**МОДЕЛЮВАННЯ, ОПТИМІЗАЦІЯ
ТА ПРОГНОЗУВАННЯ В ЕНЕРГЕТИЦІ**

ISSN 2786-7102 (Online), ISSN 2786-7633 (Print)
https://doi.org/10.15407/srenergy2024.02.044

УДК 004.942:621.311

**Анатолій Кузьмичов**, канд. техн. наук, доцент, https://orcid.org/0009-0007-3792-576X
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України, вул. М. Шпака, 2, Київ, 03113, Україна
e-mail: akuzmychov@gmail.com

# КІЛЬКІСНЕ ОЦІНЮВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕРЕЖЕВИХ СТРУКТУР ЗА АНАЛІЗОМ ЧУТЛИВОСТІ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ ДО ЗОВНІШНІХ ВПЛИВІВ

**Анотація.** *Реальна мережева організаційна структура постійно знаходиться під впливом зовнішніх факторів, які можуть бути приводом для виникнення неочікуваних наслідків через каскадне розповсюдження відповідних збурень, направлених на критично важливі параметри. Параметричний аналіз чутливості – новітня обчислювальна процедура, результати якої надають досліднику уявлення і кількісну оцінку відповідної реакції структури у вигляді аналітичної платформи як композиції і взаємодії сценарного аналізу, розвитку каскадного процесу та технології оптимізаційного моделювання. Основне завдання – своєчасне пристосування до очікуваних змін як складової бізнес-аналітики, зорієнтованої на розв'язання задач оптимального розподілу і використання обмежених ресурсів. Узагальнена задача про потоки мінімальної вартості – типовий приклад розповсюджених проблем із оптимального розподілу і використання обмежених, зокрема енергетичних, ресурсів будь-якої природи і призначення із застосуванням аналітичного апарату наукового менеджменту та аналізу управлінських рішень; у її мережевій моделі увага приділяється потенціалам вузлів. Задача про максимальний потік – приклад активного і ефективного застосування методів і моделей потокової оптимізації, де досліджуються процеси, характерні для об'єктів із мережевою організацією, енергетичні системи і комплекси в тому числі; у її моделі критичними є параметри дуг. У статті для цих класичних оптимізаційних задач на конкретних прикладах побудовано математичні і табличні моделі, розв'язані пряма і двоїста задачі математичного програмування; здійснено наступні етапи – організація комп'ютерного експерименту і побудова аналітичної платформи щодо оцінювання поведінки мережевої структури під впливом зовнішніх факторів та збурень як їхніх наслідків. Отримані результати мають стати в нагоді планово-управлінському персоналу та топ-менеджменту під час обговорення й прийняття рішень щодо, наприклад, оптимального розміщення енергетичного обладнання чи зваженого розподілу енергетичних потоків в системі «джерела-стоки» тощо.*

**Ключові слова:** оптимізаційне моделювання, максимальний потік мережею, потоки мінімальної вартості, мережеві організаційні структури, Decision Making, Spreadsheet Modeling and Analytics.

## 1. Вступ

В математичному програмуванні, успішній організаційній практиці й розвинених комп'ютерних технологіях визначальною за ефективністю й масовим застосуванням є потокова оптимізація як клас задач, моделей та яскравих впроваджень, що має конкретні відомості про походження [1]. Транспортна задача з проміжними пунктами (про потоки мінімальної вартості) – характерна модель; наступний крок її розвитку і наближення до реальності – перехід до мережевих структур, утворених зваженими вузлами джерел і стоків та проміжними «простими» вузлами із транзитними (незмінними) ними потоками; далі – задача про максимальний потік, де основна увага приділена конфігурації і властивостям структури комунікацій [2–8].

За роки інтенсивного розвитку аналітичного апарата потокової оптимізації усі вузли стали зваженими й універсальними із вагою у формі пропозиція / попит; мережа, відтворюючи практику, стала змішаною, з’явилися паралельні дуги. Ще ближчою до практики є узагальнена потокова модель, коли через різні властивості самої комунікації (дуги) величина потоку на виході дуги відрізняється від величини на вході: вона менша чи більша за значенням, внаслідок втрат чи приросту, заданого коефіцієнта $\beta$: $f_{вих} = (1 \pm \beta)f_{вх}$.

В класичних моделях оптимального розподілу потоків мережею вага вузла – це імовірніше можливість поділитися наявним запасом чи потребою його поповнення, що явно впливає на розподіл, бо «простий» проміжний вузол (вагою 0) не впливає на величину транзитного потоку, реалізуючи в моделі рівняння балансу: $f_{вих}(x) = f_{вх}(x)$, хоча насправді це не так – в реальній мережі вузол, як і дуга, має параметр $\pm\beta$, що явно впливає на розподіл потоків.

Мережева структура – зв’язана система вузлів і дуг, реальний стан розподілу потоків нею знаходиться, зокрема, під некерованим впливом ззовні, із різними властивостями, умовно «позитивними» та «негативними», й, відповідно, з різними їхніми наслідками.

Кількісне оцінювання таких впливів, особливо під час активних змін в оточуючому структуру середовищі, – серйозний виклик до розробки відповідних аналітичних моделей і розрахунків, які б дозволяли робити обґрунтований прогноз на тривалий горизонт планування й формувати проєкти управлінських рішень за результатами відповідних оптимізаційних розрахунків [9–11].

Нижче наведено моделі двох задач мережевої оптимізації про розподіл ресурсів, де імітуються послідовні впливи ззовні, а отримані за ними наслідки (за покроковим розв’язанням оптимізаційної задачі) у вигляді оновлених значень змінних рішень досліджуються з використанням засобів аналізу параметричної чутливості основних показників на зміни вхідних даних [12, 13].

## 2. Задачі, моделі, методи

### 2.1. Мережева структура

Мережа (лінійний[1] граф) $G = [N, A]$ складається із множини $N$ елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та множини $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, із $m$ упорядкованих пар $a_k = (x_i, x_j)$, $k = 1, \ldots, m$, утворених із елементів $N$ згідно з її конфігурацією; $i, j = 1, \ldots, n$, $(n, m)$ – розмір мережі, задачі і мережевої моделі. Елементи $N$ називаються вузлами (nodes), а елементи $A$ – дугами (arcs); вузли і дуги мають імена / коди, параметри і значення.

Мережа, що відтворює конфігурацію і конструктивні властивості реальної / модельної структури із вузлів і дуг згідно з поставленою задачею, є мережевою моделлю задачі оптимізації; процес моделювання розпочинається з її зображення, орієнтацію потоків враховують основні класи мережевих моделей: направлена, ненаправлена, змішана.

Зображення направленої (орієнтованої) мережі (рис. 1) формується зображенням кожного вузла $x_i$ із $N$ (прямокутник з ім’ям) та кожної дуги (стрілка, направлена від вузла $x_i$ до вузла $x_j$, для пари $(x_i, x_j)$ із $A$, у стрілки є початок (виходить із $x_i$) та кінець (входить в $x_j$). Мережа як структура «вузли-дуги» окрім направлених може містити ненаправлені дуги ($\leftrightarrow$) – останні зображують двома направленими назустріч стрілками ($a \to b$) та ($b \to a$) – та паралельні дуги, як-от дуги ($b \to f$) та ($b \to f$); за властивостями однакові / різні, із однаковою / різною вагою; загалом це змішана мережа.

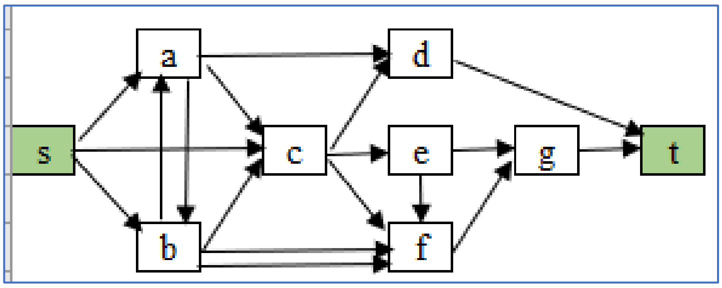



**Рисунок. 1.** Змішана мережева модель

де: $N = (a, b, c, d, e, f, g, s, t)$, множина 9 вузлів; $A = \{(s, a), (s, b), \ldots, (d, t), (g, t)\}$, множина 18 дуг.

[1] відтворює математичну модель із лінійних функцій, рівнянь і нерівностей

До заданих *n* вузлів додають два особливих вузла, це:

• вузол *s* (узагальнене штучне джерело, з якого сумарний потік шуканої величини *v* лише виходить, source) та

• вузол *t* (узагальнений штучний стік, у який сумарний потік шуканої величини *v* лише входить, terminal).

Тоді усі інші вузли – проміжні, у них потоки із певними значеннями входять і з них виходять, для них справедливе рівняння балансу (за принципом збереження потоку): скільки увійшло, стільки ж вийшло (враховуючи потенціал / вагу вузла). Використання узагальнених вузлів, джерела і стоку, суттєво спрощує організацію моделювання, дозволяючи досить просто модифікувати структуру мережі зміною числа і локації заданих джерел і стоків без зміни формул, лише зміною відповідних стрілок від *s* і до *t* (рис. 2).

