УДК 519.86
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.2.06

АЛГОРИТМИ ВИЗНАЧЕННЯ СТАНІВ РІВНОВАГИ ЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗА НАЯВНОСТІ МОНОПОЛІСТІВ ТА З РІЗНИМИ ТИПАМИ ПОВЕДІНКИ СПОЖИВАЧІВ

А.П. МАХОРТ

Анотація. Застосовано модель рівноваги вальрасового типу до опису реагування економічної системи на впливи вибраних чинників. Дослідження полягає в адаптації задачі про економічну рівновагу у випадку економічної системи з різними типами поведінки споживачів до використання більш простих методів розв'язування, які стосуються задачі з лише ненасичуваними споживачами. Обгрунтовано можливість застосування ітераційних методів до розв'язування задачі про економічну рівновагу. Указано умови на задані характеристики моделі, які забезпечуватимуть збіжність ітераційних методів. Наведено алгоритм знаходження рівноважних характеристик, який дозволяє з'ясувати умови встановлення станів рівноваги з вибраними властивостями.

Ключові слова: рівновага, попит, пропозиція, оподаткування, монополісти, ціноутворення.

ВСТУП

Поведінку економічних систем аналізують за значеннями їх характеристик. Однією з основних характеристик, яку використовують в описі економічних систем, є ціна. Ціна будь-якого товару в економічній системі формується в результаті досягнення згоди між тим, хто його потребує, та тим, хто його має. Інакше кажучи, встановлюється рівновага попиту і пропозиції товарів. На підставі використання моделей рівноваги є можливість отримати інформацію про дію на стан економічної системи різних чинників, яка допоможе оцінити сценарії майбутнього. Моделі рівноваги дають змогу виявляти причини виникнення негативних процесів в економічних системах [1,2]. Ті моделі, у яких безпосередньо конструюються вирази для попиту і пропозиції [1], виглядають більш ілюстративними, коли йдеться про з'ясування причин і наслідків появи дисбалансів.

Причини розвитку несприятливих процесів є різними. Наприклад, монопольні явища — це завжди потенційний чинник дестабілізації. Наявність споживачів з різними типами стратегій поведінки в економічній системі також може створювати додаткові ризики [3].

Мета дослідження — порівняння і встановлення аналогії в описі рівноваги економічної системи зі споживачами, які дотримуються подібних стратегій поведінки, та у випадку, коли ці стратегії різних типів. Ураховуватиметься і наявність монополістів в економічній системі. Алгоритм визначення характеристик станів рівноваги економічної системи має включати контроль за якістю станів рівноваги і надавати можливість вибирати стани рівноваги із заданими властивостями.

МОДЕЛЬ ЕКОНОМІКИ І РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ. ВИПАДОК НЕНАСИЧУВАНИХ СПОЖИВАЧІВ

Нехай досліджувана економічна система складається з l суб'єктів, кожен з яких є споживачем товарів (послуги також є товаром). Спочатку вважатимемо, що всі споживачі дотримуються схожої стратегії поведінки, яка полягатиме у прагненні повністю витратити отриманий прибуток на придбання нових товарів (ненасичувані споживачі). Нехай в економічній системі різновидів товарів є n. Частина з l споживачів є водночас і виробниками, вони виготовляють на продаж один з n можливих типів товарів, щоб мати змогу здобути заплановані витрати на споживання. Решта $l-n$ споживачів отримують фінансові надходження із зовнішніх джерел. Засобом їх утворення є перерозподіл капіталу, сформований в результаті оподаткування.

Для опису економічної системи використаємо модель економіки з постійними інтересами споживачів [1]. Тоді структуру виробництва в економічній системі задаватимемо технологічною матрицею у натуральних показниках вигляду $\left\| a_{kj} + b_{kj}/x_j \right\|_{k,j=1}^{n}$ зі складовою постійних витрат $\left\| b_{kj} \right\|_{k,j=1}^{n}$ та вектором обсягів випуску товарів $\{x_i\}_{i=1}^{n}$. Вважатимемо, що серед виробників є і $n-t$ монополістів. За такого вибору виробничих технологій та за обсягів імпорту товарів $\{i_i\}_{i=1}^{n}$ і експорту товарів за межі економічної системи $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ пропозиція товарів на ринку складатиме

$$\Psi_k = x_k - \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i - \sum_{i=1}^{n} b_{ki} - e_k + i_k, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1}$$

а чистий (або оподаткований) прибуток, що його зможуть отримати суб'єкти економічної системи в результаті реалізації на ринку своєї продукції, подаватиметься виразом

$$\overline{D}_j(p) = \pi_j x_j \left(p_j - \sum_{k=1}^{n} a_{kj} p_k \right) - \pi_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj} p_k, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

де $p = \{p_i\}_{i=1}^{n}$ — вектор цін товарів. Вектор $\pi = \{\pi_i\}_{i=1}^{n}$ вказує рівні оподаткування суб'єктів економічної системи.

Структуру споживання в економічній системі визначатимуть елементи матриці попиту $C = \left\| c_{kj} \right\|_{k=1,\, j=1}^{n,\ \ l}$. Характеристика $\sum_{s=1}^{n} c_{sj} p_s$ задаватиме вартість набору товарів, якими цікавиться j-й споживач, відповідно витрати (або ж величина прибутку, що йде на витрати) суб'єктів економічної системи подаватимуться формулою

$$\widetilde{D}_j(p) = y_j \sum_{s=1}^{n} c_{sj} p_s, \quad j = \overline{1,l}. \tag{3}$$

У стані економічної рівноваги має бути баланс прибутків і витрат. Вектор ступенів задоволення потреб споживачів $y = \{y_i\}_{i=1}^{l}$ вказуватиме, якою мірою рівень отриманого прибутку дозволятиме здійснити заплановані витрати, тому компоненти цього вектора належатимуть інтервалу $(0,1]$. Отже, для тих індексів, що нумерують виробників величини $\{\widetilde{D}_j(p)\}_{j=1}^{n}$ у виразах (2) (3) повинні збігатися. А щодо величин $\{\widetilde{D}_j(p)\}_{j=n+1}^{l}$, то вони набуватимуть значень відповідно до перерозподілу прибутків, сформованому оподаткуванням:

$$\sum_{j=n+1}^{l} \widetilde{D}_j(p) = \sum_{j=1}^{n} (1-\pi_j) D_j(p).$$

За елементами матриці C формуватиметься і попит $\Lambda_{ik}(p)$ кожного i-го ненасичуваного споживача на k-й товар:

$$\Lambda_{ik}(p) = \frac{c_{ki} p_k}{\sum_{s=1}^{n} c_{si} p_s}, \quad i = \overline{1,l}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Економічна рівновага означає, що пропозиція перевищує попит на товари в економічній системі. Попит на k-й товар в економічній системі утворюється з попиту окремих споживачів і величини їх прибутку:

$$\Phi_k = \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^{l} \Lambda_{ik}(p) \widetilde{D}_i(p), \quad k = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Якщо брати до уваги лише ті стани рівноваги, які забезпечуватимуть прибуткове виробництво суб'єктам економічної системи, то умову економічної рівноваги достатньо звузити до рівності попиту і пропозиції [1]. Із виразів (1), (5) і (3) випливатиме

$$\sum_{j=1}^{l} c_{kj} y_j = x_k - \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i - \sum_{i=1}^{n} b_{ki} - e_k + i_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{6}$$

