вузлами.

Подальше тестування підходу та розробленої на його основі комп'ютерної програми для електропружного ортотропного матеріалу з круговою трішиною для окремих випадків (довільно орієнтована дископодібна тріщина у пружному ортотропному та електропружному трансверсально-ізотропному матеріалах, кругова тріщина у площині ортотропії електропружного ортотропного матеріалу) підтвердило узгодженість результатів досліджень з даними праць [2, 12, 15].

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо такі матеріали: 1) п'єзоелектричний ортотропний матеріал $Ba_2NaNb_5O_{15}$, електропружні властивості якого (усього 17 незалежних параметрів) наведено у праці [3]; 2) електропружний п'єзокерамічний матеріал PZT-4 (10 незалежних електропружних параметрів, значення яких наведено у праці [1]); 3) пружний ортотропной матеріал, пружні властивості якого (усього 9 незалежних параметрів) відповідають значенням ортогонально-армованого 2:1 склопластику і наведені у праці [18]. Вважатимемо, що кругова тріщина довільним чином розташована в електропружному матеріалі, її орієнтація визначається кутом обертання α навколо осі 0*x* і відповідно матрицею перетворення координат (5). На рис. 1, 2, 3 зображено зміну КІН K_{I} вздовж фронту кругової тріщини одиничного радіуса у п'єзоелектричному ортотропному матеріалі $Ba_2NaNb_5O_{15}$, електропружному п'єзокерамічному матеріалі PZT-4 і ортогонально-армованому 2:1 склопластику відповідно для різних випадків орієнтації кругової тріщини. Криві *1*, *2, 3, 4* на цих рисунках відповідають значенням $\alpha = 0; 30^0; 60^0; 90^0$ для випадку одновісного розтягу в напрямку, перпендикулярному до площини розташування тріщини.

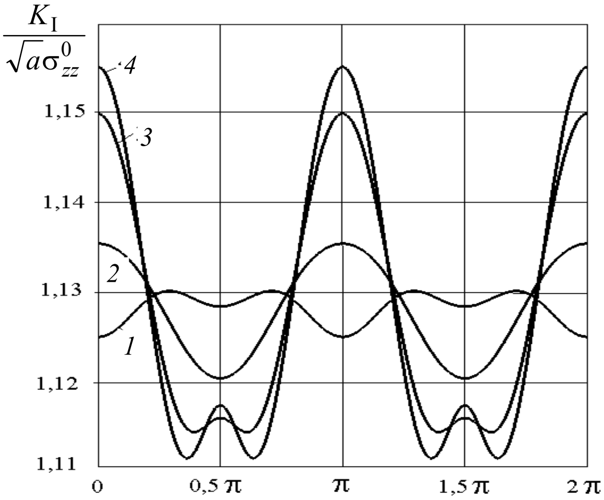

Рис. 1

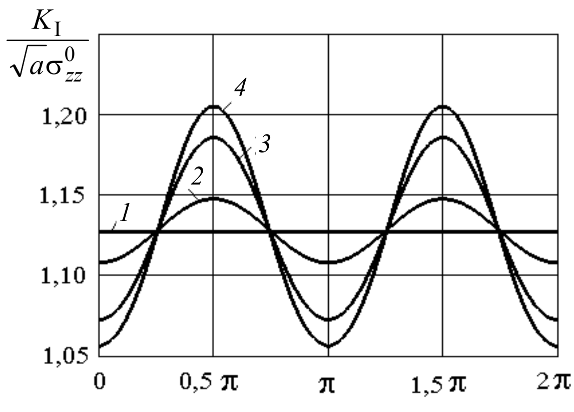

Рис. 2

Видно, що орієнтація тріщини у матеріалі істотно впливає на значення і характер розподілу коефіцієнтів інтенсивності напружень уздовж фронту тріщини. В окремих випадках вплив орієнтації на значення КІН K_{I} перевищував 22%.

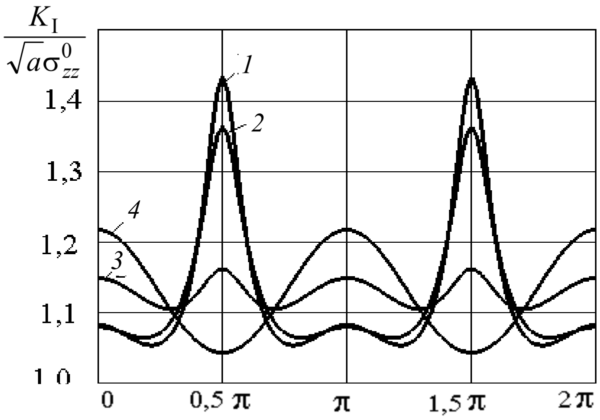

Рис. 3

На рисунках 4, 5 відображено появу ненульових значень коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{II} і K_{III} за симетричного навантаження (одновісного розтягу) за рахунок орієнтації тріщини у K_{II} і K_{III} ортогонально-армованому 2:1 склопластику (якщо її розташування не в площині симетрії матеріалу).