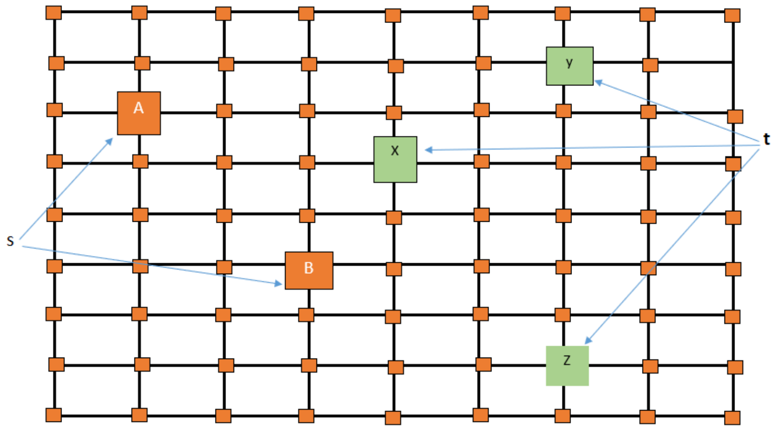



**Рисунок. 2.** Узагальнена мережа

В теорії математичної оптимізації мережеву структуру представляють у матричній, в розрахунках – у мережевій (табличній) формах, наприклад матриця інциденцій «вузли-рядки – дуги-стовпці» зручна для суто математичної роботи, але дуже громіздка для обчислень, проте таблична форма лаконічна, бо містить дані лише для заданих n вузлів і m дуг; надалі застосовується.

Кожному вузлу $x_i \in N$ відповідає число $\pi(x_i)$, це заданий ваговий коефіцієнт (потенціал), що відповідає пропозиції / попиту (в розрахунках може мати різні знаки).

Кожній дузі $(x_i, x_j) \in A$ відповідають величини:

• $c_{ij}$, питомі витрати на транспортування потоку дугою $(x_i, x_j)$,

• $p_{ij}$, вага дуги (пропускна здатність),

• $\beta_{ij}$, технологічний коефіцієнт (втрати / приріст).

### 2.2 Узагальнена задача про потоки мінімальної вартості

Задана ненаправлена мережа розміром (14, 60), де 6 джерел ($s_0 \dots s_5$) та 8 стоків ($t_0 \dots t_7$); входи: вузли мають відповідні потенціали $\pi_i$ (пропозиції / попит), дуги – питомі витрати ($c_{ij}$) і коефіцієнти втрат / приростів ($\pm\beta_{ij}$); усі значення довільні, рис. 3.

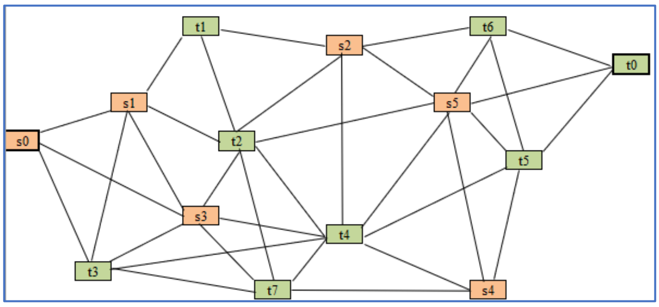



**Рисунок 3.** Мережева структура

Ненаправлені дуги при розподілі потоків дозволяють розглядати будь-який вузол як спроможний для транзиту, що утворює ланцюги постачання від генерації (пропозиції) до споживання (попит); за потреби модель модифікується уведенням обмеження значень потоків пропускними здатностями дуг (знизу, зверху).

В лінійному програмуванні задача оптимізації складається з прямої та двоїстої до неї.

Тут розв'язком прямої задачі є величини шуканих дугових потоків ($f_{ij}$), з яких утворюються направлені ланцюги потоків від джерел до стоків, за якими загальні витрати на транспортування мінімальні ($f_{ij} \equiv f(x_i, x_j)$).

**Задача оптимізації**

Знайти вектор $F_{вих} = \{f_{вих}(x_i, x_j)\}$, за яким $F_{вх} = \{f_{вх}(x_i, x_j) = (1 - \beta_{ij}) \times f_{вих}(x_i, x_j)\}$, $i, j = 1 \ldots 14$, ЦФ $CF_{вих} \rightarrow \min$ за обмежень:

$$\sum f_{вих}(x_i, x_j) - \sum f_{вх}(x_j, x_i) \geq \pi_i$$

$$f_{вих}(x_i, x_j),\ f_{вх}(x_i, x_j) \geq 0$$

Результат: потоки з приростом виділені червоним, рис. 4.

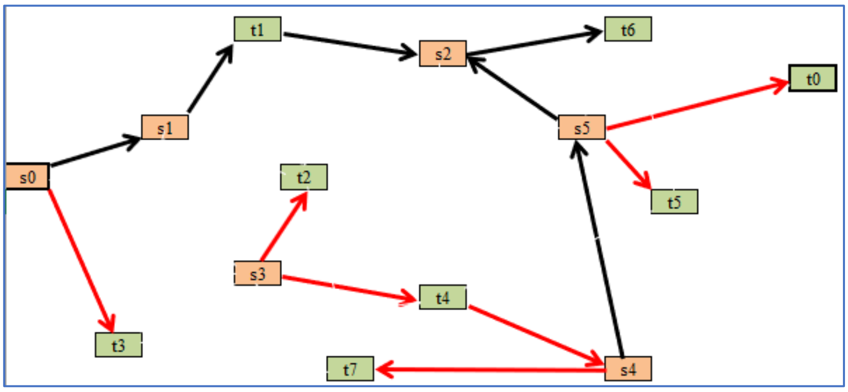



**Рисунок 4.** Оптимальний розподіл потоків

Аналіз розв'язку, рис. 5.

| Поч | Кін | Варт | Бета | Хвих | Хвх |
|---|---|---|---|---|---|
| s4 | t7 | 24 | **0,1** | **54,5** | **60,0** |
| s1 | t1 | 15 | **-0,14** | **33,6** | **28,9** |
| s3 | t4 | 33 | **0,61** | **21,0** | **33,9** |
| s0 | t3 | 18 | **0,45** | **20,0** | **29,0** |
| s0 | s1 | 16 | **-0,07** | **20,0** | **18,6** |
| s5 | t5 | 19 | **0,11** | **19,8** | **22,0** |
| s2 | t6 | 22 | **-0,35** | **18,5** | **12,0** |
| t4 | s4 | 9 | **0,37** | **15,9** | **21,7** |
| s4 | s5 | 9 | **-0,12** | **10,2** | **9,0** |
| t1 | s2 | 12 | **-0,07** | **6,9** | **6,4** |
| s5 | s2 | 17 | **-0,03** | **6,2** | **6,0** |
| s3 | t2 | 32 | **0,49** | **5,4** | **8,0** |
| s5 | t0 | 10 | **0,05** | **1,9** | **2,0** |
| s0 | s1 | 35 | 0,41 | 0,0 | 0,0 |

| | Вузли | Потенц. | Обм | ТЦ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | s0 | -40 | -40,0 | 0,09 | |
| 2 | s1 | -15 | -15,0 | 17,30 | |
| 3 | s2 | -6 | -6,0 | 53,29 | |
| 4 | s3 | -28 | -26,4 | 0,00 | |
| 5 | s4 | -43 | -43,0 | 21,53 | |
| 6 | s5 | -19 | -19,0 | 34,69 | 2167,99 |
| 7 | t0 | 2 | 2,0 | 42,57 | 6751,8 |
| 8 | t1 | 22 | 22,0 | 37,56 | 4583,81 |
| 9 | t2 | 8 | 8,0 | 21,48 | |
| 10 | t3 | 29 | 29,0 | 12,48 | |
| 11 | t4 | 18 | 18,0 | 20,50 | |
| 12 | t5 | 22 | 22,0 | 48,37 | |
| 13 | t6 | 12 | 12,0 | 115,83 | |
| 14 | t7 | 60 | 60,0 | 41,39 | |
| | | | | | |
| | Попит | 173 | 4583,81 | | |
| | Проп. | -151 | ЦФ | | |
| | Викор. | -149,4 | | | |

**Рисунок 5.** Потоки ($Х_{вих}$) та їх двоїсті оцінки (ТЦ)

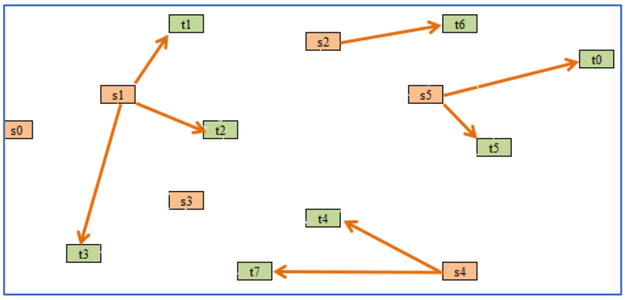
Пряма задача: вибором напрямків руху і значень $x_{ij}$ потоків знайдено значення $F_{вих}$ та $F_{вх}$, за якими задоволено попит за мінімальних транспортних витрат (4583,81 од.), хоча за входами попит (173 од.) перевищує пропозиції (151 од.), він задоволений повністю за рахунок приросту на відповідних комунікаціях.