А на підставі виразів (2) і (3) отримаємо баланс прибутків і витрат:

$$\pi_j x_j \left(p_j - \sum_{k=1}^{n} a_{kj} p_k \right) - \pi_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj} p_k = y_j \sum_{s=1}^{n} c_{sj} p_s, \quad j = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Рівняння рівноваги (6), (7) розв'язуватимемо відносно змінних $\{p_i\}_{i=1}^{t}$, $\{y_i\}_{i=1}^{l}$, $\{x_i\}_{i=t+1}^{n}$ і $\{\pi_i\}_{i=t+1}^{n}$ за решти заданих економічних характеристик. Їх розв'язки описуватимуть можливі рівноважні стани економічної системи з прибутковим виробництвом. Монополісти мають змогу впливати на рівень цін своїх товарів $(p_{t+1}^0, \ldots, p_n^0)$ і можуть спричиняти негативний ефект на інших суб'єктів економічної системи і зменшувати їх спроможність забезпечувати належний рівень споживання. Рівні оподаткування $\{\pi_i\}_{i=t+1}^{n}$ будуть важелем впливу на монополістів, а рівні задоволення потреб суб'єктів економічної системи $\{y_i\}_{i=1}^{l}$ вказуватимуть на якість станів рівноваги. Якість визначатиметься спроможністю задовольнити свої потреби не нижче за певний встановлений рівень для кожного суб'єкта економічної системи.

ЕКОНОМІЧНА СИСТЕМА З РІЗНИМИ ТИПАМИ СТРАТЕГІЇ ПОВЕДІНКИ СПОЖИВАЧІВ

У попередньому підрозділі розглядався випадок, коли всі споживачі в економічній системі дотримувалися схожої стратегії поведінки. Зміна у виборі стратегії поведінки споживачів пов'язана насамперед з плануванням витрачати весь свій прибуток на придбання нових товарів (ненасичуваний споживач), або ж лише його частину. У випадку наявності різних стратегій поведінки споживачів зміниться і їх опис. Як і раніше всіх споживачів характеризуватимемо системою векторів $\{c_{kj}\}_{k=1}^{n}$, $j=\overline{1,l}$, що утворює матрицю попиту $C=\left\|c_{kj}\right\|_{k=1,\,j=1}^{n,\quad l}$. Кожен вектор з цієї системи (або ж стовпець матриці) задає максимальний набір товарів, бажаний для відповідного споживача. Якщо споживач відмовляється від наміру витратити весь свій прибуток на придбання нових товарів, він має переоцінити свій споживчий набір, який в цьому випадку задаватиметься системою векторів $\{\hat{c}_{kj}\}_{k=1}^{n}$, $j=\overline{1,l}$, або ж, відповідно, матрицею $\hat{C}=\left\|\hat{c}_{kj}\right\|_{k=1,\,j=1}^{n,\quad l}$. Ненасичувані споживачі переоцінку не робитимуть, тому для них елементи матриць C і $\hat{C}$ збігатимуться. Загалом же стосовно елементів матриць C і $\hat{C}$ виконуватиметься умова

$$\hat{c}_{kj}\le c_{kj},\quad k=\overline{1,n}\quad j=\overline{1,l}.$$

Оподаткований прибуток кожного споживача в економічній системі, як і раніше, можна записати у вигляді формули (3). Але на відміну від виразу (4) вектори попиту $\Lambda_i=\{\Lambda_{ik}\}_{k=1}^{n}$ кожного окремого i-го суб'єкта економічної системи залежатимуть тепер від елементів матриць C і $\hat{C}$. Їх компоненти Λ_{ik} вказують на частку вартості, необхідної для придбання k-го товару, відносно вартості всього бажаного набору товарів, тому

$$\Lambda_{ik}(p)=\frac{\hat{c}_{ki}p_k}{\sum_{s=1}^{n}c_{si}p_s},\quad i=\overline{1,l},\quad k=\overline{1,n}.$$

Справедливі нерівності

$$\sum_{k=1}^{n}\Lambda_{ik}(p)\le 1,\quad i=\overline{1,l},\tag{8}$$

які не дозволяють умову рівноваги автоматично звузити до рівності попиту і пропозиції товарів в економічній системі для визначення станів рівноваги з прибутковим виробництвом. Пропозиція має перевищувати попит і знаходження рівноважних станів економічної системі полягатиме у розв'язанні системи нелінійних нерівностей

$$\frac{1}{p_k}\sum_{i=1}^{l}\Lambda_{ik}(p)\widetilde{D}_i(p)\le\psi_k\quad k=\overline{1,n}.\tag{9}$$

Але цю задачу все ж можна звести до розв’язування системи рівнянь [1], якщо замість векторів попиту споживачів Λ_i, $i=\overline{1,l}$, увести ефективні вектори $\Lambda_i^* = \{\Lambda_{ik}^*\}_{k=1}^n$, $i=\overline{1,l}$, компоненти яких задовольнятимуть рівності

$$\sum_{k=1}^{n} \Lambda_{ik}^*(p) = 1, \quad i=\overline{1,l}.$$

Теорема 1. Нехай для векторів попиту споживачів виконуються нерівності

$$\sum_{k=1}^{n} \Lambda_{ik}(p) \le 1, \quad i=\overline{1,l}.$$

Вектор $\{p_i\}_{i=1}^t$, який задовольнятиме умову економічної рівноваги (9) і забезпечуватиме прибутковість усіх суб’єктів економічної системи, є розв’язком системи рівнянь

$$\frac{1}{p_k}\sum_{i=1}^{l} \Lambda_{ik}^*(p)\widetilde{D}_i(p) = \psi_k, \quad k=\overline{1,n}, \tag{10}$$

а компоненти векторів попиту Λ_i^*, $i=\overline{1,l}$, вибираються у вигляді

$$\Lambda_{ik}^*(p) = \frac{\Lambda_{ik}(p)}{\sum_{s=1}^{n}\Lambda_{is}(p)} = \frac{\hat{c}_{ki}p_k}{\sum_{s=1}^{n}\hat{c}_{si}p_s}, \quad i=\overline{1,l}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Доведення. Нехай рівняння (10) розв’язне. Тоді, на підставі умови (9), для його довільно вибраного додатного розв’язку має виконуватись

$$\sum_{i=1}^{l}\Lambda_{ik}(p)\widetilde{D}_i(p) \le \sum_{i=1}^{l}\Lambda_{ik}^*(p)\widetilde{D}_i(p), \quad k=\overline{1,n},$$

