УДК 330.3:330.46

Л. А. Білий

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ВИРОБНИЧИМИ ФУНКЦІЯМИ

Запропоновано метод визначення граничних показників ефективності виробництва за одночасної зміни ресурсів. Усунено проблему використання виробничих функцій, пов'язану з вимогами до існування похідних цих функцій.

The method for determining the boundary of production performance under simultaneous change of resources. Fixed problem using production functions related to the requirements for the existence of the derivatives of these functions.

Ключові слова: *виробнича функція, середня ефективність, гранична ефективність.*

Постановка проблеми. Важливими елементами мікро- і макроекономічної теорії раціонального господарювання є виробник, який витрачає економічні ресурси для виготовлення товарів або надання послуг і виробничі технологічні процеси. У реальному житті технологія постійно вдосконалюється, що веде до змін у виробничому процесі. Але для спрощення моделі поведінки виробника найчастіше вважають, що технологічні зміни не відбуваються. Якщо технологія залишається незмінною, то можна припустити, що існує стійка залежність між певною кількістю ресурсів, які використовуються у виробничому процесі, і тим максимальним обсягом товару, який може бути вироблено за даних умов.

Аналіз виробництва здійснюють за допомогою теорії виробничих функцій, виникнення якої відносять до 1928 р., коли було опубліковано статтю «Теорія виробництва» американських учених – економіста П. Дугласа і математика Д. Кобба. У цій статті на підставі статистичних даних було поставлено такі задачі:

- визначити клас функцій, які найкраще описують співвідношення між трьома характеристиками виробничої діяльності;
- знайти числові параметри, що задають дану функцію;
- порівняти отримані результати з фактичними даними.

З множини функцій авторами була вибрана степенева функція.

Зв'язок між реальним виробничим процесом і його математичною моделлю здійснюють на основі ряду показників [1]. Кожен з показників задає спосіб визначення кількісної характеристики економічного процесу.

© Л. А. Білий, 2014

Ефективність використання ресурсів визначають за допомогою середньої і граничної ефективності ресурсів. Випуск продукції з витратою декількох ресурсів характеризують коефіцієнтом еластичності заміни ресурсів та граничною нормою заміщення ресурсів.

Аналіз останніх досліджень. Найбільше застосування в теоретичному і прикладному макроекономічному аналізі має виробнича функція, яку називають неокласичною і яка може бути представлена у вигляді

$$y = f(x_1, x_2). \quad (1)$$

Виробнича функція (1) повинна бути гладкою, двічі диференційованою й мати такі властивості [2]:

1) при відсутності одного з ресурсів виробництво неможливе, тобто

$$f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0. \quad (2)$$

2) з ростом ресурсів випуск продукції росте, що означає додатність перших похідних:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} > 0, \frac{\partial y}{\partial x_2} > 0. \quad (3)$$

3) зі збільшенням ресурсів швидкість росту випуску сповільнюється, що означає від'ємність других похідних:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1{}^2} < 0, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2{}^2} < 0. \quad (4)$$

Ця властивість характеризує закон спадної ефективності виробництва.

4) при необмеженому збільшенні одного з ресурсів випуск також необмежено росте:

$$f(\infty, x_2) = f(x_1, \infty) = \infty. \quad (5)$$

В економічному аналізі процесу виробництва за допомогою виробничої функції використовують такі показники: середні і граничні ефективності, коефіцієнти еластичності, коефіцієнти заміщення [3].

Середні показники ефективності визначаються за формулою

$$\mu_i = \frac{f(x_1, x_2)}{x_i}, i = 1, 2 \quad (6)$$

і називаються середньою продуктивністю i-го ресурсу (фактора виробництва), або середнім випуском за i-м ресурсом (фактором виробництва).

Поряд із середніми показниками виробничої функції важливу роль відіграють граничні показники, які виражають частинними похідними першого порядку й називають граничними продуктами, або граничними продуктивностями i-го ресурсу (фактора).

Позначимо їх так:

$$\nu_i = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_i}, \; i = 1, 2. \tag{7}$$

Гранична продуктивність наближено показує, на скільки одиниць збільшиться обсяг випуску продукції *y*, якщо обсяг витрат *i*-го ресурсу x_i зростатиме за незмінних обсягів витрат інших ресурсів.

Для розширення можливостей застосування виробничих функцій, використаємо взаємозв'язок між середніми і граничними показниками [4]. Використовуючи вираз [6], подамо вираз функції у вигляді

$$y = \mu_i x_i, \quad i = 1, 2. \tag{8}$$

Таке представлення функції є більш загальним, бо поширюється й на матричний аргумент, що дуже зручно при дослідженні багаторесурсного виробництва.

Вираз граничної ефективності через середню отримаємо диференціюванням (8) по x_i

$$\nu_i = \frac{\partial \mu_i}{\partial x_i} x_i + \mu_i, \; i = 1, 2. \tag{9}$$

Права частина формули (9) містить лише середній показник та його похідну. В ній відсутня похідна виробничої функції (7), відносно якої роблять припущення про неперервну зміну аргументів x_1, x_2 і достатньо плавну зміну випуску при зміні затрат ресурсів. Математичний зміст цих припущень полягає в тому, що функція (1) задана при всіх невід'ємних значеннях x_1 і x_2, є неперервною або необхідне число разів диференційованою функцією своїх аргументів.