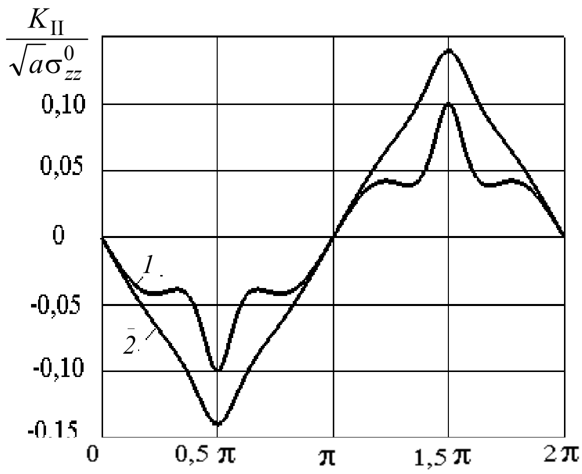

Рис. 4

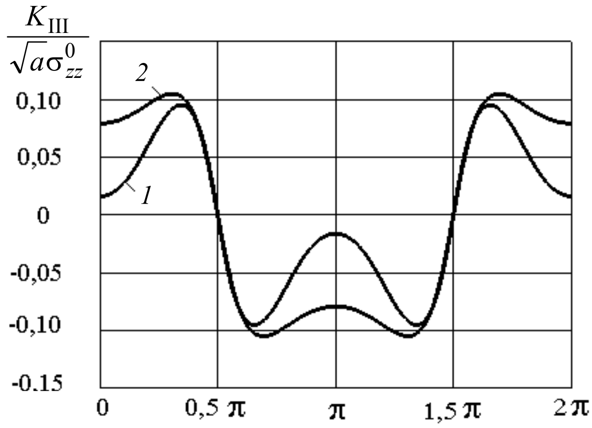

Рис. 5

Криві *1* і *2* на цих рисунках відповідають значенням $\alpha = 30^\circ$ і $\alpha = 60^\circ$. Для матеріалів $Ba_2NaNb_5O_{15}$ і PZT-4 у разі розташування тріщини не в площині симетрії матеріалу внаслідок симетричного навантаження також виникають ненульові значення КІН K_{II} і K_{III}, але за величиною вони дещо менші, ніж для ортогонально-армованого 2:1 склопластику.

ВИСНОВОК

У роботі за допомогою математичної моделі, що враховує зв'язаність силових і електричних полів у матеріалі, досліджено електронапружений стан у ортотропному п'єзоелектричному просторі з довільно орієнтованою круговою тріщиною. Вивчено розподіл напружень вздовж фронту кругової тріщини для різних випадків її орієнтації у матеріалі за одновісного розтягу.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гринченко В.Т.* Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга // Механика связанных полей в элементах конструкций: в 6 т.; Т. 1. — К.: Наук. думка, 1989. — 279 с.
2. *Кирилюк В.С.* Математическое моделирование и анализ напряженного состояния в ортотропной пьезоэлектрической среде с круговой трещиной / В.С. Кирилюк, О.И. Левчук, Е.В. Гавриленко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 3.— С.117–126.
3. *Шульга М.О.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин / М.О. Шульга, В.Л. Карлаш. — К.: Наук. думка, 2008. — 270 с.
4. *Chen W.Q.* 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium / W.Q. Chen, C.W. Lim // Int. J. Fract. — 2005. — **131**, N 3. — P. 231–246.
5. *Chen W.Q.* Exact three-dimensional solutions of laminated orthotropic piezoelectric rectangular plates featuring interlaminar bonding imperfections modeled by a general spring layer / W.Q. Chen, J.B. Cai, G.R. Ye, Y.F. Wang // International Journal of Solids and Structures. — 2004. — **41**, N 18–19. — P. 5247–5263.
6. *Chiang C.R.* The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material / C.R. Chiang, G.J. Weng // Int. J. Fract. — 2005. — **134**, N 3–4. — P. 319–337.
7. *Dai L.* Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids / L. Dai, W. Guo, X. Wang // Int. J. Solids and Struct. — 2006. — **43**, N 6. — P. 1818–1831.
8. *Dunn M.L.* Electroelastic field concentrations in and around inhomogeneities in piezoelectric solids / M.L. Dunn, M. Taya // J. Appl. Mech. — 1994. — **61**, N 4. — P. 474–475.
9. *Kaloerov S.A.* Problem of Electromagnetoviscoelasticity for Multiply Connected Plates / S.A. Kaloerov, A.A. Samodurov // International Applied Mechanics. — 2015. — **51**, N 6. — P.623–639.
10. *Kaloerov S.A.* Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media / S.A. Kaloerov // Int. Appl. Mech. — 2007. — **43**, N 6. — P. 631–637.
11. *Karnaukhov V.G.* Forced Resonant Vibrations and Self-Heating of Solids of Revolution Made of a Viscoelastic Piezoelectric Material / V.G. Karnaukhov, V.I. Kozlov, A.V. Zavgorodnii, I.N. Umrykhin // International Applied Mechanics. — 2015. — **51**, N 6. — P. 614–622.
12. *Kirilyuk V.S.* Elastic state of a transversely isotropic piezoelectric body with an arbitrarily oriented elliptic crack / V.S. Kirilyuk // Int. Appl. Mech. — 2008. — **44**, N 2. — P. 150–157.