або

$$\sum_{i=1}^{l}\Lambda_{ik}(p)\frac{\sum_{s=1}^{n}\Lambda_{is}(p)}{\sum_{s=1}^{n}\Lambda_{is}(p)}\widetilde{D}_i(p) \le \sum_{i=1}^{l}\frac{\Lambda_{ik}(p)}{\sum_{s=1}^{n}\Lambda_{is}(p)}\widetilde{D}_i(p) \quad k=\overline{1,n}.$$

Очевидно, що за додатних цін $\{p_i\}_{i=1}^t$ і у випадку прибуткової діяльності всіх суб’єктів економічної системи

$$\widetilde{D}_i(p) > 0, \quad i=\overline{1,l},$$

ця вимога задовольнятиметься внаслідок справедливості нерівності (8):

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{\Lambda_{ik}(p)}{\sum_{s=1}^{n}\Lambda_{is}(p)}\widetilde{D}_i(p)\left[1-\sum_{s=1}^{n}\Lambda_{is}(p)\right] \ge 0 \quad k=\overline{1,n}.$$

Теорему доведено.

Отже, замість системи нерівностей (9) для знаходження станів рівноваги, у яких виробництво суб’єктів економічної системи прибуткове, достатньо розв’язати систему нелінійних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{l} \hat{c}_{kj} \frac{\sum_{s=1}^{n} c_{sj} p_s}{\sum_{m=1}^{n} \hat{c}_{mj} p_m} y_j = x_k - \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i - \sum_{i=1}^{n} b_{ki} - e_k + i_k, \quad k = \overline{1,n}, \tag{11}$$

$$\pi_j x_j \left(p_j - \sum_{k=1}^{n} a_{kj} p_k \right) - \pi_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj} p_k = y_j \sum_{s=1}^{n} c_{sj} p_s, \quad j = \overline{1,n}, \tag{12}$$

відносно невідомих $\{p_i\}_{i=1}^{t}$, $\{x_i\}_{i=t+1}^{n}$, $\{y_i\}_{i=1}^{l}$ і $\{\pi_i\}_{i=t+1}^{n}$. Якщо ввести змінні

$$\hat{y}_j = \frac{\sum_{s=1}^{n} c_{sj} p_s}{\sum_{m=1}^{n} \hat{c}_{mj} p_m} y_j, \quad j = \overline{1,l},$$

то рівняння (11), (12) набудуть вигляду (6), (7), де замість елементів матриці C міститимуться елементи матриці $\hat{C}$, а замість ступенів задоволення потреб споживачів $\{y_i\}_{i=1}^{l}$ — величини $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^{l}$. Отже, задача рівноваги зводиться до випадку ненасичуваних споживачів, що дає змогу використати всі напрацьовані алгоритми знаходження невідомих.

Зробимо кілька зауважень стосовно розв’язування задачі рівноваги. За структурою рівняння (6), (7) мають більш простий вигляд, ніж рівняння (11), (12). Цей факт і наявність алгоритмів розв’язування схиляє до використання саме рівнянь (6), (7) з вектором $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^{l}$ і матрицею $\hat{C}$ [4]. Але на відміну від вектора $\{y_i\}_{i=1}^{l}$, компоненти якого дозволяють оцінити прийнятність станів рівноваги для окремих суб’єктів економічної системи, вектор $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^{l}$ є ефективною величиною. Компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^{l}$ визначатимуться згодом за компонентами вектора $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^{l}$. Прийнятність станів рівноваги встановлюється за виконанням умов на рівноважний вектор $\{y_i\}_{i=1}^{l}$. Серед усіх можливих станів рівноваги вибираються лише ті, для яких виконуватимуться обмеження на компоненти вектора ступенів задоволення потреб споживачів $y^m \le y_i \le y^M$, $i = \overline{1,l}$. На компоненти вектора $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^{l}$ теж можна накласти подібні обмеження [4], щоб досягти виконання вказаних умов, але вони можуть виявитись менш точними, ніж якщо б обмеження накладались безпосередньо на компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^{l}$. Крім того, вектор $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^{l}$ залежить від цін і це необхідно враховувати, щоб вказати потрібні обмеження на його компоненти. Запропонуємо альтернативний підхід розв’язання задачі про економічну рівновагу без визначення вектора $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^{l}$.

ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАНІВ РІВНОВАГИ І АЛГОРИТМ ЇХ ЗНАХОДЖЕННЯ

Якщо задати матричні елементи

$$c_{kj}(p) = \hat{c}_{kj} \frac{\sum_{s=1}^{n} c_{sj} p_s}{\sum_{m=1}^{n} \hat{c}_{mj} p_m}, \quad k = \overline{1,n},, \quad = \overline{1,l}\,, \tag{13}$$

то система рівнянь (11), (12) набуде вигляду:

$$\sum_{j=1}^{l} c_{kj}(p) y_j = x_k - \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i - \sum_{i=1}^{n} b_{ki} - e_k + i_k, \quad k = \overline{1,n}; \tag{14}$$

$$\pi_j x_j \left(p_j - \sum_{k=1}^{n} a_{kj} p_k \right) - \pi_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj} p_k = y_j \sum_{s=1}^{n} c_{sj}(p) p_s, \quad j = \overline{1,n}. \tag{15}$$

На матричні елементи $c_{kj}(p)$, означені виразом (13), накладемо обмеження:

$$\hat{c}_{kj} \le c_{kj}(p) \le c_{kj}, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,l}. \tag{16}$$

Задача знову звелась до випадку ненасичуваних споживачів, але тепер із залежними від вектора цін елементами матриці попиту. З усіх можливих станів рівноваги необхідно знайти характеристики лише тих, які належатимуть заданій області значень. Цю задачу розглянуто у праці [5]. Відповідно до раніше отриманих результатів вважатимемо, що матриця $A = \left\| a_{kj} \right\|_{k,j=1}^{n}$ продуктивна, тоді для знаходження рівноважного вектора цін використовуватимемо рівняння

$$p_k = P_k(p, y), \quad k = \overline{1,t}; \tag{17}$$

$$P_k(p, y) = \sum_{j=1}^{t} (E - A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j}{\pi_j x_j} \sum_{s=1}^{n} c_{sj}(p) p_s + \frac{1}{x_j} \sum_{s=1}^{n} b_{sj} p_s \right], \quad k = \overline{1,t},$$