Такі умови не завжди можуть виконуватись при дослідженні господарюючих об'єктів за допомогою математичних моделей, що базуються на виробничих функціях.

Метою дослідження є розширення можливості застосування виробничих функцій із взаємозамінними ресурсами шляхом використання математичного взаємозв'язку між середніми і граничними ефективностями ресурсів.

Результати досліджень. Розглянемо питання заміни виробничих ресурсів на прикладі двофакторної виробничої функції (1). Характеристика такої заміни носить назву граничної норми заміни *i*-го ресурсу *j*-м ресурсом. Вона виражає співвідношення між зміною обсягу випуску, викликаною зміною на одиницю *i*-го ресурсу, і такою ж зміною, обумовленою варіацією на одиницю *j*-го ресурсу. Інша інтерпретація функції граничної норми заміни є такою. Значення γ_{ij} у точці $x = (x_1, ..., x_n)$ визначає наближено, на скільки необхідно збільшити ресурс *j*, компенсуючи зменшення ресурсу *i* на одиницю за умови, що решта ресурсів лишились незмінними, а вихідне значення ресурсів становило $x_1,...,x_n$ [5].

Граничну норму еквівалентної взаємозаміни двох ресурсів і та j визначають за допомогою функції

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f / \partial x_i}{\partial f / \partial x_j} = -\frac{\nu_i}{\nu_j}. \tag{10}$$

Збільшення використання будь-якого з ресурсів, наприклад *i*-го, його гранична ефективність падає, тому додаткові витрати цього ресурсу звільняють все більше ресурсу *j*. Отже, гранична норма еквівалентної взаємозаміни двох ресурсів зменшується. Для отримання залежності граничної норми еквівалентної взаємозаміни *i*-го ресурсу, необхідно (10) продиференціювати по x_i.

$$\frac{\partial \gamma_{ік}}{\partial x_{ік}} = \frac{1}{\nu} = \left(\gamma_{ік} \frac{\partial \nu_к}{\partial x_к} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \nu_i}{\partial x} \right). \tag{11}$$

Співвідношення середніх і граничних показників ефективності можна використати для аналізу виробничого процесу при одночасній зміні декількох ресурсів. Покажемо це на прикладі двофакторної виробничої функції (1).

Середній показник ефективності двох факторів подамо у вигляді

$$\mu_{12} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1 x_2}. \tag{12}$$

З виразу (12) виробничу функцію (1) можна представити добутком середньої ефективності і двох ресурсів

$$f(x_1, x_2) = \mu_{12} x_1 x_2 . \tag{13}$$

Похідна функції (13) по двох аргументах являє собою граничний показник ефективності двох ресурсів

$$\nu_{12} = \frac{\partial(\mu_{12} x_1 x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{14}$$

Виконавши диференціювання виразу (14) і врахувавши при цьому рівність нулю других похідних

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 ,$$

після нескладних перетворень остаточно отримаємо

$$\nu_{12} = \frac{\partial^2 \mu_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 x_2 + 2 \frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} x_1 + 2 \frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_2} x_2 + 2\mu_{12}. \tag{15}$$

Права частина формули (15) свідчить, що про граничну ефективність одночасної зміни двох ресурсів можна судити по їх середній ефективності.

Висновки. Використання виробничих функцій для моделювання макро- і мікроекономічних процесів ускладнюється вимогами щодо існування, гладкості і області визначеності таких функцій. Показано можливість усунення проблеми шляхом використання взаємозв'язків між середніми і граничними показниками ефективності і розширення аналізу економічних систем на випадок дискретних емпіричних значень факторів виробництва.

На прикладі виробничої функції двох змінних отримано аналітичні вирази середніх і граничних показників ефективності при одночасній зміні двох ресурсів.

Запропонований підхід до знаходження основних характеристик виробничих функцій можливо узагальнити на багатофакторні функції і в таких спосіб суттєво спростити економічний аналіз.

Список використаних джерел

1. Здрок В.В., Паславська І.М. Моделювання економічної динаміки: Підручник для ВНЗ. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2007. – 244 с.
2. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Столяр А.М. Основ математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів: Навч. посібник. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. – 304 с.
3. Статистические методы анализа экономической динамики / Под ред. Т. В. Рябушкина, А. А. Френкеля. – М.: Наука, 2010. – 257 с.
4. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике: Учебник / Под общ. ред. д.э.н., проф. А. В. Сидоровича; МГУ им. М. В. Ломоносова. – 3-е изд. – М.: Изд-во «Дело и Сервис», 2010. – 368 с.
5. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / В. В. Федосеев и др.; Под ред. В. В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.

Білий Леонід Адамович – професор, доктор технічних наук, професор кафедри економічної кібрнетики Львівського інституту банківської справи Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ).