

УДК 537.32, 53084.866, 542.455

Снарский А.А.<sup>1,2</sup>, Безсуднов И.В.<sup>3,4</sup>



Снарский А.А.

<sup>1</sup>Кафедра общей и теоретической физики,  
Национальный технический университет «КПИ»,  
Киев, Украина

<sup>2</sup>Институт проблем регистрации информации НАН  
Украины, Киев, Украина

<sup>3</sup>ЗАО «Наука-сервис», Москва, Россия

<sup>4</sup>Санкт-Петербургский национальный  
исследовательский университет, Санкт-Петербург, Россия



Безсуднов И.В.

### ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ УСТРОЙСТВО В ПЕРИОДИЧЕСКОМ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

---

*Предложено поворотное термоэлектрическое (ТЭ) устройство, состоящее из одного ТЭ проводника, работающего в двух периодических установившихся режимах: периодическом режиме переключения (Р-режиме), когда температуры горячего и холодного концов ТЭ проводника периодически мгновенно изменяются на противоположную, и непрерывном синусоидальном режиме (S-режиме), когда температуры граней ТЭ проводника постоянно изменяются по синусоиде. Режимы генерирования мощности и охлаждения поворотного ТЭ устройства в периодическом установившемся режиме были изучены аналитически. Установлено, что КПД и температура охлаждения поворотного ТЭ устройства зависят не только от безразмерной ТЭ добротности, но и от дополнительного безразмерного параметра, содержащего период обращения, размеры и температуропроводность ТЭ проводника. Предложенный аналитический метод может быть обобщен даже на более сложные режимы синхронизации и позволяет решить проблему оптимизации параметров ТЭ устройства. Мы исследовали возможность достижения улучшенных характеристик для поворотного ТЭ устройства по сравнению с традиционным стационарным режимом и показали, что S-режим дает более глубокое охлаждение в определенные моменты времени.*

**Ключевые слова:** термоэлектрическое устройство, периодический установившийся режим, добротность, генерирование мощности, охлаждение

*We propose a rotating thermoelectric (TE) device comprised of a single TE conductor operating in two periodic steady state modes: switching periodic mode (P-mode) when the hot and cold ends of the TE conductor are periodically instantly reversed and continuous sinusoidal mode (S-mode) when the temperature of TE conductor edges varies continuously according to sine wave. Power generation and cooling regimes of the rotating (TE) device in the periodic steady state were studied analytically. The efficiency and cooling temperature of the rotating TE device was found to depend not only on a dimensionless TE figure of merit, but also upon an additional dimensionless parameter comprising of the rotation period, the size and the thermal diffusivity of the TE conductor. The proposed analytical method can be generalized to even more complex timing modes and allows solving the optimization problem for TE device parameters. We investigated whether it is possible to achieve better performance for the rotating TE device comparing to conventional stationary steady state, S-mode was shown to demonstrate deeper cooling at certain times.*

**Keywords:** thermoelectric device, periodic steady state, figure of merit, power generation, cooling

## **Введение**

Главный способ улучшения КПД термоэлектрических (ТЭ) устройств – генераторов мощности, охладителей и т.д. состоит в увеличении безразмерной добротности ТЭ материалов –  $ZT = \alpha^2 \sigma T / \kappa$ , где  $\alpha$  – термоЭДС, или коэффициент Зеебека,  $\sigma$  – удельная электропроводность,  $T$  – абсолютная температура,  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности.

В отличие от сверхпроводимости, где были синтезированы новые материалы с высокими температурами перехода в сверхпроводящее состояние, успехи в улучшении  $ZT$  ТЭ материалов довольно неутешительны. Так, например, при комнатной температуре ( $T = 300^\circ K$ ) с 1950 года до настоящего времени добротность  $ZT \sim 1$  возросла лишь до  $ZT \sim 1.2 \div 1.3$  [1-5]. Более того, промышленных ТЭ материалов с  $ZT \sim 1.3$  сегодня не существует. Действительно, для обычных применений, например, для бытового или промышленного охлаждения, требуются ТЭ материалы с добротностью  $ZT \geq 2.0$  [6-8]. Возлагались надежды на прогресс с помощью туннельных эффектов и других квантовых эффектов в наноструктурных ТЭ материалах [5, 9-13]. Однако значительные успехи пока не достигнуты.

Параметры ТЭ устройства в установившемся режиме зависят только от добротности  $ZT$  [14]. Чем выше  $ZT$ , тем ниже достигаемая температура охлаждения.

В переходных режимах на КПД ТЭ устройства влияют многие другие параметры, такие как теплопроводность, длительность импульса тока в импульсном режиме [6, 15-20], время релаксации тепловых процессов и т.д. Такие переходные режимы постоянно привлекают внимание исследователей [5, 15-29], так как имеют преимущество перед установившимся. Например, в определенные моменты времени можно достичь более глубокого охлаждения в импульсном режиме охлаждения [15-20]. Оптимизация параметров переходного режима позволяет улучшить работу ТЭ устройства по сравнению с установившимся режимом даже при использовании одинаковых ТЭ материалов.

В качественном отношении характеристики ТЭ устройств в переходном режиме можно улучшить благодаря тому, что время релаксации электрических процессов по сравнению со временем релаксации тепловых процессов незначительно [14]. При прохождении тока через ТЭ устройство в режиме охлаждения в установившемся режиме, тепло Пельтье, отводимое от холодного спая, и тепло Джоуля, генерируемое в ТЭ проводнике, сбалансированы. Повышенный ток и, следовательно, увеличенное тепло Джоуля, вывели бы ТЭ устройство из строя. В переходном режиме, за счет разности времен релаксации, тепловой баланс является некомпенсированным. Более высокий ток, пропускаемый через ТЭ устройство в течение короткого времени, создает дополнительное охлаждение. Оптимизация длины и формы импульсов тока может дать более глубокое охлаждение на ограниченные интервалы времени [18] или охлаждение небольших объектов за более короткий срок [19].