яке розв'язуватимемо одночасно з рівнянням на рівноважні ступені задоволення потреб споживачів $y_1, \ldots, y_t$:

$$y_s = \Delta_1(\alpha_s - \lambda_s) + \sum_{k=1}^{t} (\alpha_k - \lambda_k) d_{ks}(p), \quad s = \overline{1,t}, \tag{18}$$

де

$$d_{kj}(p) = \sum_{s=1}^{n} (E - A)_{ks}^{-1} c_{sj}(p)\,,$$

та рівнянням на допоміжний вектор $\{\alpha_i - \lambda_i\}_{i=1}^{t}$:

$$\alpha_k - \lambda_k = \widetilde{\Theta}_k(p, \alpha_1 - \lambda_1, \ldots, \alpha_t - \lambda_t), \quad k = \overline{1,t}, \tag{19}$$

$$\widetilde{\Theta}_k(p,\alpha_1-\lambda_1,\ldots,\alpha_t-\lambda_t)=\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(b_k^0-\sum_{j=t+1}^{n}d_{kj}(p)\alpha_j^1\right)-\frac{1}{\Delta_1^2}\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n}d_{ki}(p)d_{ji}(p)\right]\times$$

$$\times\left(\alpha_j-\lambda_j\right)-\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t}d_{kj}(p)(\alpha_j-\lambda_j)+\sum_{j=1}^{t}d_{jk}(p)(\alpha_j-\lambda_j)\right),\quad k=\overline{1,t},$$

де

$$b_k^0=x_k^0-\sum_{s=1}^{n}\left(E-A\right)_{ks}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}b_{si}+e_s-i_s\right].$$

Рівняння (18), (19) випливають з екстремальної задачі [6]

$$\min_{(y_1,\ldots,y_n)}\mathcal{F}^0(p),\quad \mathcal{F}^0(p)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}[\beta_j(p)-y_j]^2$$

за додаткових вимог

$$\sum_{j=1}^{n}d_{kj}(p)y_j+\Delta_1 y_k=\Delta_0 b_k^0,\quad k=\overline{1,t},$$

та величини $\{\beta_i(p)\}_{i=1}^{n}$, які подаються виразами:

$$\beta_s(p)=\Delta_1\alpha_s+\sum_{k=1}^{t}\alpha_k d_{ks}(p),\quad s=\overline{1,t},$$

$$\beta_s(p)=\Delta_0\alpha_s^1+\sum_{k=1}^{t}\alpha_k d_{ks}(p),\quad s=\overline{t+1,n}\,.$$

Рівняння (17), (18), (19) мають розв'язок у множині додатних векторів [5], якщо справедлива оцінка

$$\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j^0}\max_{s\in[1,t]}\left(\frac{y^M}{\pi_j}c_{sj}+b_{sj}\right)<1, \tag{20}$$

і для заданих значень постійних Δ_0, Δ_1 та величин σ^m, σ^M, вибраних з умови

$$y^m\le\sigma^m\left(\Delta_1+\sum_{k=1}^{t}d_{ks}^1\right)\le\sigma^M\left(\Delta_1+\sum_{k=1}^{t}d_{ks}^0\right)\le y^M,\quad s=\overline{1,t},$$

виконуються нерівності

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(b_s^0-\sum_{k=t+1}^{n}d_{sk}^1\alpha_k^1\right)-\frac{\sigma^m}{\Delta_1^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{l}d_{ki}^1d_{si}^1+\Delta_1\sum_{i=1}^{t}d_{si}^1+\Delta_1\sum_{i=1}^{t}d_{is}^1\right)\le$$

$$\le\sigma^M,\quad s=\overline{1,t}; \tag{21}$$

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(b_s^0-\sum_{k=t+1}^{n}d_{sk}^0\alpha_k^1\right)-\frac{\sigma^M}{\Delta_1^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{l}d_{si}^0d_{ji}^0+\Delta_1\sum_{i=1}^{t}d_{si}^0+\Delta_1\sum_{i=1}^{t}d_{is}^0\right)\ge$$

$$\ge\sigma^m,\quad s=\overline{1,t}. \tag{22}$$

де

$$d_{kj}^1 = \sum_{s=1}^{n} (E-A)_{ks}^{-1} \hat{c}_{sj}, \quad d_{kj}^0 = \sum_{s=1}^{n} (E-A)_{ks}^{-1} c_{sj}.$$

Рівноважні ступені задоволення потреб споживачів $y_{t+1},\ldots,y_n$ визначатимуться з рівняння

$$y_s = \Delta_0 \alpha_s^1 + \sum_{k=1}^{t} (\alpha_k - \lambda_k) d_{ks}(p), \quad s = \overline{t+1, n}.$$

У цьому випадку всі компоненти $y_1,\ldots,y_n$ задовольнятимуть обмеження $y^m \le y_i \le y^M$, $i = \overline{1,n}$. Решту рівноважних ступенів задоволення потреб споживачів $y_{n+1},\ldots,y_l$ визначимо з екстремальної задачі

$$\min_{(y_{n+1},\ldots,y_l)} \widetilde{\mathcal{F}}^1(p), \quad \widetilde{\mathcal{F}}^1 = \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{l} [\beta_j(p) - y_j]^2; \tag{23}$$

$$\beta_s(p) = \sum_{k=1}^{t} \hat{\alpha}_k^1 d_{ks}(p), \quad s = \overline{n+1, l}$$

за додаткових вимог

$$\sum_{j=1}^{n} d_{kj}(p) y_j + \Delta_1 y_k = \Delta_0 \sum_{j=1}^{l} d_{kj}(p) y_j, \quad k = \overline{1,t}. \tag{24}$$

Розв’язок задачі (23), (24) теж має задовольняти обмеження

$$y^m \le y_k \le y^M, \quad k = \overline{n+1, l}. \tag{25}$$

Існування розв’язку рівнянь (17)–(19) доведено. Обґрунтуємо використання ітераційних методів для його знаходження. Побудуємо ітераційний процес

$$p_k^{[s+1]} = P_k(p^{[s]}, y^{[s]}), \quad k = \overline{1,t};$$

$$y_j^{[s+1]} = \Delta_1(\alpha_j^{[s]} - \lambda_j^{[s]}) + \sum_{k=1}^{t} (\alpha_k^{[s]} - \lambda_k^{[s]}) d_{kj}(p^{[s]}), \quad j = \overline{1,t};$$

$$\alpha_k^{[s+1]} - \lambda_k^{[s+1]} = \widetilde{\Theta}_k(p^{[s]}, \alpha_1^{[s]} - \lambda_1^{[s]}, \ldots, \alpha_t^{[s]} - \lambda_t^{[s]}), \quad k = \overline{1,t},$$