Двоїста задача: її результатами є оцінки потенціалів вузлів (тіньові ціни) у вимірі потоків, наприклад в м$^3$, їх значення – «віддача» вузла – питоме збільшення ЦФ при збільшенні потенціалу відповідного вузла на 1; за цими оцінками максимальне значення ЦФ двоїстої задачі: = 6751,8 (попит) – 2167,99 (пропозиції) = 4583,81 од.

**Модифікація моделі**

В умовах проєктування комунікацій відома конфігурація мережі та лише запланований попит у вузлах споживачів, треба визначити потенціали вузлів-джерел для оптимального забезпечення попиту, в моделі це шукані значення нових змінних рішень (задача про оптимальне розміщення вузлів-джерел).

Зміни в моделі: додається шуканий вектор пропозицій (U2:U7) із від'ємними значеннями, відповідно, додаються обмеження: $F_{вих} \geq 0$ та (V8:V15) = (U8:U15) (фіксація попиту). Результат показаний на рис. 6.




| S | T | U | V | W | X | Y | Z | AA | AB | AC | AD |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Вузли | Потенц. | Обм | | | Поч | Кін | Варт | Бета | Хвих | Хвх |
| 1 | s0 | 0,00 | 0,00 | | 23 | s4 | t7 | 24 | **0,1** | **54,5** | **60,0** |
| 2 | s1 | -50,50 | -50,50 | | 4 | s1 | t1 | 15 | **-0,14** | **25,6** | **22,0** |
| 3 | s2 | -18,46 | -18,46 | | 29 | s5 | t5 | 19 | **0,11** | **19,8** | **22,0** |
| 4 | s3 | 0,00 | 0,00 | | 7 | s1 | t3 | 15 | 0,52 | **19,1** | **29,0** |
| 5 | s4 | -68,95 | -68,95 | | 13 | s2 | t6 | 22 | **-0,35** | **18,5** | **12,0** |
| 6 | s5 | -21,72 | -21,72 | | 22 | s4 | t4 | 5 | 0,25 | **14,4** | **18,0** |
| 7 | t0 | 2 | 2,0 | | 5 | s1 | t2 | 27 | 0,37 | **5,8** | **8,0** |
| 8 | t1 | 22 | 22,0 | | 30 | s5 | t0 | 10 | **0,05** | **1,9** | **2,0** |
| 9 | t2 | 8 | 8,0 | | 1 | s0 | s1 | 35 | 0,41 | 0,0 | 0,0 |
| 10 | t3 | 29 | 29,0 | | 2 | s0 | s3 | 12 | -0,63 | 0,0 | 0,0 |
| 11 | t4 | 18 | 18,0 | | 3 | s0 | t3 | 18 | **0,45** | 0,0 | 0,0 |
| 12 | t5 | 22 | 22,0 | | 6 | s1 | s3 | 31 | 0,04 | 0,0 | 0,0 |
| 13 | t6 | 12 | 12,0 | | 8 | s1 | s0 | 24 | -0,46 | 0,0 | 0,0 |
| 14 | t7 | 60 | 60,0 | | 9 | s2 | t1 | 30 | -0,77 | 0,0 | 0,0 |
| | | | | | 10 | s2 | t2 | 29 | 0,41 | 0,0 | 0,0 |
| | Попит | 173,00 | 3010,44 | | 11 | s2 | t4 | 24 | -0,39 | 0,0 | 0,0 |
| | Проп. | -159,63 | ЦФ | | 12 | s2 | s5 | 23 | -0,21 | 0,0 | 0,0 |

**Рисунок 6.** Конфігурація, таблична модель

Аналіз

Шукані потенціали вузлів-джерел: $s_0$ (0), $s_1$ (50,5), $s_2$ (18,46), $s_3$ (0), $s_4$ (68,95), $s_5$ (21,72).

Сума пропозицій (159,63), сума попиту (173,0), мінімальні витрати (ЦФ) 3010,44 гр. од.

### 2.3 Задача про максимальний потік

У змішаній мережі з $n$ вузлів та $m$ дуг входами є вагові коефіцієнтів дуг, наприклад, їхні пропускні здатності; треба визначити значення максимального потоку v (пряма задача), який пройде від джерел до стоків, за умови, що сума потоків із джерел дорівнює сумі потоків у стоки.

Розв'язком двоїстої задачі (на максимум іншої ЦФ, але з таким же значенням) є так званий мінімальний перетин (minimal cut) – найменша за кількістю сукупність насичених дуг, сумарна вага яких $w$ дорівнює шуканому максимальному потоку $v$. Його видаленням мережу «перетинають», чим припиняють її функціонування, відокремлюючи джерела від стоків. Відповідно, для збільшення максимального потоку мережею ваги саме цих дуг збільшують, тож цінністю моделі «max-min» часто є знайдена саме ця сукупність дуг як «вузьке місце» (bottleneck) мережі.

Для будь-якого $i$-го вузла в математичній моделі шукані дугові потоки $f(x_i, x_j)$ мають задовольняти таким лінійним рівнянням, а для будь-якої $(x_i, x_j)$-ї дуги – нерівностям:

$$i = s \rightarrow \sum_{j \in A(s)} f(s, j) = v$$

$$i = t \rightarrow \sum_{j \in B(t)} f(j, t) = v$$

$$i \neq j \rightarrow \sum f_{вих}(x_i, x_j) - \sum f_{вх}(x_j, x_i) = 0$$

$$f(x_i, x_j) \leq c(x_i, x_j)$$

<u>Приклад.</u>

Задана змішана мережева структура: $n$ = 9, $m$ = 18 (зображена на рис. 3).

Вхідні дані: вектор вагових коефіцієнтів $P = (p_1, \ldots, p_{18})$.

**Задача оптимізації**

Знайти вектор потоків $F(18)$

$$ЦФ \quad v = \sum_{j \in A(s)} f(s, j) \rightarrow \max$$

за обмежень:

$$\sum_{j\in B(t)} f(j,t) = v$$

$$\sum_{j\in B(t)} f(j,t) - \sum_{j\in A(s)} f(s,j) = 0 \qquad f(x_i,x_j) \ge 0 \quad f(x_i,x_j) \le p(x_i,x_j)$$

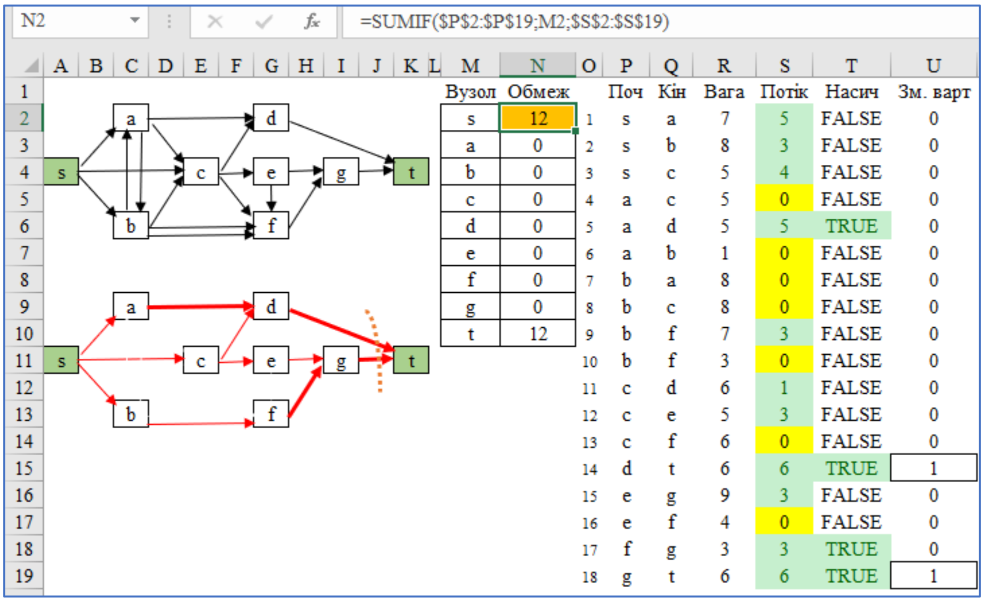
$A(s)$, $B(t)$ – множини вузлів, куди виходять потоки із $s$, входять в $t$, відповідно.

Табличнa модель (рис. 7).

Входи: список вузлів (M1:M10), список координат і вагових коефіцієнтів дуг (P1:R19).

Обчислення: ЦФ і ліві частин обмежень для вузлів (N2:N10).

