УДК 517.94
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.1.10

ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ МАТЬЄ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Ю.Є. БОХОНОВ

Анотація. Запропоновано підхід до знаходження періодичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння Матьє із запізненням, що використовується в теорії коливальних процесів. Відомо застосування числово-аналітичного методу знаходження періодичного розв'язку цього рівняння шляхом зведення рівняння другого порядку до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Використано розроблену автором методику знаходження періодичних розв'язків нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яку поширено також на рівняння із запізненням без зведення до системи. Побудовано функцію Гріна для самоспряженого диференціального оператора другої похідної, визначеного на функціях, які задовольняють періодичні крайові умови. Наведено необхідні і достатні умови існування періодичного розв'язку рівняння Матьє. Сам розв'язок знайдено методом наближених обчислень. Отримано оцінку швидкості збіжності методу.

Ключові слова: рівняння Матьє, періодичні розв'язки, нелінійне диференціальне рівняння із запізненням, періодична крайова задача, функція Гріна, самоспряжений диференціальний оператор.

ВСТУП

У роботі знайдено періодичні розв'язки рівняння Матьє із запізненням, що базується на використанні методики автора для звичайного нелінійного диференціального рівняння другого порядку та рівняння із запізненням ([1, 2]). Періодичний розв'язок інтерпретується як розв'язок крайової задачі з періодичними умовами. У процесі дослідження буде побудовано функцію Гріна такої задачі та послідовні наближення періодичного розв'язку.

Пропонована методика є альтернативною до відомого числово-аналітичного методу, викладеного у працях [3], [4], який також застосовується до рівняння Матьє.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Знаходження періодичного розв'язку диференціального рівняння Матьє із запізненням зводиться до розв'язання періодичної крайової задачі:

$$\ddot{x} = \lambda(1+\cos\nu t)\, x(t-\delta) - \beta x^3(t) + \sin\nu t\,; \tag{1}$$

$$x(0)=x(T),\ \dot{x}(0)=\dot{x}(T)\,, \tag{2}$$

де $T=\dfrac{2\pi}{\nu}$. Зазвичай $0<\delta<T$.

Досліджувати рівняння будемо в області, що визначається умовами

$$t\in(-\infty,\infty),\ |x(t)|\le A;\ \ |x(t-\delta)|\le A. \tag{3}$$

Оцінимо праву частину рівняння (3), яку позначатимемо через $f(t,x(t),x(t-\tau))$:

$$|f(t,x(t),x(t-\tau))| = \left|\lambda(1+\cos\nu t)\,x(t-\delta)-\beta x^3(t)+\sin\nu t\right| \le$$

$$\le 2A|\lambda|+A^3|\beta|+1=M\,. \tag{4}$$

Очевидно, що функція у правій частині рівняння задовольняє умову Ліпшица:

$$|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)|\le 2|\lambda||x_1-x_2|+3A^2|\beta||y_1-y_2|. \tag{5}$$

Увівши позначення

$$K_0=3A^2,\ \ \tilde{K}_0=2|\lambda|,\ \ K=K_0+\tilde{K}_0\,, \tag{6}$$

перепишемо умову (5) у вигляді

$$|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)|\le K_0|x_1-x_2|+\tilde{K}_0|y_1-y_2|. \tag{7}$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЕРІОДИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

У праці автора [2] запропоновано методику знаходження періодичних розв'язків, що еквівалентно виконанню крайових умов (2) для рівняння із запізненням більш загального вигляду:

$$\ddot{x}=f(t,x(t),x(t-\delta),\dot{x}(t),\dot{x}(t-\delta))\,,$$

тобто функція в правій частині рівняння може залежати також від похідних. Побудовано функцію Гріна періодичної крайової задачі:

$$G(t,\tau)=\frac{1}{2T}(2t\tau-\tau^2)+\frac{1}{2}\begin{cases} t-\tau, & 0\le\tau\le t\le T;\\ \tau-t, & 0\le t\le\tau\le T.\end{cases}$$

Періодичний розв'язок рівняння, права частина якого не залежить від похідних, знаходимо методом послідовних наближень:

$$x_{m+1}(t)=x_0+\frac{1}{2T}\left(\int_0^t\left(\frac{T^2}{12}-\left(\tau-t+\frac{T}{2}\right)^2\right)f(\tau,x_m(\tau),x_m(\tau-\delta))d\tau\ +\right.$$

$$\left.+\int_t^T\left(\frac{T^2}{12}-\left(\tau-t-\frac{T}{2}\right)^2\right)f(\tau,x_m(\tau),x_m(\tau-\delta))d\tau\right).$$