та з’ясуємо питання про його збіжність до розв’язку, де нульове наближення вибиратимемо з множин:

$$\mathcal{M}_\lambda = \left\{ \alpha_k - \lambda_k \in R, \quad \left| \frac{\sigma^M + \sigma^m}{2} - \alpha_k + \lambda_k \right| \le \frac{\sigma^M - \sigma^m}{2}, \quad k = \overline{1,l} \right\};$$

$$\mathcal{M}_y = \left\{ y_k \in R_+, \quad \left| \frac{(y^M + y^m)}{2} - y_k \right| \le \frac{(y^M - y^m)}{2}, \quad k = \overline{1,n} \right\};$$

$$\mathcal{M}_\rho = \left\{ p_k \ge \rho_0, \quad k = \overline{1,t}, \quad \sum_{k=1}^{t} p_k \le \rho \right\}.$$

Кожна ітерація знову належатиме множинам $\mathcal{M}_\lambda$, $\mathcal{M}_y$, $\mathcal{M}_\rho$ [5]. Вважатимемо, що нерівності (16) виконуватимуться для всіх $p \in \mathcal{M}_\rho$, якщо параметр ρ вибрати з урахуванням обмеження [5]

$$\frac{\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j^0}\left[x_j^0\sum_{s=t+1}^{n}a_{sj}p_s^0+\frac{y_j^M}{\pi_j}\sum_{s=t+1}^{n}c_{sj}^0p_s^0+\sum_{s=t+1}^{n}b_{sj}p_s^0\right]}{1-\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j^0}\max_{s\in[1,t]}\left(\frac{y_j^M}{\pi_j}c_{sj}^0+b_{sj}\right)}\le\rho.$$

Оцінимо різницю

$$\left|p_k^{[s+1]}-p_k^{[s]}\right|,\quad k=\overline{1,t}.$$

Уведемо допоміжну матрицю з елементами τ_{kj}, такими, що

$$y^m\hat{c}_{kj}=\tau_{kj}y^Mc_{kj},\quad 0<\tau_{kj}\le 1\quad k=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,l}.$$

Відповідно до структури оператора $\{P_i(p,y)\}_{i=1}^n$ отримаємо

$$\left|p_k^{[s+1]}-p_k^{[s]}\right|=\left|P_k(p^{[s]},y^{[s]})-P_k(p^{[s-1]},y^{[s-1]})\right|=\left|\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{i=1}^{n}b_{ij}(p_i^{[s]}-p_i^{[s-1]})+\frac{1}{\pi_j}\sum_{i=1}^{n}(y_j^{[s]}c_{ij}(p^{[s]})p_i^{[s]}-y_j^{[s-1]}c_{ij}(p^{[s-1]})p_i^{[s-1]})\right]\right|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j}\left[\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\left|p_i^{[s]}-p_i^{[s-1]}\right|+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi_j}\sum_{i=1}^{n}\left|y_j^{[s]}c_{ij}(p^{[s]})p_i^{[s]}-y_j^{[s-1]}c_{ij}(p^{[s-1]})p_i^{[s-1]}\right|\right]\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j}\left[\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\left|p_i^{[s]}-p_i^{[s-1]}\right|+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi_j}\max\left(\sum_{i=1}^{n}(y^Mc_{ij}p_i^{[s]}-y^m\hat{c}_{ij}p_i^{[s-1]}),\sum_{i=1}^{n}(y^Mc_{ij}p_i^{[s-1]}-y^m\hat{c}_{ij}p_i^{[s]})\right)\right]\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j}\times$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\left|p_i^{[s]}-p_i^{[s-1]}\right|+\frac{y^m}{\pi_j}\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_{ij}\max((\tau_{ij}p_i^{[s]}-p_i^{[s-1]}),(\tau_{ij}p_i^{[s-1]}-p_i^{[s]}))\right]\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j}\times$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\left|p_i^{[s]}-p_i^{[s-1]}\right|+\frac{y^M}{\pi_j}\sum_{i=1}^{n}c_{ij}\max\left((p_i^{[s]}-p_i^{[s-1]}),(p_i^{[s-1]}-p_i^{[s]})\right)\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\sum_{i=1}^{t}\left[\frac{1}{x_j}b_{ij}+\frac{y^M}{\pi_j x_j}c_{ij}\right]\left|p_i^{[s]}-p_i^{[s-1]}\right|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\max_{i\in[1,t]}\left(\frac{1}{x_j}b_{ij}+\frac{y^M}{\pi_j x_j}c_{ij}\right)\sum_{i=1}^{t}\left|p_i^{[s]}-p_i^{[s-1]}\right|=$$

$$=\omega_k\sum_{i=1}^{t}\left|p_i^{[s]}-p_i^{[s-1]}\right|,\quad k=\overline{1,t},$$

де враховано, що

$$p_k^{[s]}=p_k^{[s-1]}=p_k^0,\qquad k=\overline{t+1,n}.$$

З умови (20) випливають очевидні нерівності

$$\omega_k=\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\max_{i\in[1,t]}\left(\frac{1}{x_j}b_{ij}+\frac{y_j}{\pi_j x_j}c_{ij}\right)<\sum_{k=1}^{t}\omega_k<1,\quad k=\overline{1,t}.$$

Тому буде справедлива оцінка

$$\sum_{k=1}^{t}\left|p_k^{[s+1]}-p_k^{[s]}\right|\le\sum_{j=1}^{t}\omega_j\times\sum_{k=1}^{t}\left|p_k^{[s]}-p_k^{[s-1]}\right|\le\left[\sum_{k=1}^{t}\omega_k\right]^s\sum_{k=1}^{t}\left|p_k^{[1]}-p_k^{[0]}\right|.$$

Оцінимо різницю

$$\left|(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})-(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\right|,\quad j=\overline{1,t}.$$

Із виразу для оператора $\{\widetilde{\Theta}_k(p,\alpha_1-\lambda_1,\dots,\alpha_t-\lambda_t)\}_{i=1}^n$ для кожної ітерації випливає оцінка

$$\widetilde{\Theta}_k(p,\alpha_1-\lambda_1,\dots,\alpha_t-\lambda_t)\le\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(b_k^0-\sum_{j=t+1}^{n}d_{kj}^1\alpha_j^1\right)-\frac{1}{\Delta_1^2}\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n}d_{ki}(p)d_{ji}(p)\right]\times$$

$$\times(\alpha_j-\lambda_j)-\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t}d_{kj}(p)(\alpha_j-\lambda_j)+\sum_{j=1}^{t}d_{jk}(p)(\alpha_j-\lambda_j)\right),\quad k=\overline{1,t}.$$