Виходи (результат оптимізації): значення потоків (S1:S19), значення ЦФ (N2), насиченість дуг (T1:T19), двоїсті оцінки / звіт зі стійкості (U1:U19).




| Вузол | Обмеж |
|---|---|
| s | 12 |
| a | 0 |
| b | 0 |
| c | 0 |
| d | 0 |
| e | 0 |
| f | 0 |
| g | 0 |
| t | 12 |

| | Поч | Кін | Вага | Потік | Насич | Зм. варт |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | s | a | 7 | 5 | FALSE | 0 |
| 2 | s | b | 8 | 3 | FALSE | 0 |
| 3 | s | c | 5 | 4 | FALSE | 0 |
| 4 | a | c | 5 | 0 | FALSE | 0 |
| 5 | a | d | 5 | 5 | TRUE | 0 |
| 6 | a | b | 1 | 0 | FALSE | 0 |
| 7 | b | a | 8 | 0 | FALSE | 0 |
| 8 | b | c | 8 | 0 | FALSE | 0 |
| 9 | b | f | 7 | 3 | FALSE | 0 |
| 10 | b | f | 3 | 0 | FALSE | 0 |
| 11 | c | d | 6 | 1 | FALSE | 0 |
| 12 | c | e | 5 | 3 | FALSE | 0 |
| 13 | c | f | 6 | 0 | FALSE | 0 |
| 14 | d | t | 6 | 6 | TRUE | 1 |
| 15 | e | g | 9 | 3 | FALSE | 0 |
| 16 | e | f | 4 | 0 | FALSE | 0 |
| 17 | f | g | 3 | 3 | TRUE | 0 |
| 18 | g | t | 6 | 6 | TRUE | 1 |

**Рисунок 7.** Таблична модель, результат

Аналіз результатів

Пряма задача: максимальний потік (ЦФ) = 12. Потоки: з 18 дуг 7 дуг з нульовими потоками, 4 дуги (True) насичені, інші мають резерв.

Двоїста задача: дві насичені дуги – ($d$, $t$) та ($g$, $t$) – утворили мінімальний перетин («вузьке місце»), це означає, що заради збільшення потоку треба обережно збільшувати вагу саме цих дуг та вчасно зупинитись.

Аналіз чутливості

Збільшувати їхню вагу можна окремо чи разом, про це – в таблиці аналізу чутливості, у ній – збільшення ваги кожної з цих дуг від заданих 6 до 18.

| $N$2 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 12 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 7 | 13 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 8 | 14 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| 9 | 15 | 16 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| 10 | 16 | 17 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 |
| 11 | 17 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |
| 12 | 17 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |
| 13 | 17 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |
| 14 | 17 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |
| 15 | 17 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |
| 17 | 17 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |
| 18 | 17 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |

Одноосібно: вага R15 доведе значення ЦФ до 14 при вазі до 8, R19 – до 17 при вазі до 11. Разом – максимальний приріст до $v$ = 19 і зупинка: далі збільшувати ваги немає сенсу, бо мінімальний перетин утворять інші дуги.

## 3. Кількісне оцінювання зміни стану мережевої структури

Певна мережева структура із розподілу потоків від джерел до стоків під впливом ззовні за їх наслідками може перебувати у двох протилежних станах, починаючи з поточного стану «як є», це: зростання і розвиток або спад, деградація аж до ліквідації, залежно від характеру впливів.

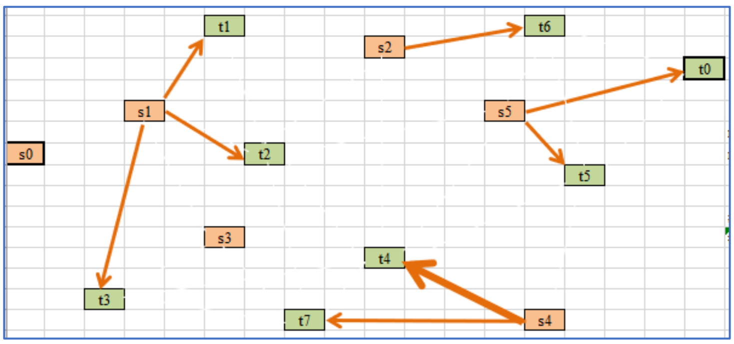
Коли структура поступово розвивається згідно з її функціональністю / призначенням, конкретна ознака – зростання значення основного вихідного показника; у цій задачі величини максимального потоку (ЦФ) отримали додатковий «позитивний» ресурс, який надалі розподіляється між складовими, відповідно змінюючи певні параметри і відносини (покращення умов життя або ж, навпаки, аварійні чи надзвичайні ситуації); далі – розвиток, це позитив.

Стан деградації структури (за моделлю про максимальний потік) виникає, наприклад, внаслідок аварії або планового виведення з експлуатації застарілого обладнання чи споруди і коли одночасно будується відповідне нове, тоді при поступовому зниженні необхідного ресурсного забезпечення (додатковий ресурс від'ємний) структура має зберігати свою, хоч і обмежену, функціональність / стійкість (бо ж треба забезпечувати якнайбільший потік чогось) якнайдовше. Такий же стан, і це важливіше, також може бути, якщо певну «погану», чит. ворожу, організаційну структуру треба ліквідувати за наявним і обмеженим відповідним атакуючим ресурсом (персонал, обладнання, матеріали, час); це – розв'язок прямої задачі про пошук мінімального перетину (критерій min-max).

Ідея: в моделі, що обговорюється, визначається ключовий параметр, вага якого – складова правої частини обмеження щодо дугового потоку; організується циклічний обчислювальний процес параметричного аналізу чутливості, де на кожному кроці зі зміною значення ключового параметра (із врахуванням допоміжного ресурсу як аналога впливу) отримують значення виходів оптимізаційної задачі.

### 3.1. Задача про потоки мінімальної вартості

Ціль задачі – забезпечити заданий попит споживачів за мінімальної суми транспортних витрат, визначальний параметр – вектор значень попиту у вузлах-стоках. Для проведення аналізу чутливості моделі до зміни значень цього параметра формується шуканий вектор допоміжних ресурсів (впливів, W6:W14) для збільшення правої частини обмеження (V1:V14). Результат показаний на рис. 8.




| S | T | U | V | W | X | AA | AB | AC | AD | AE | AF | AG |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Вузли | Потенц. | Обм | | | | Поч | Кін | Варт | Бета | Хвих | Хвх |
| 1 | s0 | 0,0 | 0,0 | | | 22 | s4 | t4 | 5 | 0,25 | **94,4** | **118,0** |
| 2 | s1 | -50,5 | -50,5 | | | 23 | s4 | t7 | 24 | **0,1** | **54,5** | **60,0** |
| 3 | s2 | -18,5 | -18,5 | | | 4 | s1 | t1 | 15 | **-0,14** | **25,6** | **22,0** |
| 4 | s3 | 0,0 | 0,0 | | | 29 | s5 | t5 | 19 | **0,11** | **19,8** | **22,0** |
| 5 | s4 | **-148,9** | -148,9 | | | 7 | s1 | t3 | 15 | 0,52 | **19,1** | **29,0** |
| 6 | s5 | -21,7 | -21,7 | рес | нов обм | 13 | s2 | t6 | 22 | **-0,35** | **18,5** | **12,0** |
| 7 | t0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 5 | s1 | t2 | 27 | 0,37 | **5,8** | **8,0** |
| 8 | t1 | 22 | 22 | 0 | 22 | 30 | s5 | t0 | 10 | **0,05** | **1,9** | **2,0** |
| 9 | t2 | 8 | 8 | 0 | 8 | 1 | s0 | s1 | 35 | 0,41 | 0,0 | 0,0 |
| 10 | t3 | 29 | 29 | 0 | 29 | 2 | s0 | s3 | 12 | -0,63 | 0,0 | 0,0 |
| 11 | t4 | 18 | 118 | **100** | **118** | 3 | s0 | t3 | 18 | **0,45** | 0,0 | 0,0 |
| 12 | t5 | 22 | 22 | 0 | 22 | 6 | s1 | s3 | 31 | 0,04 | 0,0 | 0,0 |
| 13 | t6 | 12 | 12 | 0 | 12 | 8 | s1 | s0 | 24 | -0,46 | 0,0 | 0,0 |
| 14 | t7 | 60 | 60 | 0 | 60 | 9 | s2 | t1 | 30 | -0,77 | 0,0 | 0,0 |
| | | | | | | 10 | s2 | t2 | 29 | 0,41 | 0,0 | 0,0 |
| | Попит | 273,0 | 3410,44 | **100** | | 11 | s2 | t4 | 24 | -0,39 | 0,0 | 0,0 |
| | Проп. | -239,6 | ЦФ | 100 | | 12 | s2 | s5 | 23 | -0,21 | 0,0 | 0,0 |

**Рисунок 8.** Розподіл потоків, таблична модель

Зауваження: при збільшенні допоміжних ресурсів (впливів) без додаткових обмежень на пропускну спроможність дуг поступово утворюється ланцюг домінуючих потоків (s4, t4), поки такий собі «яр», який неперервно і нескінченно поглиблюється, поглинаючи зростаючий ресурс, утворюючи «річку», що з'єднує джерела і стоки. Формування домінуючого ланцюга цілком узгоджується із природними явищами, де за принципом мінімізації витрат внутрішньої енергії (її вивільненням) оптимально розподіляються, наприклад, потужні водні потоки: так Дніпро, колись знайшовши щілину у гранітних масивах Запоріжжя (регіону), визначив там своє найглибше русло (тепер р. Нове Дніпро), зробивши Хортицю островом, а річка Колорадо в США у такий самий спосіб утворила відомий Великий каньйон.