Для рівняння Матьє послідовні наближення мають вигляд

$$x_{m+1}(t)=$$

$$=x_0+\frac{1}{2T}\left(\int_0^t\left(\frac{T^2}{12}-\left(\tau-t+\frac{T}{2}\right)^2\right)(\lambda(1+\cos\nu\tau)\,x_m(\tau-\delta)-\beta x_m{}^3(\tau)+\sin\nu\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_t^T\left(\frac{T^2}{12}-\left(\tau-t-\frac{T}{2}\right)^2\right)(\lambda(1+\cos\nu\tau)\,x_m(\tau-\delta)-\beta x_m{}^3(\tau)+\sin\nu\tau)d\tau\right). \quad (8)$$

Скориставшись оцінкою і результатами, отриманими у праці [2], матимемо

$$\left|x_{m+1}(t)-x_m(t)\right|\le$$

$$\le\int_0^T\left|G(t,\tau)\right|\,\left|f(\tau,x_m(\tau),x_m(\tau-\delta))-f(\tau,x_{m-1}(\tau),x_{m-1}(\tau-\delta))\right|d\tau\le$$

$$\le\frac{T^2}{18\sqrt{3}}(K_0+\widetilde{K}_0)\left\|x_m-x_{m-1}\right\|=\frac{T^2}{18\sqrt{3}}K\left\|x_m-x_{m-1}\right\|.$$

Ітераційний процес збігається за умови

$$K<\frac{18\sqrt{3}}{T^2}. \quad (9)$$

Також повинна виконуватись умова

$$M\le 18\sqrt{3}\,\frac{A}{T^2}. \quad (10)$$

Тоді для існування періодичного з періодом T розв'язку $x=\varphi(t,x_0)$ рівняння (1) необхідно і достатньо існування такого значення x_0, яке задовольняє рівняння

$$\int_0^T\left(\lambda(1+\cos\nu\tau)\,x_m(\tau-\delta)-\beta x_m{}^3(\tau)+\sin\nu\tau\right)d\tau=0. \quad (11)$$

У праці [2] отримано оцінки для початкового наближення x_0 і для швидкості збіжності ітераційного процесу, які із застосуванням до рівняння Матьє мають вигляд

$$\left|x_0\right|<\frac{2\pi^2}{9\sqrt{3}\,\nu}M\,; \quad (12)$$

$$\left|\varphi(t,x_0)-x_m(t)\right|\le M\left(\frac{2\pi^2}{9\sqrt{3}\,\nu^2}\right)^{m+1}K^m. \quad (13)$$

Сформулюємо остаточний результат.

Теорема. Нехай функцію $f(t,x,u)$ у правій частині рівняння (1) визначено в області $(-\infty,\infty)\times[-A,A]\times[-A,A]$. Нехай константи Ліпшица, визначені формулами (6), (7), та стала M у рівнянні (4) задовольняють умови (9) і (10). Тоді для існування періодичного з періодом $T=\frac{2\pi}{\nu}$ розв'язку $x=\varphi(t,x_0)$ рівняння (1) необхідно і достатньо існування такого значення x_0, яке задовольняє рівняння (11), де $\varphi(t,x_0)$ знаходиться методом послідовних наближень, причому ітерації визначаються формулою (8) . При цьому x_0 є середнім значенням $\varphi(t,x_0)$ на $[0,T]$ і міститься на проміжку, який задовольняє умову (12). Похибка між періодичним розв'язком рівняння Матьє (1) і її m-м наближенням визначається умовою (13).

ВИСНОВКИ

Традиційно для знаходження періодичних розв'язків звичайного нелінійного диференціального рівняння другого порядку та рівняння із запізненням його зводять до системи першого порядку. У попередніх працях автора такі рівняння розв'язуються безпосередньо. За такого підходу періодичний розв'язок інтерпретується як розв'язок періодичної крайової задачі. Отримана методика застосовується для знаходження періодичного розв'язку рівняння Матьє із запізненням. Будується ітераційний процес, що збігається до шуканого періодичного розв'язку. Його збіжність зумовлюється оцінками правої частини рівняння. Оцінюється швидкість збіжності процесу.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бохонов Ю.Є.* Про один підхід до знаходження періодичних розв'язків нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку / Ю.Є. Бохонов // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 2. — С. 138–143.
2. *Бохонов Ю.Є.* Знаходження періодичних розв'язків звичайного нелінійного диференціального рівняння другого порядку із запізненням / Ю.Є. Бохонов // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 133–140.
3. *Митропольский Ю.А.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием / Ю.А. Митропольский, Д.И. Мартынюк. — К.: Вища шк., 1979. — 248 с.
4. *Митропольский Ю.А.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами / Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко, Д.И. Мартынюк. — К.: Наук. думка, 1984. — 213 с.

Надійшла 16.11.2018