Уведемо допоміжні матриці з елементами τ_{kj}^0, $\widetilde{\tau}_{kj}^0$ такими, що

$$\left[\sum_{i=1}^{n}d_{ki}^1d_{ji}^1\right]=\widetilde{\tau}_{kj}^0\left[\sum_{i=1}^{n}d_{ki}^0d_{ji}^0\right],\quad 0<\widetilde{\tau}_{kj}^0\le1,\quad k=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,n};$$

$$d_{kj}^1=\tau_{kj}^0d_{kj}^0,\quad 0<\tau_{kj}^0\le1,\quad k=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,n}.$$

Звернемо також увагу, що для двох послідовних ітерацій s_i і s_{i+1} (де s_i і s_{i+1} може бути відповідно або $s-1$ і s, або навпаки s і $s-1$) завжди можна підібрати деяку сталу $\tau\ge1$, щоб виконувались

$$\tau\widetilde{\Theta}_k(p^{[s_i]},\alpha_1^{[s_i]}-\lambda_1^{[s_i]},\ldots,\alpha_t^{[s_i]}-\lambda_t^{[s_i]})=$$

$$=\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(b_k^0-\sum_{j=t+1}^{n}d_{kj}^1\alpha_j^1\right)-\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n}d_{ki}(p^{[s_i]})d_{ji}(p^{[s_i]})\right]\frac{1}{\Delta_1^2}(\alpha_j^{[s_i]}-\lambda_j^{[s_i]})-$$

$$-\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t}d_{kj}(p^{[s_i]})(\alpha_j^{[s_i]}-\lambda_j^{[s_i]})+\sum_{j=1}^{t}d_{jk}(p^{[s_i]})(\alpha_j^{[s_i]}-\lambda_j^{[s_i]})\right),\quad k\in[1,t].$$

$$\tau\widetilde{\Theta}_k(p^{[s_{i+1}]},\alpha_1^{[s_{i+1}]}-\lambda_1^{[s_{i+1}]},\ldots,\alpha_t^{[s_{i+1}]}-\lambda_t^{[s_{i+1}]})\le\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(b_k^0-\sum_{j=t+1}^{n}d_{kj}^0\alpha_j^1\right)-$$

$$-\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n}d_{ki}(p^{[s_{i+1}]})d_{ji}(p^{[s_{i+1}]})\right]\frac{1}{\Delta_1^2}(\alpha_j^{[s_{i+1}]}-\lambda_j^{[s_{i+1}]})-$$

$$-\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t}d_{kj}(p^{[s_{i+1}]})(\alpha_j^{[s_{i+1}]}-\lambda_j^{[s_{i+1}]})+\sum_{j=1}^{t}d_{jk}(p^{[s_{i+1}]})(\alpha_j^{[s_{i+1}]}-\lambda_j^{[s_{i+1}]})\right),\quad k\in[1,t].$$

З очевидної нерівності

$$\tau\widetilde{\Theta}_k(p^{[s_{i+1}]},\alpha_1^{[s_{i+1}]}-\lambda_1^{[s_{i+1}]},\ldots,\alpha_t^{[s_{i+1}]}-\lambda_t^{[s_{i+1}]})-$$

$$-\tau\widetilde{\Theta}_k(p^{[s_i]},\alpha_1^{[s_i]}-\lambda_1^{[s_i]},\ldots,\alpha_t^{[s_i]}-\lambda_t^{[s_i]})\le$$

$$\le\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(b_k^0-\sum_{j=t+1}^{n}d_{kj}^1\alpha_j^1\right)-\frac{1}{\Delta_1^2}\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n}d_{ki}(p^{[s_{i+1}]})d_{ji}(p^{[s_{i+1}]})\right](\alpha_j^{[s_{i+1}]}-\lambda_j^{[s_{i+1}]})-$$

$$-\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t}d_{kj}(p^{[s_{i+1}]})(\alpha_j^{[s_{i+1}]}-\lambda_j^{[s_{i+1}]})+\sum_{j=1}^{t}d_{jk}(p^{[s_{i+1}]})(\alpha_j^{[s_{i+1}]}-\lambda_j^{[s_{i+1}]})\right)-$$

$$-\widetilde{\Theta}_k(p^{[s_i]},\alpha_1^{[s_i]}-\lambda_1^{[s_i]},\ldots,\alpha_t^{[s_i]}-\lambda_t^{[s_i]}),\quad k\in[1,t],$$

отримаємо

$$\Big|\widetilde{\Theta}_k(p^{[s_{i+1}]},\alpha_1^{[s_{i+1}]}-\lambda_1^{[s_{i+1}]},\ldots,\alpha_t^{[s_{i+1}]}-\lambda_t^{[s_{i+1}]})-\Big|$$

$$-\widetilde{\Theta}_k(p^{[s_i]},\alpha_1^{[s_i]}-\lambda_1^{[s_i]},\ldots,\alpha_t^{[s_i]}-\lambda_t^{[s_i]})\le$$

$$\le\left|\frac{1}{\Delta_1^2}\left(\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n}d_{ki}(p^{[s_i]})d_{ji}(p^{[s_i]})\right](\alpha_j^{[s_i]}-\lambda_j^{[s_i]})-\right.\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n}d_{ki}(p^{[s_{i+1}]})d_{ji}(p^{[s_{i+1}]})\right](\alpha_j^{[s_{i+1}]}-\lambda_j^{[s_{i+1}]})\right)+$$

$$+\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}(p^{[s_i]})(\alpha_j^{[s_i]}-\lambda_j^{[s_i]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}(p^{[s_i]})(\alpha_j^{[s_i]}-\lambda_j^{[s_i]})\right)-$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}(p^{[s_{i+1}]})(\alpha_j^{[s_{i+1}]}-\lambda_j^{[s_{i+1}]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}(p^{[s_{i+1}]})(\alpha_j^{[s_{i+1}]}-\lambda_j^{[s_{i+1}]})\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta_1^2}\left(\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}(p^{[s]})d_{ji}(p^{[s]})\right](\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})-+\right.\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}(p^{[s-1]})d_{ji}(p^{[s-1]})\right](\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\right)$$

$$+\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}(p^{[s]})(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}(p^{[s]})(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\right)-$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}(p^{[s-1]})(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}(p^{[s-1]})(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\Delta_1^2}\left|\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}(p^{[s]})d_{ji}(p^{[s]})\right](\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}(p^{[s-1]})d_{ji}(p^{[s-1]})\right](\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\right|+$$

$$+\frac{1}{\Delta_1}\left|\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}(p^{[s]})(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}(p^{[s]})(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}(p^{[s-1]})(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}(p^{[s-1]})(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\Delta_1^2}\max\left(\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^0 d_{ji}^0\right](\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})-\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^1 d_{ji}^1\right]\times\right.$$

$$\left.\times(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]}),\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^0 d_{ji}^0\right](\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})-\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^1 d_{ji}^1\right](\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\right)+$$

$$+\frac{1}{\Delta_1}\max\left[\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^0(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^0\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]}\right)-\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^1(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^1(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\right),\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^0(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^0(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\right)-$$