Формування із таких ланцюгів виокремлених зон «джерела-стоки» (агломерацій, кластерів) для практики – це визначення діючого / потенційного регіону із концентрацією, наприклад, потужної енергетичної генерації та споживачів із високим попитом (як-от комплекс із електростанцій на Запоріжжі та оточуюча його електрометалургія).

### 3.2. Задача про максимальний потік

Збільшити потік мережею можна збільшивши значення ваг дуг, маючи задану додаткову величину інвестиційного ресурсу ($r$); відповідно, ставиться задача оптимального розподілу (впливом на параметри) цього ресурсу між $m$ дугами за «обережним» для структури критерієм – максимізації потоку від джерел до стоків. За цим підходом на $k$-ту дугу припаде знайдена оптимальна частка $r_k$ цього ресурсу, якщо базову нерівність $f(x_i, x_j) \leq c(x_i, x_j)$ замінити на $f(x_i, x_j) \leq c(x_i, x_j) + \phi(r_k)$; це – нова вага дуги, $\phi(r_k)$ – приріст ваги за рахунок допоміжного ресурсу. Наприклад, 14-та дуга ($d$, $t$) вагою $c_{14} = 6$, для її подвоєння треба $\rho_{14} = 2$ од. ресурсу, отримано $r_{14} = 1$ од. ресурсу, тоді нова вага $c_{14} = 6 + 1/2{\times}8 = 9$.

| M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вузол | Обмеж | | Поч | Кін | Вага | Рес | Потік | Вплив | Нова вага |
| | | 14 | d | t | 6 | 2 | 9 | 1 | 9 |
| | | 15 | e | g | 9 | 2 | 3 | 0 | 9 |

Зміна базової моделі: додаються щодо допоміжних ресурсів вектори заданих і шуканих параметрів ($\rho_{ij}$) і змінних ($r_{ij}$) та змінювана пропозиція ($R$), яка оптимально розподіляється між дугами, змінюючи праві частини обмежень для дуг (і тим самим збільшуючи потік).

| M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вузол | Обмеж | | Поч | Кін | Вага | Рес | Потік | Вплив | Нова вага |
| s | 14,3 | 1 | s | a | 7 | 7 | 5,0 | 0 | 7 |
| a | 0 | 2 | s | b | 8 | 2 | 4,3 | 0 | 8 |
| b | 0 | 3 | s | c | 5 | 2 | 5,0 | 0 | 5 |
| c | 0 | 4 | a | c | 5 | 7 | 5,0 | 0 | 5 |
| d | 0 | 5 | a | d | 5 | 3 | 0,0 | 0 | 5 |
| e | 0 | 6 | a | b | 1 | 8 | 0,0 | 0 | 1 |
| f | 0 | 7 | b | a | 8 | 7 | 0,0 | 0 | 8 |
| g | 0 | 8 | b | c | 8 | 2 | 1,3 | 0 | 8 |
| t | 14,3 | 9 | b | f | 7 | 3 | 3,0 | 0 | 7 |
| | | 10 | b | f | 3 | 7 | 0,0 | 0 | 3 |
| | | 11 | c | d | 6 | 2 | 6,3 | 0 | 6 |
| | | 12 | c | e | 5 | 5 | 5,0 | 0 | 5 |
| | | 13 | c | f | 6 | 8 | 0,0 | 0 | 6 |
| | | 14 | d | t | 6 | 6 | 6,3 | 0 | 6 |
| | | 15 | e | g | 9 | 8 | 5,0 | 0 | 9 |
| | | 16 | e | f | 4 | 7 | 0,0 | 0 | 4 |
| | | 17 | f | g | 3 | 3 | 3,0 | 0 | 3 |
| | | 18 | g | t | 6 | 2 | 8,0 | 1 | 8 |
| | | | | | | | | 1 | |
| | | | | | | | Проп. | 1 | |

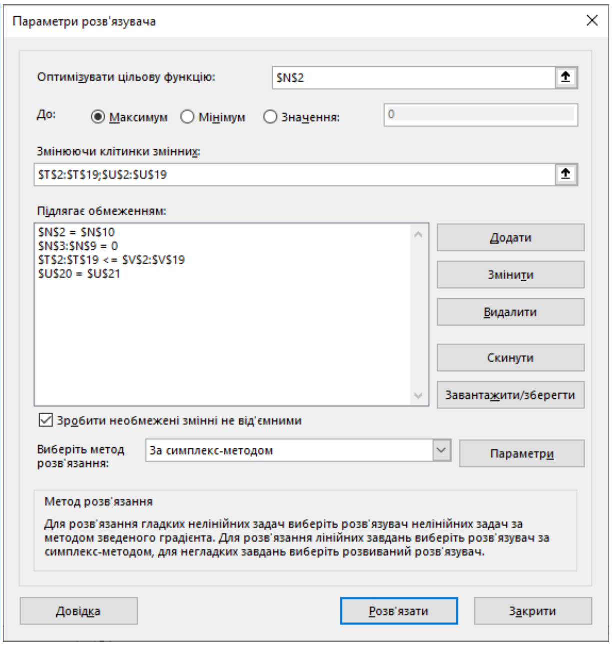



**Рисунок 9.** Таблична оптимізаційна модель

Отримання оптимального розв'язку як варіант майбутнього планово-управлінського рішення передбачає проведення певної аналітичної роботи на кожному кроці, бо це лише модель реальності, як-от заміна знайденого оптимального плану уведенням інших змінних чи їхніх комбінацій додатковими обмеженнями.

### 3.3. Параметричний аналіз чутливості

Це – обчислювальна процедура багатократного розв'язку оптимізаційної задачі з покроковою зміною ресурсу як параметра, наприклад, в діапазоні $R = 0 \div 20$, де чітко проявляються характерні системні властивості структури, як-от вразливість дуг і, відповідно, чутливість цільової функції чи інших виходів від впливу цього параметра.

Оскільки основна зацікавлена особа і замовник оптимізаційного моделювання – ОПР (особа, що приймає рішення, decision maker), її увага прикута до наслідків, бо за ними реалізація підтверджених розрахунками рекомендацій: ЩО треба змінювати, ЯКЩО отримати цей ресурс (бо реально, це «проблема», і не виключено, що реакцією ОПР буде відмова від «гарної» пропозиції, із розумінням погіршення значення ЦФ при інших варіантах). Результат цього аналізу – послідовна зміна конфігурації і значень потоків мережею під впливом зміни значення ресурсу.

| R | $T$2 | $T$3 | $T$4 | $T$5 | $T$6 | $T$7 | $T$8 | $T$9 | $T$10 | $T$11 | $T$12 | $T$13 | $T$14 | $T$15 | $T$16 | $T$17 | $T$18 | $T$19 | $N$2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 2 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 6 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 1 | 5 | 4,3 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1,3 | 3,0 | 0 | 6,3 | 5 | 0 | 6,3 | 5 | 0 | 3 | 8 | 14,3 |
| 2 | 5 | 5,0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 2,0 | 3,0 | 0 | 7,0 | 5 | 0 | 7,0 | 5 | 0 | 3 | 8 | 15,0 |
| 3 | 5 | 5,8 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 2,8 | 3,0 | 0 | 7,8 | 5 | 0 | 7,8 | 5 | 0 | 3 | 8 | 15,8 |
| 4 | 5 | 6,5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 3,5 | 3,0 | 0 | 8,5 | 5 | 0 | 8,5 | 5 | 0 | 3 | 8 | 16,5 |
| 5 | 5 | 7,3 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 4,3 | 3,0 | 0 | 9,3 | 5 | 0 | 9,3 | 5 | 0 | 3 | 8 | 17,3 |
| 6 | 5 | 8,0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5,0 | 3,0 | 0 | 10,0 | 5 | 0 | 10,0 | 5 | 0 | 3 | 8 | 18,0 |
| 7 | 5 | 8,6 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5,6 | 3,0 | 0 | 10,6 | 5 | 0 | 10,6 | 5 | 0 | 3 | 8 | 18,6 |
| 8 | 5 | 9,3 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 6,3 | 3,0 | 0 | 11,3 | 5 | 0 | 11,3 | 5 | 0 | 3 | 8 | 19,3 |
| 9 | 5 | 9,9 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 6,9 | 3,0 | 0 | 11,9 | 5 | 0 | 11,9 | 5 | 0 | 3 | 8 | 19,9 |
| 10 | 5 | 10,5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 7,5 | 3,0 | 0 | 12,5 | 5 | 0 | 12,5 | 5 | 0 | 3 | 8 | 20,5 |
| 11 | 5 | 11,2 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 8,0 | 3,2 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 3 | 8,2 | 21,2 |
| 12 | 5 | 11,8 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 8,0 | 3,8 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 4 | 8,8 | 21,8 |
| 13 | 5 | 12,4 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 8,0 | 4,4 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 4 | 9,4 | 22,4 |
| 14 | 5 | 13,1 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 8,0 | 5,1 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 5 | 10,1 | 23,1 |
| 15 | 5 | 13,7 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 8,0 | 5,7 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 6 | 10,7 | 23,7 |
| 16 | 5 | 14,3 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 8,0 | 6,3 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 6 | 11,3 | 24,3 |
| 17 | 5 | 14,9 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 8,0 | 6,9 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 7 | 11,9 | 24,9 |
| 18 | 5 | 15,6 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 8,0 | 7,0 | 0,6 | 13,0 | 5 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 8 | 12,6 | 25,6 |
| 19 | 5 | 16,2 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 8,0 | 7,0 | 1,2 | 13,0 | 5 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 8 | 13,2 | 26,2 |
| 20 | 5 | 16,8 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 8,0 | 7,0 | 1,8 | 13,0 | 5 | 0 | 13,0 | 5 | 0 | 9 | 13,8 | 26,8 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | s | s | s | a | a | a | b | b | b | b | c | c | c | d | e | e | f | g |  |
|  | a | b | c | c | d | b | a | c | f | f | d | e | f | t | g | f | g | t |  |