13. *Kirilyuk V.S.* On the stress state of a piezoceramic body with a flat crack under symmetric loads / V.S. Kirilyuk // Int. Appl. Mech. — 2005. — **41**, N 11. — P. 1263–1271.
14. *Kirilyuk V.S.* Stress state of a piezoelectric ceramic body with a plane crack under antisymmetric loads / V.S. Kirilyuk // Int. Appl. Mech. — 2006. — **42**, N 2. — P. 152–161.
15. *Kirilyuk V.S.* Stress state of an elastic orthotropic medium with elliptical crack under tension and shear / V.S. Kirilyuk // International Applied Mechanics. — 2005. — **41**, N 4. — P.358–366.
16. *Kirilyuk V.S.* Thermostressed state of a piezoelectric body with a plane crack under symmetric thermal load / V.S. Kirilyuk // International Applied Mechanics. — 2008. — **44**, N 3. — P. 320–330.
17. *Kirilyuk V.S.* Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Material with an Elliptic Crack / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk // International Applied Mechanics. — 2017. — **53**, N 3. — P.305–312.
18. *Lekhnitskii S.G.* Theory of Elasticity of an Anisotropic Body (in English) / S.G. Lekhnitskii. — Moscow: Mir Publ. — 1981. — 430 p.
19. *Lin S.* Electroelastic analysis of a penny-shaped crack in a piezoelectric ceramic under mode I loading / S. Lin, F. Narita, Y. Shindo // Mech. Res. Com. — 2003. — **30**, N 4. — P. 371–386.
20. *Podil'chuk Yu.N.* Representation of the general solution of statics equations of the electroelasticity of a transversally isotropic piezoceramic body in terms of harmonic functions / Yu.N. Podil'chuk // International Applied Mechanics. — 1998. — 34, N 7. — P. 623–628.
21. *Podil'chuk Yu.N.* Electroelastic equilibrium of transversally isotropic, piezoceramic media containing cavities, inclusions, and cracks / Yu. N. Podil'chuk // International Applied Mechanics. — 1998. — 34, N 10. — P.1023–1034.
22. *Shang F.* Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part 1: Analitical development / F. Shang, M. Kuna, T. Kitamura // Theor. Appl. Fract. Mech. — 2003. — **40**, N 3. — P. 237–246.
23. *Sladek J.* Crack analyses in porous piezoelectric brittle materials by the SBFEM // Engineering Fracture Mechanics / J. Sladek, V. Sladek, S. Krahulec, C. Song. — 2016. — V. 160. — P. 78–94.
24. *Wang Y.J.* The anti-plane solution for the edge cracks originating from an arbitrary hole in a piezoelectric material / Y.J. Wang, C.F. Gao, H.P. Song // Mechanics Research Communications. — 2015. — V. 65. — P. 17–23.
25. *Wang Z.K.* The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media / Z.K. Wang, B.L. Zheng // Int. J. Solids Structures. — 1995. — **32**, N 1. — P. 105–115.
26. *Willis J.R.* The stress field around an elliptical crack in an anisotropic elastic medium / J.R. Willis // Int. J. Eng. Sci. — 1968. — 6, N 5. — P. 253–263.
27. *Zhang T.Y.* Fracture behaviors of piezoelectric materials / T.Y. Zhang, C.F. Gao // Theor. Appl. Fract. Mech. — 2004. — **41**, N 1–3. — P. 339–379.
28. *Zhao M.H.* Singularity analysis of planar cracks in three-dimensional piezoelectric semiconductors via extended displacement discontinuity boundary integral equation method / M.H. Zhao, Y. Li, Y. Yan, C.Y. Fan // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2016. — V. 67. — P. 115–125.
29. *Zhao M.H.* Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D poezoelectricsemiconductors / M.H. Zhao, Y.B. Pan, C.Y. Fan, G.T. Xu // International Journal of Solids and Structures. — 2016. — V. 94–95. — P. 50–59.
30. *Zhou Y.* Semi-analytical solution for orthotropic piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections / Y. Zhou, W.Q. Chen, C.F. Lu // Composite Structures. — 2010. — **92**, N 4. — P. 1009–1018.

Надійшла 10.09.2018