$$-\Bigg(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^{1}(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^{1}(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\Bigg)\Bigg]\le$$

$$\le\frac{1}{\Delta_1^2}\max\Bigg(\sum_{j=1}^{t}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^{1}d_{ji}^{1}\Bigg]\Big[\tilde{\tau}_{kj}^{0}(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})-(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\Big],$$

$$\sum_{j=1}^{t}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^{1}d_{ji}^{1}\Bigg]\Big[\tilde{\tau}_{kj}^{0}(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})-(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\Big]\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{\Delta_1}\max\Bigg[\Bigg(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^{1}\tau_{kj}^{0}(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^{1}\tau_{jk}^{0}(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\Bigg)-\Bigg(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^{1}(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})+$$

$$+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^{1}(\alpha_j^{[s_i-1]}-\lambda_j^{[s_i-1]})\Bigg)\Bigg(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^{1}\tau_{kj}^{0}(\alpha_j^{[s_i-1]}-\lambda_j^{[s_i-1]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^{1}\tau_{jk}^{0}(\alpha_j^{[s_i-1]}-\lambda_j^{[s_i-1]})\Bigg)-$$

$$-\Bigg(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^{1}(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^{1}(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\Bigg)\Bigg]\le\frac{1}{\Delta_1^2}\max\Bigg(\sum_{j=1}^{t}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^{1}d_{ji}^{1}\Bigg]\Big[(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})-$$

$$-(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\Big],\sum_{j=1}^{t}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^{1}d_{ji}^{1}\Bigg]\Big[\tilde{\tau}_{kj}^{0}(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})-(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\Big]\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{\Delta_1}\max\Bigg[\Bigg(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^{1}(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^{1}(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\Bigg)-\Bigg(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^{1}(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})+$$

$$+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^{1}(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\Bigg),\Bigg(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^{1}(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^{1}(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\Bigg)-$$

$$-\Bigg(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^{1}(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^{1}(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\Bigg)\Bigg]=\frac{1}{\Delta_1^2}\sum_{j=1}^{t}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^{1}d_{ji}^{1}\Bigg]\Big|(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})-$$

$$-(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\Big|+\frac{1}{\Delta_1}\Bigg|\Bigg(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^{1}(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^{1}(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\Bigg)-$$

$$-\Bigg(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^{1}(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^{1}(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\Bigg)\Bigg|\le$$

$$\le\max_{j\in[1,t]}\Big|(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})-(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\Big|\times$$

$$\times\Bigg(\frac{1}{\Delta_1^2}\sum_{j=1}^{t}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^{1}d_{ji}^{1}\Bigg]+\frac{1}{\Delta_1}\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^{1}+\frac{1}{\Delta_1}\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^{1}\Bigg),\quad k\in[1,t].$$

Остаточно

$$\max_{j\in[1,t]}\left|(\alpha_j^{[s+1]}-\lambda_j^{[s+1]})-(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\right|\le(\varepsilon^2+2\varepsilon)\max_{j\in[1,t]}\left|(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})-(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\right|\le$$

$$\le(\varepsilon^2+2\varepsilon)^s\max_{j\in[1,t]}\left|(\alpha_j^{[1]}-\lambda_j^{[1]})-(\alpha_j^{[0]}-\lambda_j^{[0]})\right|,$$

де

$$\varepsilon=\frac{1}{\Delta_1}n\max_{k,j\in[1,n]}d_{kj}^1.$$

Вимагатимемо виконання

$$\varepsilon^2+2\varepsilon<1.$$

Тому величина ε має задовольняти обмеження

$$0<\varepsilon<\sqrt{2}-1. \qquad (26)$$

Цього можна досягти за рахунок вибору значення Δ_1, що не вплине на виконання встановлених вимог (20)–(22) (хіба що буде необхідно скоригувати значення сталої Δ_0).

Оцінимо і різницю

$$\left|y_k^{[s+1]}-y_k^{[s]}\right|,\quad k=\overline{1,t}.$$

Із виразу (18) випливає

$$\left|y_k^{[s+1]}-y_k^{[s]}\right|=\Delta_1\left|(\alpha_k^{[s]}-\lambda_j^{[s]})-(\alpha_k^{[s-1]}-\lambda_k^{[s-1]})+\frac{1}{\Delta_1}\sum_{j=1}^{t}d_{jk}(p^{[s]})(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta_1}\sum_{j=1}^{t}d_{jk}(p^{[s-1]})(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\right|\le\Delta_1\left|(\alpha_k^{[s]}-\lambda_k^{[s]})-(\alpha_k^{[s-1]}-\lambda_k^{[s-1]})\right|+$$

$$+\max\left[\left(\sum_{j=1}^{t}d_{jk}^0(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})-\sum_{j=1}^{t}d_{jk}^1(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\right),\left(\sum_{j=1}^{t}d_{jk}^0(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{j=1}^{t}d_{jk}^1(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\right)\right]\le$$

$$\le\Delta_1\left|(\alpha_k^{[s]}-\lambda_k^{[s]})-(\alpha_k^{[s-1]}-\lambda_k^{[s-1]})\right|+\max\left[\left(\sum_{j=1}^{t}d_{jk}^1\tau_{jk}^0(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{j=1}^{t}d_{jk}^1(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})\right),\left(\sum_{j=1}^{t}d_{jk}^1\tau_{jk}^0(\alpha_j^{[s-1]}-\lambda_j^{[s-1]})-\sum_{j=1}^{t}d_{jk}^1(\alpha_j^{[s]}-\lambda_j^{[s]})\right)\right]\le$$

$$\leq \Delta_1 \left|(\alpha_k^{[s]} - \lambda_k^{[s]}) - (\alpha_k^{[s-1]} - \lambda_k^{[s-1]})\right| + \max\left[\left(\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^1(\alpha_k^{[s]} - \lambda_k^{[s]}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{j=1}^{t} d_{jk}^1(\alpha_j^{[s]} - \lambda_j^{[s]})\right), \left(\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^1(\alpha_j^{[s-1]} - \lambda_j^{[s-1]}) - \sum_{j=1}^{t} d_{jk}^1(\alpha_j^{[s]} - \lambda_j^{[s]})\right)\right] \leq$$

$$\leq \Delta_1 \left|(\alpha_k^{[s]} - \lambda_k^{[s]}) - (\alpha_k^{[s-1]} - \lambda_k^{[s-1]})\right| + \sum_{j=1}^{t} d_{kj}^1 \left|(\alpha_j^{[s]} - \lambda_j^{[s]}) - (\alpha_j^{[s-1]} - \lambda_j^{[s-1]})\right| \leq$$

$$\leq \left(\Delta_1 + \sum_{j=1}^{t} d_{kj}^1\right) \max_{j\in[1,t]} \left|(\alpha_j^{[s]} - \lambda_j^{[s]}) - (\alpha_j^{[s-1]} - \lambda_j^{[s-1]})\right|, \quad k = \overline{1,t}\,.$$

На підставі встановлених оцінок та теорем про нерухому точку оператора [7] справедлива теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови (20)–(22) існування розв'язку рівнянь (17)–(19), а норма ε матриці $\left\| \frac{1}{\Delta_1} d_{kj}^1 \right\|_{k,j=1}^{n}$ задовольняє обмеження (26), тоді розв'язок рівнянь (17)–(19) можна знайти за допомогою ітераційних процедур

$$p_k^{[s+1]} = P_k(p^{[s]}, y^{[s]}), \quad s = 0,1,\ldots \qquad k = \overline{1,t},$$

зі швидкістю збіжності

$$\frac{\left[\sum_{k=1}^{t} \omega_k\right]^s}{1 - \left[\sum_{k=1}^{t} \omega_k\right]} \sum_{k=1}^{t} \left|p_k^{[1]} - p_k^{[0]}\right|,$$

і

$$y_j^{[s+1]} = \Delta_1(\alpha_j^{[s]} - \lambda_j^{[s]}) + \sum_{k=1}^{t} (\alpha_k^{[s]} - \lambda_k^{[s]}) d_{kj}(p^{[s]}), \quad s = 0,1,\ldots \quad j = \overline{1,t};$$

$$\alpha_k^{[s+1]} - \lambda_k^{[s+1]} = \widetilde{\Theta}_k(p^{[s]}, \alpha_1^{[s]} - \lambda_1^{[s]}, \ldots, \alpha_t^{[s]} - \lambda_t^{[s]}), \quad s = 0,1,\ldots \quad k = \overline{1,t},$$

зі швидкістю збіжності

$$\frac{(\varepsilon^2 + 2\varepsilon)^s}{1 - (\varepsilon^2 + 2\varepsilon)} \max_{j\in[1,t]} \left|(\alpha_j^{[1]} - \lambda_j^{[1]}) - (\alpha_j^{[0]} - \lambda_j^{[0]})\right|.$$

Щодо решти рівноважних характеристик, то за відомими векторами $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ і $\{p_i\}_{i=1}^{t}$ задачу (23)–(25) стосовно невідомих величин $\{y_i\}_{i=n+1}^{l}$ можна розв'язати, використавши запропоновану у праці [5] формулу

$$y_s = \frac{1}{\widetilde{\lambda}} \sum_{k=1}^{n} d_{ks}(p) \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=n+1}^{l} d_{ki}(p) d_{ji}(p)\right] \nu \hat{\alpha}_j^1 +$$

$$+\frac{1}{\widetilde{\lambda}}\sum_{k=1}^{n} d_{ks}(p)(b_k^0 - \Delta_0 b_k^0 + \Delta_1 y_k - v\hat{\alpha}_k^1), \quad s = \overline{n+1, l},$$

де $\widetilde{\lambda}$ є найбільшим власним значенням матриці $\left\| \sum_{s=n+1}^{l} d_{ks}(p) d_{js}(p) \right\|_{k,j=1}^{n}$, а $\{(1+v)\hat{\alpha}_i^1 - \hat{\lambda}_i^1\}_{i=1}^n$ є власним вектором, який йому відповідає. Вибір значень величин $\{\alpha_i^1\}_{i=1}^n$ і v має забезпечити виконання вимоги (25).

Нарешті рівноважні рівні оподаткування монополістів визначатимуться за іншими рівноважними характеристиками, як і в моделі економіки з постійними інтересами споживачів [4], виразом

$$\pi_j = \frac{\sum_{s=1}^{t} c_{sj} y_j p_s + \sum_{s=t+1}^{n} c_{sj} y_j p_s^0}{p_j^0 x_j - \sum_{k=1}^{t}(a_{kj} x_j + b_{kj}) p_k - \sum_{k=t+1}^{n}(a_{kj} x_j + b_{kj}) p_k^0}, \quad j = \overline{t+1, n}.$$

ВИСНОВКИ

Розглянуто особливості встановлення рівноваги в економічній системі за наявності монополістів та зі споживачами, які дотримуються стратегії поведінки різних типів. Удосконалено метод розв'язування задачі про економічну рівновагу. На відміну від попередніх результатів [4], де задача зводилась до випадку ненасичуваних споживачів та використання наближення економіки з постійними інтересами споживачів з ефективним вектором $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^l$ замість вектора ступенів задоволення потреб споживачів $\{y_i\}_{i=1}^l$, тепер задача звелась теж до випадку ненасичуваних споживачів, але із залежними від вектора цін елементами матриці попиту [5] і вектором $\{y_i\}_{i=1}^l$. Процедура розв'язування задачі про економічну рівновагу для залежних від цін елементів матриці попиту є більш складною, ніж для наближення економіки з постійними інтересами споживачів, але тепер завдяки наявності вектора $\{y_i\}_{i=1}^l$ з'являється можливість гарантованого вибору стану рівноваги із заданими властивостями. Запропоновано ітераційний алгоритм знаходження рівноважних характеристик із заданими властивостями. Зокрема, вказано межі, у яких мають міститись значення змінних рівноважних характеристик моделі. З'ясовано за допомогою яких модельних характеристик можна впливати на збіжність ітераційного алгоритму та знайдено обмеження на їх значення, що гарантуватимуть збіжність.

Роботу виконано за часткової підтримки Програми фундаментальних досліджень Відділення фізики і астрономії НАН України (проект № 0117U000240).

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гончар М.С.* Математичні основи інформаційної економіки / М.С.Гончар. — К.: Ін-т теор. фізики, 2007. — 464 с.

2. *Kehoe T.J.* Computation and multiplicity of equilibria. Handbook of Mathematical Economics / Kehoe T.J.; ed. by W. Hildenbrand, H. Sonnenschein. — Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1991. — Vol. IV. — P. 2049–2143.
3. *Махорт А.П.* Про рівновагу відкритої економічної системи за наявності невикористаного капіталу та заданих рівнів споживання / А.П. Махорт // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2015. — № 1. — С. 45–56.
4. *Махорт А.Ф.* Равновесие в экономической системе с разными типами стратегий поведения потребителей / А.Ф. Махорт // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 1. — С. 107–117.
5. *Махорт А.П.* Про рівновагу відкритої економічної системи за наявності монополістів та залежних від цін споживчих уподобань / А.П. Махорт // Математичне моделювання в економіці. — 2017. — № 1–2. — С. 159–171.
6. *Махорт А.П.* Про алгоритми визначення станів рівноваги відкритої економічної системи за наявності монополістів / А.П. Махорт // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 95–107.
7. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 442 с.

Надійшла 19.02.2019