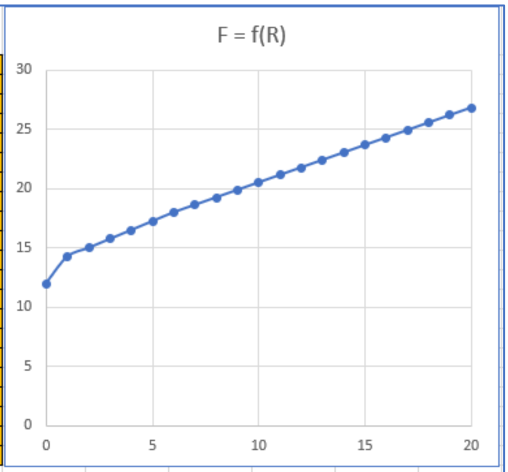



**Рисунок 10.** Аналітична платформа: сценарій, каскадний процес, показник (ЦФ)

Ця таблиця – підхід до кількісного оцінювання стійкості / вразливості / реакції на впливи складових структури, конкретна відповідь на запитання: «Куди і скільки наявних інвестицій направити для їх найкращого використання?».

Системна властивість моделі – зв'язність мережевої структури і баланс потоків в усіх вузлах: $f(s) = f(t) = v$, $f_{вих}(i) = f_{вх}(i)$ – призводить до впливу «точкової» зміни параметра певної дуги на всі інші дуги; їх реакція різна: потік дугою змінюється (слабо, сильно) / не змінюється, і знати це важливо.

Наведена діаграма (рис. 10) – своєрідна аналітична платформа, побудована за аналізом «What-if», яка надає кількісний прогноз організаційного процесу, де:

- по рядках – $r$-сцени загального сценарію з поточними значеннями 18 змінних (як «діючих осіб»), R = 1 ÷ 20;
- послідовність сцен – каскадний процес із відповідними «хвилями» змін;
- крайній справа стовпець зі значеннями ЦФ містить кількісні оцінки функціональності структури (у певному вимірі, наприклад в м$^3$), а кожна клітинка – поточне значення шуканого потоку, які формують результат.

Оскільки розв'язок задачі оптимізації – основа управлінського рішення, що приймають відповідальні особи, увагу слід приділити потокам, які змінюються і не змінюються, й на відповідні їм дуги, як певні об'єкти структури (з їхніми керівниками і виконавцями).

На особливу увагу дослідника заслуговують дуги, на значення потоків яких сильно впливають (і надалі будуть впливати) допоміжні ресурси (рис. 11), із утворенням домінуючих ланцюгів (на ланцюг 33 → 34 → 44 припадає до 80 % сумарних потоків $s \to t$):

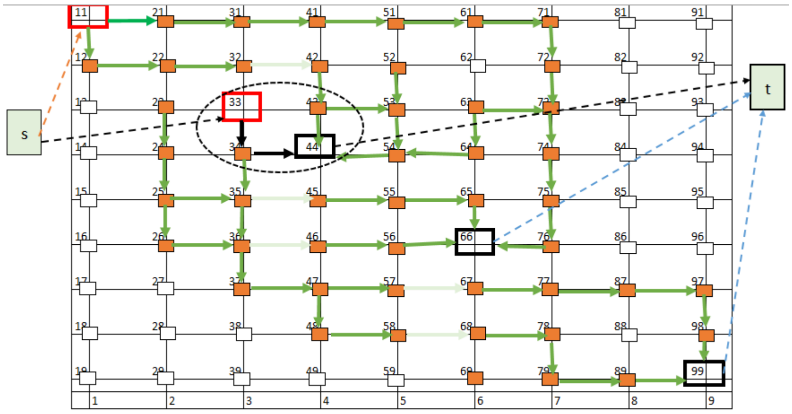



**Рисунок 11.** Джерела $s$ ={11, 33}, стоки $t$ = {44, 66, 99}

Модель гнучка, для її адаптації до реального стану ситуації завжди є можливість скорегувати план уведенням відповідних обмежень на шукані значення змінних рішень $f(x_i, x_j)$. За наведеною методикою можна побудувати декілька таких діаграм, щоб зрозуміти тенденції, зробити прогноз і висновки загального характеру для різних діапазонів значення пропозиції (R).

### 3.4. Деградація мережевої структури із розподілу потоків

Для цієї задачі застосовуємо запропоновану методику заміною правої частини обмеження $f(x_i, x_j) \le c(x_i, x_j) + \phi(r_k)$ на $f(x_i, x_j) \le c(x_i, x_j) - \phi(r_k)$ із реалізацією параметричного аналізу чутливості циклічною зміною значення поточного ресурсу ($R$) у певному діапазоні.

Видно (рис. 12), що досліджувана мережева структура на кожному кроці повторного розв'язання задачі оптимізації якомога зберігала максимальний потік величиною 12 од., утворюючи характерну зону при $R$= 0 ÷18 використанням резервів вагових коефіцієнтів, а вже при $R \ge 52$ послідовно змінюється конфігурація розподілу потоків за рахунок часткового аж до повного перекриття дуг; саме ця поведінка характеризує поступове зниження стійкості, починаючи із часткової функціональності аж до повного припинення функціонування під впливом атак.

| R | $T$2 | $T$3 | $T$4 | $T$5 | $T$6 | $T$7 | $T$8 | $T$9 | $T$10 | $T$11 | $T$12 | $T$13 | $T$14 | $T$15 | $T$16 | $T$17 | $T$18 | $T$19 | $N$2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6 | 1 | 5 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 2 | 6 | 1 | 5 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 4 | 6 | 1 | 5 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 6 | 6 | 1 | 5 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 8 | 6 | 1 | 5 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 10 | 6 | 1 | 5 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 12 | 6 | 1 | 5 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 14 | 6 | 1 | 5 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 16 | 6 | 1 | 5 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 18 | 6 | 1 | 5 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 20 | 5,6 | 1,4 | 5 | 1 | 5 | 0 | 0,4 | 0,0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 22 | 6,0 | 1,0 | 5 | 1 | 5 | 0 | 0,0 | 0,0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 24 | 1,6 | 5,4 | 5 | 0 | 5 | 0 | 3,4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 26 | 0 | 7,0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5,0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 28 | 0 | 7,0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5,0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 30 | 0 | 7,0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5,0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 32 | 0 | 7,0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5,0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 34 | 0 | 7,0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5,0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 36 | 0 | 7,0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 38 | 0 | 7,0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 40 | 0 | 7,0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 42 | 6 | 1,0 | 5 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 44 | 5 | 2,0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 46 | 5 | 2,0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 48 | 5 | 2,0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 50 | 5 | 2,0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 52 | 5 | 2,0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 | 12,0 |
| 54 | 5 | 1,9 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0,9 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 0,9 | 5,9 | 11,9 |
| 56 | 5 | 1,5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0,5 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 0,5 | 5,5 | 11,5 |
| 58 | 5 | 1,1 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0,1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 6 | 5 | 0 | 0,1 | 5,1 | 11,1 |
| 60 | 5 | 0,5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0,5 | 0,0 | 0 | 1 | 4,5 | 0 | 6 | 4,5 | 0 | 0,0 | 4,5 | 10,5 |
| 62 | 5 | 0 | 4,7 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3,7 | 0 | 6 | 3,7 | 0 | 0,0 | 3,7 | 9,7 |
| 64 | 5 | 0 | 3,9 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2,9 | 0 | 6 | 2,9 | 0 | 0,0 | 2,9 | 8,9 |
| 66 | 5 | 0 | 3,0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2,0 | 0 | 6 | 2,0 | 0 | 0,0 | 2,0 | 8,0 |
| 68 | 5 | 0 | 2,1 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1,1 | 0 | 6 | 1,1 | 0 | 0,0 | 1,1 | 7,1 |
| 70 | 5 | 0 | 1,2 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0,2 | 0 | 6 | 0,2 | 0 | 0,0 | 0,2 | 6,2 |
| 72 | 5 | 0 | 0,2 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,2 | 0,0 | 0 | 5,2 | 0,0 | 0 | 0,0 | 0,0 | 5,2 |
| 74 | 4,0 | 0 | 0,0 | 0 | 4,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,0 | 0,0 | 0 | 4,0 | 0,0 | 0 | 0,0 | 0,0 | 4,0 |
| 76 | 2,9 | 0 | 0,0 | 0 | 2,9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,0 | 0,0 | 0 | 2,9 | 0,0 | 0 | 0,0 | 0,0 | 2,9 |
| 78 | 1,7 | 0 | 0,0 | 0 | 1,7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,0 | 0,0 | 0 | 1,7 | 0,0 | 0 | 0,0 | 0,0 | 1,7 |
| 80 | 0,6 | 0 | 0,0 | 0 | 0,6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,0 | 0,0 | 0 | 0,6 | 0,0 | 0 | 0,0 | 0,0 | 0,6 |
| | s | s | s | a | a | a | b | b | b | b | c | c | c | d | e | e | f | g | |
| | a | b | c | c | d | b | a | c | f | f | d | e | f | t | g | f | g | t | |

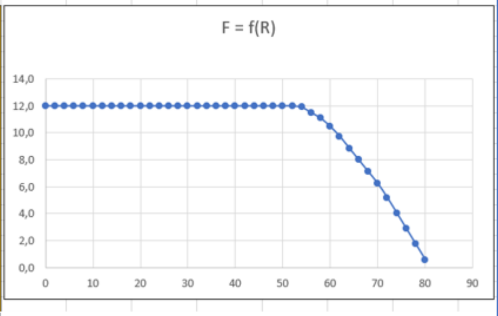



**Рисунок 12.** Аналітична платформа

### 3.5. Оперативна ліквідація мережевої структури із розподілу потоків

У практичних застосуваннях типова ситуація на кордонах / фронті: через недостатню кількість захисних / оборонних ресурсів для повного контролю існують неконтрольовані зони для контрабанди / нападу, в моделі сукупність таких зон є неповним перетином.

В моделі max-min мінімальний перетин – результат двоїстої задачі, внаслідок дефіциту ресурсу для повного перекриття / контролю в запропонованій моделі перекриття здійснюється поступово послідовною додачею атакуючого ресурсу (із зупинкою у бажаний момент, коли в певних ситуаціях не прагнуть до повного перекриття, залишаючи певний витік для побічних цілей).

**Задача оптимізації**

Входи: $C = \{c_{ij}\}$, $r = \{r_{ij}\}$; $R$ = const

Виходи: $A = \{a_i\}$, $B = \{b_{ij}\}$; $D = \{d_{ij}\}$, $F = \{f_{ij}\}$, $i, j \in N$

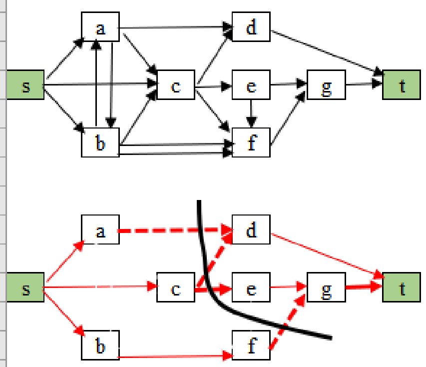
$$ЦФ \quad \sum_{(i,j \in A)} c_{ij} f_{ij} \to \min$$

за обмежень

$$\sum r_{ij} d_{ij} \le R$$

$$a_i - a_j + b_{ij} + d_{ij} \ge 0$$

$$a_t - a_s \ge 1 \qquad a_i, b_{ij}, d_{ij} \ge 0.$$




| Вузол | A |
|---|---|
| s | 0 |
| a | 0 |
| b | 0 |
| c | 0 |
| d | 1 |
| e | 1 |
| f | 0 |
| g | 1 |
| t | 1 |
| 1 | 1 |

| | Поч | Кін | Вага | Рес | Перетин | ЛЧ | D | Кільк | Зв. перетн |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | s | a | 17 | 4 | 0 | 0,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| 2 | s | b | 18 | 3 | 0 | 0,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| 3 | s | c | 15 | 3 | 0 | 0,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| 4 | a | c | 5 | 2 | 0 | 0,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| 5 | a | d | 10 | 6 | 1 | 0,0 | 0,00 | 0 | 10,0 |
| 6 | a | b | 1 | 7 | 0 | 0,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| 7 | b | a | 8 | 7 | 0 | 0,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| 8 | b | c | 8 | 3 | 0 | 0,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| 9 | b | f | 7 | 5 | 0 | 0,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| 10 | b | f | 3 | 1 | 0 | 0,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| 11 | c | d | 6 | 2 | 1 | 0,0 | 0,00 | 0 | 6,0 |
| 12 | c | e | 5 | 8 | 1 | 0,0 | 0,00 | 0 | 5,0 |
| 13 | c | f | 6 | 7 | 0 | 0,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| 14 | d | t | 20 | 3 | 0 | 0,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| 15 | e | g | 9 | 5 | 0 | 0,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| 16 | e | f | 4 | 3 | 0 | 1,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| 17 | f | g | 3 | 5 | 1 | 0,0 | 0,00 | 0 | 3,0 |
| 18 | g | t | 16 | **5** | 0 | 0,0 | 0,00 | 0 | 0,0 |
| | | | | | | | | **0,0** | 24,0 |
| | | | | | | | R= | 0 | ЦФ |

**Рисунок 13.** Таблична модель, результат: максимальні потоки і мінімальний перетин

При пропозиції ресурсу $R$ = 0 базова ситуація: мінімальний перетин (чорна лінія) утворюють 4 дуги: $\{(a, d), (c, d), (c, e), (f, g)\}$, максимальний потік мережею й розмір перетину дорівнює $v$ = 24 од. У цій моделі (на мінімум ЦФ) витік зменшують аж до ліквідації послідовним звуженням дуг у складі поточного перетину аж до їх перекриття шляхом зменшення ваг цих дуг атакуючим ресурсом (норми питомого ресурсу $r_{ij}$ задані, стовпець Рес), аналіз чутливості:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | R | $X$2 | $X$3 | $X$4 | $X$5 | $X$6 | $X$7 | $X$8 | $X$9 | $X$10 | $X$11 | $X$12 | $X$13 | $X$14 | $X$15 | $X$16 | $X$17 | $X$18 | $X$19 | $X$20 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 24,0 |
| 6 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8,3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 21,3 |
| 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6,7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 18,7 |
| 8 | 1,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 16,0 |
| 9 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3,3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 13,3 |
| 10 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 10,7 |
| 11 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 8,0 |
| 12 | 3,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,7 | 0 | 7,2 |
| 13 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,4 | 0 | 6,4 |
| 14 | 4,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,1 | 0 | 5,6 |
| 15 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,8 | 0 | 4,8 |
| 16 | 5,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 4,0 |
| 17 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,2 | 0 | 3,2 |
| 18 | 6,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,9 | 0 | 2,4 |
| 19 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,6 | 0 | 1,6 |
| 20 | 7,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,3 | 0 | 0,8 |
| 21 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,0 | 0 | 0,0 |
| 22 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | | s | s | s | a | a | a | b | b | b | b | c | c | c | d | e | e | f | g | |
| 24 | | a | b | c | c | d | b | a | c | f | f | d | e | f | t | g | f | g | t | |

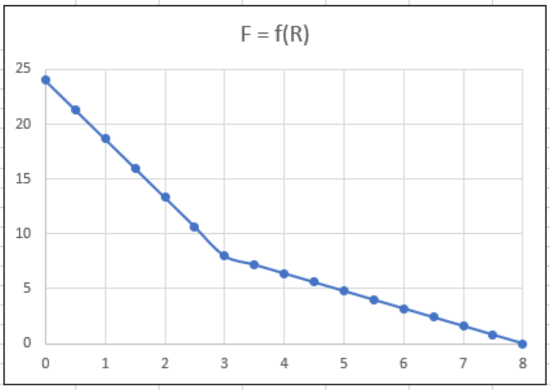



**Рисунок 14.** Аналітична платформа

До рівня $R$ = 2,5 перетин складається з 4-х дуг, далі – дві закриті дуги, дві залишаються аж до припинення функціонування і ліквідації структури; для практики ця таблиця, фактично, програма дій щодо змін пропозицій і відповідного розподілу ресурсу. За критерієм min-max спершу перекриваються дуги з високими вагами для пришвидшення процедури ($R \leq 3$).

## 4. Висновки

Розроблена аналітична платформа у складі проблемно-сценарного аналізу, здійснення каскадного процесу та виконання оптимізаційного моделювання з використанням надбудов Excel Solver та Solver Table для кількісного оцінювання функціональної ефективності / стійкості мережевої структури. За її допомогою можна отримати відповідь про поведінку такої структури під впливами ззовні, різних властивостей і цілей. Цей підхід дозволяє побудувати кількісний прогноз результатів оптимізації на різних рівнях ресурсного забезпечення, побудований на табличному представленні вихідних даних та їх візуалізації, сформувати управлінське рішення щодо роботи з об'єктом у надзвичайних ситуаціях.

## Посилання


1. Dantzig G. B. Application of the Simplex method to a Transportation problem. Activity Analysis of Production and Allocation, 1951. P. 359—373.
2. Camm J. D., Cochran J. J., Fry M. J., Ohlmann J. W., Anderson D. R., Sweeney D. J., Williams T. A. An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making. 16 ed. Cengage, 2019. 794 p.
3. Camm J. D., Cochran J. J., Fry M. J., Ohlmann J. W. Business Analytics: Descriptive Predictive Prescriptive. 5 ed. Cengage, 2024. 1009 p.
4. Ragsdale C. Spreadsheet Modeling and Decision Analysis. A Practical Introduction to Business Analytics. 9 ed. Cengage, 2022. 884 p.
5. Balakrishnan N. Render B., Stair R., Munson Ch. Managerial Decision Modeling. Business Analytics with Spreadsheets. 4 ed. Degruyter, 2017. 804 p.
6. Кузьмичов А.І. Оптимізаційні методи і моделі. Практикум в Excel. Київ: ВПЦ АМУ, 2013. 438 с.
7. Додонов О.Г., Кузьмичов А.І. Мережеві організаційні структури управління. Моделювання та візуалізація засобами Excel. Київ: Вид-во Ліра-К, 2021. 297 с.
8. Borne P., Popescu D., Filip F. G., Stefanoiu D. Optimization in Engineering Sciences. Exact Methods. Wiley, 2013. 312 p.
9. Кузьмичов А.І., Чернецька Ю.В., Шестаков В.А. Пошук і аналіз чутливості часових оптимальних планів постачання енергетичних ресурсів із застосуванням надбудови SolverTable. *Реєстрація, зберігання і обробка даних*. 2022. Т. 24. № 2. С. 62—71 https://doi.org/10.35681/1560-9189.2022.24.2.275103
10. Додонов О.Г., Кузьмичов А.І., Чернецька Ю.В. Модель кількісного оцінювання стійкості системи (розподілу енергетичних ресурсів). Живучість та резильєнтність критичної інфраструктури – 2023: зб. матеріалів міжн. наук.-практ. конф. (19 жовт. 2023, м. Київ). ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України, 2023. С. 16—17. URL: https://ipme.kiev.ua/wp-content/uploads/2023/11/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D1%80i%D0%B0%D0%BB%D0%B8_%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86i%D1%97_Survivability_and_Resilience-2023-4.pdf (дата звернення: 12.03.2024).

11. Bostan I., Gheorghe A., Dulgheru V., Sobor I. Resilient Energy Systems. Renewables: Wind, Solar, Hydro. Springer, 2013. 507 p. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4189-8
12. Acha S. Modelling Distributed Energy Resources in Energy Service Networks. IET, 2013. 207 p. https://doi.org/10.1049/PBRN016E
13. Skipka K., Theodore L. Energy Resources. Availability, Management, and Environmental Impacts. CRC Press, 2014. 460 p.

**References**

1. Dantzig, G. B. (1951). Application of the Simplex method to a Transportation problem. Activity Analysis of Production and Allocation (pp. 359–373).
2. Camm, J. D., Cochran, J. J., Fry, M. J., Ohlmann, J. W., Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams, T. A. (2019). An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making. 16 ed. Cengage (794 p.).
3. Camm, J. D., Cochran, J. J., Fry, M. J., & Ohlmann, J. W. (2024). Business Analytics: Descriptive Predictive Prescriptive. 5 ed. Cengage (1009 p.).
4. Ragsdale, C. (2022). Spreadsheet Modeling and Decision Analysis. A Practical Introduction to Business Analytics. 9 ed. Cengage (884 p.).
5. Balakrishnan, N., Render, B., Stair, R., & Munson, Ch. (2017). Managerial Decision Modeling. Business Analytics with Spreadsheets. 4 ed. Degruyter (804 p.).
6. Kuzmychov, A.I. (2013). Optymizatsiyni metody i modeli. Praktykum v Excel. Kyiv: VPTS AMU (438 p.). [in Ukrainian].
7. Dodonov, O.G., & Kuzmychov, A.I. (2021). Merezhevi orhanizatsiyni struktury upravlinnya. Modelyuvannya ta vizualizatsiya za dopomohoyu Excel. Kyiv: Vyd-vo Lira-K (297 p.). [in Ukrainian].
8. Borne, P., Popescu, D., Filip, F. G., & Stefanoiu, D. (2013). Optimization in Engineering Sciences. Exact Methods. Wiley (312 p.).
9. Kuzmychov, A.I., Chernetska, Yu.V., & Shestakov, V.A. (2022). A search and sensitivity analysis of time optimal plans of energy resources supply using SolverTable add-in. *Data Recording, Storage & Processing*, *24*(2), 62–71 [in Ukrainian]. https://doi.org/10.35681/1560-9189.2022.24.2.275103
10. Dodonov, O.G., Kuzmychov, A.I., & Chernetska, Yu.V. (2023, October 19). Model kilkisnoho otsinyuvannya stiykosti systemy (rozpodilu enerhetychnykh resursiv). Zhyvuchist′hyvurezystentnist′ekrytychnoyi infrastruktury – 2023: zb. materialiv mizhn. nauk.-prakt. konf. (pp. 16–17). Kyiv, G.E. Pukhov Institute for Modelling in Energy Engineering of NAS of Ukraine, URL: https://ipme.kiev.ua/wp-content/uploads/2023/11/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D1%80i%D0%B0%D0%BB%D0%B8_%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86i%D1%97_Survivability_and_Resilience-2023-4.pdf (Last accessed: 12.03.2024) [in Ukrainian].
11. Bostan, I., Gheorghe, A., Dulgheru, V., & Sobor, I. (2013). Resilient Energy Systems. Renewables: Wind, Solar, Hydro. Springer (507 p.). https://doi.org/10.1007/978-94-007-4189-8
12. Acha, S. (2013). Modelling Distributed Energy Resources in Energy Service Networks. IET (207 p.). https://doi.org/10.1049/PBRN016E
13. Skipka, K., & Theodore, L. (2014). Energy Resources. Availability, Management, and Environmental Impacts. CRC Press (460 p.).

# QUANTITATIVE ASSESSMENT OF THE NETWORK STRUCTURES FUNCTIONAL EFFICIENCY BY ANALYZING OF SENSITIVITY OPTIMIZATION MODEL TO EXTERNAL INFLUENCES

**Anatolii Kuzmychov**, PhD (Engin.), Associate Professor, https://orcid.org/0009-0007-3792-576X
Institute of Information Registration Problems of NAS of Ukraine, 2, M. Shpaka St., Kyiv, 03113, Ukraine
e-mail: akuzmychov@gmail.com

**Abstract.** *The real network organizational structure is constantly under the influence of external influences, which can cause unexpected consequences due to the cascading spread of relevant disturbances directed at critically important parameters. Parametric sensitivity analysis is the latest computational procedure, the results of which provide the researcher with an idea and quantitative assessment of the*

*appropriate response of the structure in the form of an analytical platform as a composition and interaction of scenario analysis, cascade process development and optimization modeling technology. The main task is timely adaptation to expected changes in business analytics, oriented to optimal resources distribution. The generalized minimum cost problem is a typical example of widespread problems of optimal distribution and use of limited, in particular, energy resources, of any nature and purpose, using the scientific management and analysis of decisions, in its network model attention is paid to the potentials of nodes. The maximum flow problem is an example of the active and effective application of methods and models of flows optimization, where the processes and objects used a network organization, the energy systems and complexes investigated, where arc parameters are critical in its model. In the article, for these classic optimization problems, mathematical and spreadsheet models were built on concrete examples. Direct and dual mathematical programming problems were solved, the following stages were carried out - the organization of a computer experiment and the construction of an analytical platform for evaluating the behavior of the network structure under the influence of external influences and disturbances as their consequences. To take into account the specific conditions of real objects with a network structure at the stage of modification, the model supplemented with appropriate restrictions and correction of input data sets. The obtained results should be useful for planning and management personnel and top-management for discussion and decision-making regarding, for example, the optimal placement of energy equipment, the weighted distribution of energy flows in the "source-sink" system or the appointment of executors for work, automated project management using project networks, etc.*
**Keywords:** optimization modeling, maximum network flow, minimum cost flows, network organizational structures, Decision Making, Spreadsheet Modeling and Analytics.

*Надійшла до редколегії:* 04.03.2024