Импульсное охлаждение [21-24] состоит из двух основных фаз. Первая фаза, переходная, реализует быстрое и глубокое охлаждение, вторая фаза – релаксация, в течение которой, как правило, ТЭ устройство не используется. Таким образом, если в импульсном режиме время второй фазы равно или больше времени релаксации тепловых процессов (т.е. того времени, за которое успевает установиться тепловое равновесие), то в рассматриваемом нами режиме характерные времена (период изменения граничных условий в генераторном режиме, или тока в холодильном), вообще говоря, меньше времени релаксации тепловых процессов.

Данная статья посвящена ТЭ устройствам, работающим в периодическом установившемся режиме. В отличие от импульсного охлаждения, ТЭ устройство в

периодическом установившемся режиме работает непрерывно. Основной вопрос, рассматриваемый здесь: можно ли в данном периодическом установившемся режиме достичь улучшения характеристик по сравнению с установившимся режимом, по крайней мере, в определенные моменты времени. В данном исследовании мы опускаем технические детали, такие как контактное сопротивление пластин, поперечный теплоперенос, параметры охлаждаемого объекта и т.д.

Предлагаемые ТЭ устройства состоят из одного ТЭ проводника с постоянным поперечным сечением, изготовленного из ТЭ материала, а роль второго проводника выполняет корпус ТЭ устройства, который является обычным металлическим проводником.

Нами рассмотрены два типа периодических установившихся режимов для предлагаемых ТЭ устройств: периодический режим переключения (*P*-режим), когда температуры горячего и холодного концов ТЭ проводника периодически мгновенно изменяются на противоположную, и непрерывный синусоидальный режим (*S*-режим), когда температуры граней ТЭ проводника непрерывно изменяются по синусоидальному закону.

Для периодических установившихся режимов наряду с *ZT* мы установили новый безразмерный параметр, объединяющий в себе период изменения температуры, размеры ТЭ проводника и его температуропроводность. Было рассчитано оптимальное значение вышеуказанного параметра.

В следующем разделе схематически представлены ТЭ устройства в *P*- и *S*-режимах. Дальнейшие разделы содержат аналитические расчеты и результаты для *P*-режима генерирования мощности и охлаждения, и для *S*-режима охлаждения. Последний раздел – это обсуждение и выводы.

## 1. Модель ТЭ устройства в периодическом установившемся режиме

ТЭ устройство, работающее в периодическом режиме переключения (*P*-режим) схематически представлено на рис. 1 а. ТЭ проводник периодически вращается в плоскости рисунка, и его горячий и холодный концы (спаи) мгновенно меняются местами.

ТЭ устройство, работающее в непрерывном синусоидальном режиме (*S*-режим) схематически представлено на рис. 1 б. Допустим, ТЭ проводник вращается в отверстии диафрагмы с линейным распределением температуры сверху вниз (см. рис. 1 б.), соответственно, на концах (спаях) поворотного ТЭ проводника (см. рис. 1 б.) температура непрерывно изменяется по синусоиде.

ТЭ устройство (рис. 1 а, б) состоит из одного ТЭ проводника с постоянным поперечным сечением *S* длиной  $l = 2a$ . Другие детали ТЭ устройства не имеют ТЭ свойств. Период вращения *P* является фиксированным.

Выполняя дальнейшие аналитические расчеты для *P*- и *S*-режимов, мы полагаем для удобства, что ТЭ проводник является фиксированным в плоскости, но температура на его концах (спаях) изменяется по периодическому закону, особому для каждого режима.

Уравнение теплопроводности для ТЭ проводника в ТЭ устройствах имеет стандартный вид [14]

$$c_v \rho_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \rho j^2, \quad (1)$$

где *t* – время, *x* – координата вдоль ТЭ проводника,  $T(x, t)$  – температура ТЭ проводника,

$j(t)$  – плотность тока в ТЭ проводнике,  $\rho = 1/\sigma$  – удельное сопротивление,  $\kappa$  – удельная теплопроводность,  $c_v$  – удельная теплоемкость,  $\rho_0$  – объемная плотность,  $\chi = \kappa/c_v\rho_0$  – температуропроводность.

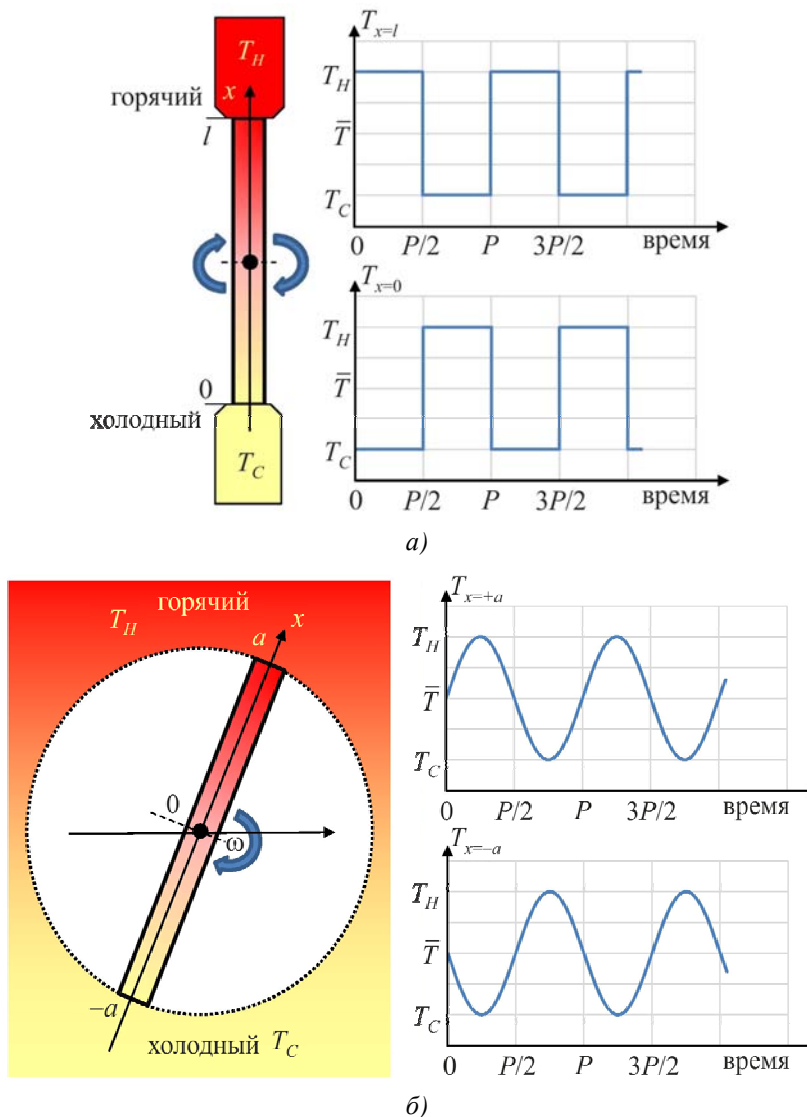


Рис. 1. Схема предлагаемых ТЭ устройств, работающих в а) периодическом режиме переключения ( $P$ -режим) и б) непрерывном синусоидальном режиме ( $S$ -режим). (Цвет в режиме онлайн)

Граничные условия для  $P$ -режима (рис. 1 а) следующие

$$\begin{aligned} T(x,t)|_{x=0} &= \bar{T} - T_0\theta(t), \\ T(x,t)|_{x=l} &= \bar{T} + T_0\theta(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\bar{T}$  – наружная средняя температура,  $T_0$  – амплитуда изменения наружной температуры, функция  $\theta(t)$  установлена на  $-1$  для четных полупериодов, а для нечетных равна  $+1$

$$\theta(t) = \begin{cases} +1, & nP < t < (n+1/2)P, \\ -1, & (n+1/2)P < t < (n+1)P. \end{cases} \quad (3)$$

$S$ -режим (рис 1 б) соответствует случаю, когда температура на концах (спаях) ТЭ

проводника постоянно изменяется по синусоиде, поэтому граничные условия в  $S$ -режиме следующие:

$$T(x, t)|_{x=\pm a} = \bar{T} \pm T_0 \sin(\omega t), \quad (4)$$

где  $\omega = P/2\pi$  – угловая частота изменения температуры,  $\bar{T}$  и  $T_0$  имеют одинаковые значения, как и в  $P$ -режиме.

Таким образом, в течение периода ТЭ проводник в  $P$ - и  $S$ -режимах имеет максимальную температуру на горячем конце (спае)  $T_H = \bar{T} + T_0$  и минимальную на холодном конце (спае)  $T_C = \bar{T} - T_0$ .

Ток, протекающий через ТЭ проводник в режиме охлаждения, установлен на

$$\begin{aligned} j &= j_0 \theta(t), & (P\text{-режим}), \\ j &= j_0 \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right). & (S\text{-режим}). \end{aligned} \quad (5)$$

В режиме генерирования мощности ток ТЭ проводника рассчитывается по закону Зеебека  $j \sim \alpha \Delta T$ , где  $\alpha$  предположительно не зависит от температуры

$$\begin{aligned} j &= \alpha \Delta T, & \Delta T = 2T_0, & (P\text{-режим}), \\ j &= \alpha \Delta T, & \Delta T = 2T_0 \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right), & (S\text{-режим}). \end{aligned} \quad (6)$$

где  $2T_0 = \Delta T$  – максимальная разность температур между горячим и холодным концами (спаями).

Уравнение (1) с граничными условиями (2) или (4) и отношения для тока ТЭ проводника (5) или (6) в периодическом установившемся режиме решаются аналитически в следующих разделах.

## 2. Распределение температуры и тепловые потоки в периодическом режиме переключения ( $P$ -режим)

### 2.1. Распределение температуры в $P$ -режиме

Решение уравнения (1) с граничными условиями (2) для  $P$ -режима рассчитано аналитически с помощью метода, описанного в [30].

Во-первых, представим  $T(x, t)$  в виде

$$T(x, t) = \bar{T} + \frac{\rho j^2}{2\kappa} x(l-x) + \tilde{T}(x, t), \quad (7)$$

тогда (1) дает уравнение для  $\tilde{T}(x, t)$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} \quad (8)$$

и граничные условия (2) становятся

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x, t)|_{x=0} &= -T_0 \theta(t), \\ \tilde{T}(x, t)|_{x=l} &= +T_0 \theta(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Затем, согласно [30], представим  $\tilde{T}(x, t)$  в виде ряда

$$\tilde{T}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (10)$$

Подстановка  $\tilde{T}(x, t)$  (10) в уравнение (8), интегрирование по частям дважды и использование граничных условий (9) дает следующее соотношение для  $T_k(t)$ :

$$\frac{dT_k}{dt} + \chi \left( \frac{k\pi}{l} \right) T_k = -\chi \frac{2\pi k}{l^2} T_0 \theta(t) [1 + (-1)^k]. \quad (11)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (11) решается следующим образом [31-33]:

$$T_k(t) = T_0 e^{-A_k t} - \chi \frac{2\pi k}{l^2} [1 + (-1)^k] e^{-A_k t} \int_0^t \theta(t) e^{A_k t} dt, \quad (12)$$

где

$$A_k = \chi \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2. \quad (13)$$

При более длительных сроках, когда достигается периодический установившийся режим, первый переходный член должен исчезнуть.

Пусть  $t = mP + \tau$ , где  $0 < \tau < P/2$  и  $m \gg 1$ , т.е. время  $\tau$  измеряется с начала периода, и в это время левый спай ( $x = 0$ ) холодный, а правый ( $x = l$ ) – горячий (см. рис. 1 а). Тогда, согласно (3), интеграл в (12) делится на три члена, которые представляют сумму нечетных ( $\theta(t) = +1$ ) и четных ( $\theta(t) = -1$ ) полупериодов, а третий член, зависящий от  $\tau$ ,

$$\int_0^t \theta(t) e^{A_k t} dt = \sum_{n=0}^m \int_{nP}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)P} e^{A_k t} dt - \sum_{n=0}^m \int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)P}^{(n+1)P} e^{A_k t} dt + \int_{(m+1)P}^{(m+1)P+\tau} e^{A_k t} dt. \quad (14)$$

Вычисляя интегралы в первом и втором членах (14) и учитывая  $e^{-m A_k} \ll 1$  при  $m \gg 1$ , получим геометрические прогрессии. Суммы прогрессий используем в (12) для получения окончательных формул

$$T_k(\tau) = -T_0 \frac{2}{k\pi} [1 + (-1)^k] + 2T_0 \frac{2}{k\pi} [1 + (-1)^k] \frac{e^{-A_k \tau}}{1 + e^{-A_k \frac{P}{2}}}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (1) и учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{l} x = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right), \quad (16)$$

получим

$$\tilde{T}(x, \tau) = -T_0 \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right) + T_0 \sum_{k=1}^{\infty} N_k e^{-A_k \tau} \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (17)$$

где

$$N_k = \frac{4}{k\pi} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{1 - e^{-A_k \frac{P}{2}}}. \quad (18)$$

В конечном итоге, решение (1) с граничными условиями (3) для  $P$ -режима приобретает вид

$$T(x, \tau) = \bar{T} + \frac{\rho j^2}{2\kappa} x(l-x) - T_0 \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right) + T_0 \sum_{k=1}^{\infty} N_k e^{-A_k \tau} \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (19)$$

где  $\tau$  принадлежит  $[0 \dots P/2]$ .

На рис. 2 показано распределение температуры вдоль ТЭ проводника в  $P$ -режиме в разные моменты времени.

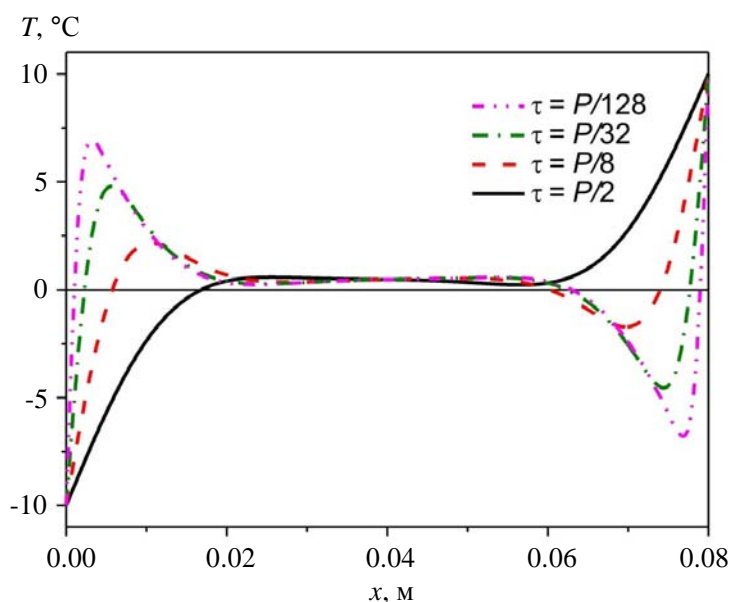


Рис. 2. Распределение температуры ТЭ проводника в  $P$ -режиме в разные моменты, измеренное в начале периода:  $P/128 \dots P/2$ . Наружные температуры:  $\bar{T} = 0^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ , длина ТЭ проводника  $l = 0.08$  м, параметры ТЭ материала  $\kappa = 1.7$  Вт/мК,  $\chi = 1.2 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, плотность тока  $j = 0.1 \times 10^6$  А/м<sup>2</sup> и период вращения  $P = 1$  с (цвет в режиме онлайн).

При  $t = P, 2P, 3P, \dots$  температура граней ТЭ проводника изменяется мгновенно. Затем после этого скачка ТЭ проводник начинает нагреваться, это четко видно из рис. 2, но по-прежнему существует часть ТЭ проводника с температурой  $T(x, \tau) < \bar{T}$ . В результате эта часть уменьшается в размерах, а ее температура возрастает.

Выбранный ТЭ проводник и рабочие параметры демонстрируют случай, когда температура в середине ТЭ проводника стабильна, т.е. тепловые волны глубоко не проникают в ТЭ проводник. Это аналогично вечной мерзлоте, когда периодические изменения температуры на поверхности земли не оказывают воздействия на температуру на определенной глубине.

Следует также отметить, что температура в середине ТЭ проводника несколько выше, чем  $\bar{T}$  вследствие выделяемого джоулева тепла. В отсутствие тока температура в центре ТЭ проводника равняется  $\bar{T}$ .

## 2.2. КПД генерирования мощности в $P$ -режиме

КПД генерирования мощности  $\eta$  ТЭ устройства в  $P$ -режиме зависит от теплового потока, поступающего к горячему спая и выходящего из холодного спая ТЭ проводника (при  $x = 0$  и  $x = l$  соответственно) [14]. Плотность теплового потока  $q_x$  является суммой плотностей потоков, созданных градиентом температур  $\sim \partial T / \partial x$  и тепловым потоком Пельтье  $\Pi j$ , где  $\Pi = \alpha T$  – коэффициент Пельтье (мы полагаем, что термоЭДС, не зависит от температуры):

$$q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} - \alpha T j. \quad (20)$$

Находим тепловой поток на холодном  $\dot{Q}_C$  и горячем  $\dot{Q}_H$  спаях с помощью (19)

$$\dot{Q}_C = q_x S|_{x=0} = -\frac{\rho J^2 l}{2} \frac{1}{S} - \kappa \frac{2T_0}{l} S - \kappa T_0 S \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} N_k e^{-A_k \tau} + \alpha T_c J, \quad (21)$$

$$\dot{Q}_H = q_x S|_{x=l} = -\frac{\rho J^2 l}{2} \frac{1}{S} - \kappa \frac{2T_0}{l} S - \kappa T_0 S \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k\pi}{l} N_k e^{-A_k \tau} + \alpha T_H J. \quad (22)$$

Здесь  $S$  – поперечное сечение ТЭ проводника,  $J$  – поток обусловленный прохождением тока через ТЭ проводник. Его величина определяется ЭДС  $\varepsilon$ , генерированной согласно эффекту Зеебека  $\varepsilon = \alpha(T_H - T_c)$  и соединенным последовательно сопротивлением ТЭ проводника  $r = \rho l / S$  и сопротивлением нагрузки  $R$ :

$$J = \alpha \frac{T_H - T_c}{r + R} = \alpha \frac{2T}{r(1 + \Omega)}, \quad \Omega = \frac{r}{R}. \quad (23)$$

Знаки компонентов тепла Пельтье в (21) и (22) выбраны так, чтобы поток был положительно направлен от горячего к холодному спаю, т.е. тепловой поток, поступающий к горячему спаю ( $x = l$ ) и выходящий из холодного спаю ( $x = 0$ ), считался положительным.

Тепло, выходящее из горячего спаю ( $Q_H$ ) и поступающее к холодному ( $Q_C$ ), изменяется со временем, поэтому для получения КПД ( $\eta$ ) необходимо интегрировать  $Q_H$  и  $Q_C$  по определенному времени. Таким временем для  $P$ -режима является полупериод  $P/2$ :

$$Q_H = \int_0^{P/2} \dot{Q}_H d\tau, \quad Q_C = \int_0^{P/2} \dot{Q}_C d\tau. \quad (24)$$

Подставляя в (24) выражения для (21)  $\dot{Q}_H$  и (22)  $\dot{Q}_C$ , находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P/2} Q_C &= \frac{1}{2} r J^2 + \frac{2T_0}{l} S \kappa_e + \alpha T_c J \\ \frac{1}{P/2} Q_H &= -\frac{1}{2} r J^2 + \frac{2T_0}{l} S \kappa_e + \alpha T_H J \end{aligned} \right\}, \quad (25)$$

где

$$\kappa_e = \kappa \left[ 1 + \frac{4\mu_0^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{(k\pi)^2} \operatorname{th} \left( A_k \frac{P}{4} \right) \right] \quad (26)$$

перенормированная теплопроводность, а

$$\mu_0^2 = J^2 \frac{1}{P\chi}. \quad (27)$$

Из сравнения соотношения (25) и (26) для  $P$ -режима и формулы для установившегося режима [14], понятно, что они отличаются только величиной теплопроводности. КПД  $\eta$  в установившемся режиме зависит только от теплопроводности  $\kappa$ , но в  $P$ -режиме он зависит от перенормированной теплопроводности  $\kappa_e$  (26), которая является комплексным параметром, не только пропорциональным теплопроводности ТЭ проводника  $\kappa$ , но и зависящим от длины ТЭ проводника, периода переключения  $P$  и температуропроводности  $\chi$ .

Следовательно, соответствующее выражение для КПД  $\eta = (Q_H - Q_C) / Q_H$  для  $P$ -режима аналогично стационарному режиму, но использует перенормированную теплопроводность  $\kappa_e$ . Соответствующие расчеты можно найти, например, в [14]. Ниже приводится окончательное выражение



$$\eta = \frac{Z_e \Delta T \Omega}{(1 + \Omega)^2 \left[ 1 + \frac{Z_e T_H}{1 + \Omega} - \frac{1}{2} \frac{Z_e \Delta T}{(1 + \Omega)^2} \right]}, \quad (28)$$

где  $Z_e = \sigma \alpha^2 / \kappa_e$  – перенормированная с помощью (26) безразмерная ТЭ добротность.

Как и в установившемся режиме [14], максимальный КПД  $\eta$  в  $P$ -режиме достигается при оптимальном соотношении  $\Omega_{opt} = R / r = \sqrt{1 + Z_e \bar{T}}$ . Используя  $\Omega_{opt}$  в (28), находим значение максимального КПД  $\eta_{max}$  для  $P$ -режима, которое зависит только от  $T_H, T_C$  и  $Z_e$

$$\eta_{max} = \frac{\Delta T}{T_H} \frac{\sqrt{1 + Z_e \bar{T}} - 1}{\sqrt{1 + Z_e \bar{T}} - \frac{T_C}{T_H}}. \quad (29)$$

Максимальный КПД  $\eta_{max}$  является монотонно возрастающей функцией  $Z_e$ , поэтому более высокое  $Z_e$  и, соответственно, более низкое  $\kappa_e$  дают улучшенное значение  $\eta_{max}$ .

Перенормированная теплопроводность  $\kappa_e$  в  $P$ -режиме (26) всегда выше, чем  $\kappa$  ( $\kappa_e > \kappa$ ), поэтому КПД в  $P$ -режиме (28) всегда ниже, чем КПД в установившемся режиме. В случае, когда  $\chi P \pi^2 / 4l > 3$  гиперболический тангенс в (26) почти равен единице, и с учетом  $\sum_{k=1}^{\infty} \left[ (1 + (-1)^k) / (k\pi)^2 \right] = 1/12$  получаем аппроксимированное выражение для перенормированной теплопроводности

$$\kappa_e \approx \kappa \left( 1 + \frac{1}{3} \mu_0^2 \right). \quad (30)$$

Чтобы КПД ТЭ устройства в  $P$ -режиме был как можно выше, нам необходимо  $\kappa_e \rightarrow \kappa$  или  $\mu_0^2 \rightarrow 0$  (30). Последнее означает более высокие значения  $\chi$  или более короткие длины  $l$  ТЭ проводника. Иными словами, половину периода ТЭ проводник нагревается почти как в установившемся режиме.

### 2.3. Охлаждение в $P$ -режиме

Расчеты для режима охлаждения в  $P$ -режиме аналогичны расчетам для КПД, только следует учитывать, что ток определяется (5)  $J = J_0 \theta(t)$ , а не эффектом Зеебека. Оптимальный ток  $J_{opt}$  минимизирует температуру охлаждения или максимально увеличивает холодильный коэффициент  $K$ .

Тепловые потоки  $\dot{Q}_C$  и  $\dot{Q}_H$  в режиме охлаждения  $P$ -режима отличаются от (21) и (22) только знаками компонента тепла Пельтье, поскольку ток в ТЭ проводнике протекает в обратном направлении по сравнению с режимом генерирования мощности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P/2} Q_C &= \frac{1}{2} r J^2 + \frac{2T_0}{l} S \kappa_e - \alpha T_C J \\ \frac{1}{P/2} Q_H &= -\frac{1}{2} r J^2 + \frac{2T_0}{l} S \kappa_e - \alpha T_H J \end{aligned} \right\}. \quad (31)$$

В режиме охлаждения необходимо следить за изменениями эффективной (нормализованной) теплопроводности  $\kappa_e(\tau)$ , чтобы найти время достижения минимально возможной температуры охлаждения.  $\kappa_e$  зависит от времени  $\tau$  следующим образом:

$$\kappa_e(\tau) = \kappa \left[ 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \pi N_k e^{-A_k \tau} \right]. \quad (32)$$

Следует отметить, что  $\kappa_e(\tau)$ , в отличие от  $\kappa_e$  (26), не содержит множитель  $\mu_0^2$  (27).

Затем, как в установившемся режиме, условие  $\partial \dot{Q}_C / \partial J = 0$  для тока дает

$$J_{opt} = \frac{\alpha T_C}{\rho l} S = \frac{\alpha T_C}{r}. \quad (33)$$

Заметим, что в отличие от установившегося режима, теплопроводность  $\kappa_e(\tau)$  (32) зависит от  $\tau$ , однако не влияет на величину оптимального тока  $J_{opt}$ .

Выражение для теплового потока на холодном спае при оптимальном токе имеет вид

$$\frac{1}{S} \dot{Q}_C = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2 T_C^2}{\rho l} + \frac{2T_0}{l} \kappa_e(\tau). \quad (34)$$

В установившемся режиме минимальная температура охлаждения  $T_C^{\min}$  находится из условия  $\dot{Q}_C = 0$ . В  $P$ -режиме условие  $\dot{Q}_C = 0$  возможно только в определенные моменты времени. Полагая в (34)  $\dot{Q}_C = 0$ , получим

$$T_C^{\min} = 2\bar{T} \frac{\sqrt{1 + Z_e(\tau)\bar{T}} - 1}{Z_e(\tau)\bar{T}}, \quad (35)$$

где перенормированная добротность  $Z_e(\tau) = \sigma \alpha^2 / \kappa_e(\tau)$  зависит от времени  $\tau$ .

Единственное различие между  $T_C^{\min}(\tau)$  (35) и выражением для  $T_C^{\min}$  в установившемся режиме заключается в значении добротности.  $T_C^{\min}(\tau)$  (35) использует перенормированную теплопроводность  $\kappa_e(\tau)$ , которая зависит от времени  $\tau$  и позволяет оптимизировать температуру охлаждения.

Максимальное значение  $Z_e(\tau)$ , т.е. минимальная температура охлаждения  $T_C^{\min}$  соответствует минимальному  $T_C^{\min}(t)$ . Как следует из (32),  $\kappa_e(\tau)$  имеет минимум при  $\tau = P/2$ , однако даже в этом случае  $\kappa_e(\tau = P/2) > \kappa$ , т.е. аналогично режиму генерирования мощности  $P$ -режима.

В связи с тем, что  $\kappa_e(\tau) > \kappa$ , холодильный коэффициент  $K = \dot{Q}_C / (\dot{Q}_H - \dot{Q}_C)$  и максимальная холодопроизводительность  $Q_C^{\max}$  меньше, чем в установившемся режиме, хотя при некоторых значениях теплопроводности период переключения и другие параметры ТЭ проводника близки к нему.

Приведенные выше выводы применимы только к  $P$ -режиму. Далее мы покажем, что ТЭ устройство, работающее в  $S$ -режиме, может продемонстрировать улучшенные характеристики.

### 3. Распределение температуры и тепловой поток в $S$ -режиме

#### 3.1. Распределение температуры в $S$ -режиме

Решение уравнения (1) с граничными условиями (4) для  $S$ -режима начинается с представления  $T(x, t)$  в виде

$$T(x, t) = \bar{T} - j_0^2 F \left( \sin 2\omega t - \mu^2 \frac{a^2 - x^2}{a^2} \right) + \tilde{T}(x, t), \quad (36)$$

где

$$\mu^2 = a^2 \frac{\omega}{\chi}, \quad F = \frac{P}{4c_v \rho_0 \omega}. \quad (37)$$

Затем (1) дает уравнение для  $\tilde{T}(x, t)$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2}, \quad (38)$$

а граничные условия (4) принимают вид

$$\tilde{T}(x, t) \Big|_{x=\pm a} = \pm T_0 \sin(\omega t) + j_0^2 F \sin(2\omega t). \quad (39)$$

Решение (38) с граничными условиями можно представить в виде

$$\tilde{T}(x, t) = T_0 (S(x) \sin \omega t + C(x) \cos \omega t) + j_0^2 F (\tilde{S}(x) \sin 2\omega t + \tilde{C}(x) \cos 2\omega t), \quad (40)$$

где

$$\begin{cases} S(x) = S_{cs} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right) \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right) + S_{sc} \operatorname{sh}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right) \cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right), \\ C(x) = S_{sc} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right) \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right) - S_{cs} \operatorname{sh}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right) \cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right), \\ \tilde{S}(x) = \tilde{S}_{cc} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu}{a} x\right) \cos\left(\frac{\mu}{a} x\right) + \tilde{S}_{ss} \operatorname{sh}\left(\frac{\mu}{a} x\right) \sin\left(\frac{\mu}{a} x\right), \\ \tilde{C}(x) = -\tilde{S}_{ss} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu}{a} x\right) \cos\left(\frac{\mu}{a} x\right) + \tilde{S}_{cc} \operatorname{sh}\left(\frac{\mu}{a} x\right) \sin\left(\frac{\mu}{a} x\right). \end{cases} \quad (41)$$

Граничные условия (39) позволяют найти коэффициенты в (41):

$$\begin{aligned} S_{cs} &= \frac{\operatorname{ch}(\mu/\sqrt{2}) \sin(\mu/\sqrt{2})}{\operatorname{sh}^2(\mu/\sqrt{2}) + \sin^2(\mu/\sqrt{2})}, \quad S_{sc} = \frac{\operatorname{sh}(\mu/\sqrt{2}) \cos(\mu/\sqrt{2})}{\operatorname{sh}^2(\mu/\sqrt{2}) + \sin^2(\mu/\sqrt{2})}, \\ \tilde{S}_{ss} &= \frac{\operatorname{sh}(\mu) \sin(\mu)}{\operatorname{ch}^2(\mu) - \sin^2(\mu)}, \quad \tilde{S}_{cc} = \frac{\operatorname{ch}(\mu) \cos(\mu)}{\operatorname{ch}^2(\mu) - \sin^2(\mu)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Следовательно, решение (1) с граничными условиями (4) можно записать так:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \bar{T} + T_0 (S(x) \sin \omega t + C(x) \cos \omega t) + \\ &+ j_0^2 F \left( \sin 2\omega t + \mu^2 \frac{a^2 - x^2}{a^2} + \tilde{S}(x) \sin 2\omega t + \tilde{C}(x) \cos 2\omega t \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Компоненты в (43), содержащие  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ , обязаны своим происхождением тепловому потоку, созданному разностью температур на концах ТЭ проводника ( $x = \pm a$ ), их амплитуда пропорциональна  $T_0$ . Такие компоненты описывают типичное ослабление температурных волн на расстоянии от концов ТЭ проводника ( $x = \pm a$ ). Параметр  $\mu^2$  является комбинацией частоты, длины и температуропроводности ТЭ проводника, которая аналогична  $\mu_0^2$  в  $P$ -режиме (27).

Двухчастотные члены  $\sin 2\omega t$ ,  $\cos 2\omega t$  в (43) пропорциональны квадрату амплитуды плотности тока  $j_0^2$ . Эти члены описывают тепловой поток, вызванный неоднородностью распределения температуры за счет тепла Джоуля.

На рис. 3 представлено распределение температуры в ТЭ проводнике, который имеет те же параметры, что и на рис. 2, но используется в  $S$ -режиме.

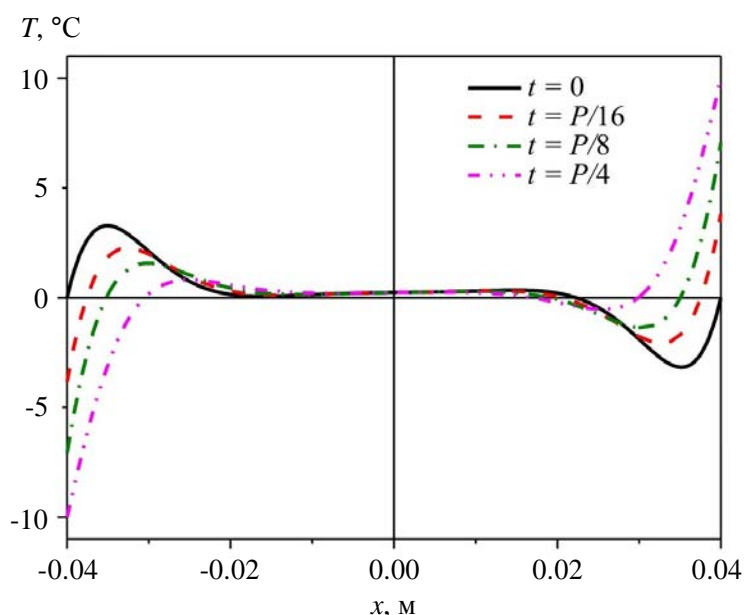


Рис. 3. Распределение температуры ТЭ проводника в S-режиме в разное время, измеренное от начала периода:  $0 \dots P/16$ . Наружные температуры:  $\bar{T} = 0^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ , размеры ТЭ проводника  $a = 0.04$  м, параметры ТЭ материала  $\kappa = 1.7$  Вт/мК,  $\chi = 1.2 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, амплитуда плотности тока  $j = 0.1 \times 10^6$  А/м<sup>2</sup> и период вращения  $P = 1$  с (цвет онлайн).

На рис. 3 показано, что распределение температуры ТЭ проводника в S-режиме аналогично P-режиму. Но температура на гранях ТЭ проводника в S-режиме постоянно изменяется синусоидально в диапазоне  $\bar{T} \pm T_0$ . В центре ТЭ проводника  $T(0, t) > \bar{T}$  вследствие выделения Джоулевого тепла.

### 3.2. Охлаждение в S-режиме

Пусть во время первого полупериода температура нижнего конца (спая) ТЭ проводника (см. рис. 1 б) ниже, чем верхнего.

Отсюда тепловой поток на холодном спае ( $x = -a$ ) равен

$$Q_C = -q_x S \Big|_{x=-a} = S \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=-a} - \alpha T_C(t) j(t) S, \quad (44)$$

где второй член – тепловой поток Пельтье,  $S$  – поперечное сечение ТЭ проводника,  $T_C(t) = T(x = -a, t)$ .

Подставляя в (44) выражение для распределения температуры из (43), при  $x = -a$  получим

$$\begin{aligned} \frac{Q_C}{S} \Big|_{x=-a} &= \kappa T_0 (S'(-a) \sin \omega t + C'(-a) \cos \omega t) + \\ &+ \kappa j_0^2 F \left( -\frac{2\mu^2}{a} + \tilde{S}'(-a) \sin 2\omega t + \tilde{C}'(-a) \cos 2\omega t \right) - \alpha T_C(t) j(t), \end{aligned} \quad (45)$$

где  $S$  – поперечное сечение ТЭ проводника, а  $S', C', \tilde{S}', \tilde{C}'$  – производные по координате при  $x = -a$ .

Согласно (4), температура холодного спае будет минимальной при  $\omega t = \pi/2$ . Обозначим ее  $T_c$ . В этот момент тепловой поток на холодном спае равен

$$\frac{Q_C}{S} \Big|_{\substack{x=-a \\ \omega t = \pi/2}} = \kappa T_0 S'(-a) - \kappa j_0^2 F (2\mu^2/a - \tilde{C}'(-a)) - \alpha T_c j_0. \quad (46)$$

Для определения минимально возможной температуры холодного спая, необходимо найти минимальный тепловой поток на нем, т.е.  $Q_C / S \Big|_{\substack{x=-a \\ \omega t = \pi/2}}$ , как функцию амплитуды плотности тока  $j_0$ , затем используем условие  $\partial Q_C / \partial j_0 = 0$  для определения оптимального тока  $j_0^{opt}$ . Далее, используя  $j_0^{opt}$ , вычисляем тепловой поток на холодном спае (46) и в результате получаем минимальную температуру охлаждения  $T_C^{\min}$ .

Значение оптимального тока  $j_0^{opt}$

$$j_0^{opt} = \frac{\alpha T_C}{2F\kappa(2\mu^2/a - \tilde{C}'(-a))}. \quad (47)$$

При минимальной температуре  $T_C^{\min}$  тепловой поток  $Q_C$  холодного спая при амплитуде плотности тока  $j_0^{opt}$  равен нулю

$$\frac{Q_C}{S} \Big|_{\substack{x=-a \\ \omega t = \pi/2}} = \kappa T_0 S'(-a) - \frac{(\alpha T_C)^2}{4F\kappa} \frac{1}{(2\mu^2/a - \tilde{C}'(-a))} = 0. \quad (48)$$

Используя  $T_0 = \bar{T} - T_C$  в (48), находим

$$T_C^2 = 2\bar{T}(\bar{T} - T_C) \left[ \frac{2F\kappa^2}{\bar{T}\alpha^2 a^2} (2\mu^2 - a\tilde{C}'(-a)) a S'(-a) \right]. \quad (49)$$

Обозначим член в квадратных скобках в (49)  $\beta(\mu, Z\bar{T}) / Z\bar{T}$ , затем, используя  $2F\kappa^2 / \bar{T}\alpha^2 a^2 = 1 / 2Z\bar{T}\mu^2$ , запишем следующие формулы для безразмерного параметра  $\beta(\mu)$

$$\beta(\mu) = \frac{\mu}{2\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{1}{2\mu} \frac{\text{sh}(\mu)\text{ch}(\mu) + \cos(\mu)\sin(\mu)}{\text{ch}^2(\mu) - \sin^2(\mu)} \right) \times \\ \times \frac{\text{sh}(\mu/\sqrt{2})\text{ch}(\mu/\sqrt{2}) + \sin(\mu/\sqrt{2})\cos(\mu/\sqrt{2})}{\text{sh}^2(\mu/\sqrt{2}) + \sin^2(\mu/\sqrt{2})}, \quad (50)$$

а уравнение (49) перепишем в виде

$$T_C^2 + \frac{\beta(\mu)}{Z\bar{T}} \bar{T} T_C - \frac{\beta(\mu)}{Z\bar{T}} \bar{T}^2 = 0. \quad (51)$$

Для расчета  $T_C^{\min}$  необходимо решить квадратичное уравнение (51), положительный корень которого

$$T_C^{\min} = \frac{2\bar{T}}{1 + \sqrt{1 + \frac{Z\bar{T}}{\beta(\mu)}}}. \quad (52)$$

Сравним  $T_C^{\min}$  в S-режиме с минимальной температурой охлаждения в установившемся режиме  $T_C^{st}$ , которую можно выразить [14] следующим образом:

$$T_C^{st} = \frac{T_H}{\sqrt{1 + Z\bar{T}}}, \quad (53)$$

или, используя  $T_H = 2\bar{T} - T_C$ ,

$$T_C^{st} = \frac{2\bar{T}}{1 + \sqrt{1 + Z\bar{T}}}. \quad (54)$$

Соотношения (52) и (54) имеют аналогичный вид, что позволяет найти

$$T_c^{\min} = \frac{2\bar{T}}{1 + \sqrt{1 + Z_e \bar{T}}}, \quad (55)$$

где  $Z_e \bar{T}$  – перенормированная добротность

$$Z_e \bar{T} = \frac{Z\bar{T}}{\beta(\mu)}. \quad (56)$$

Таким образом, расчеты  $S$ -режима также аналогичны установившемуся режиму. Как видно из (55),  $T_c^{\min}$  является монотонно возрастающей функцией безразмерного параметра  $\beta(\mu) / Z\bar{T}$ , при высоких значениях  $\beta(\mu) / Z\bar{T} \gg 1$  получим  $T_c^{\min} \rightarrow \bar{T}$ , что означает отсутствие охлаждения при высоком  $\beta(\mu) / Z\bar{T}$ , т.е. чем меньше значение  $\beta(\mu) / Z\bar{T}$ , тем ниже  $T_c^{\min}$ .

Кроме того, можно утверждать, что более высокая  $T\bar{E}$  добротность  $Z\bar{T}$  означает лучшее охлаждение в  $S$ -режиме (50) и, наоборот, при  $Z\bar{T} \rightarrow 0$ ,  $\beta(\mu) / Z\bar{T} \rightarrow \infty$ , так что охлаждение невозможно. Далее, отметим, что из (50) и (52) следует, что  $T_c^{\min}$  зависит только от одного безразмерного параметра –  $\mu$ .

Проанализируем отношение минимальных температур в  $S$ -режиме и в установившемся режиме

$$\frac{T_c^{\min}}{T_c^{st}} = \frac{1 + \sqrt{1 + Z_e \bar{T}}}{1 + \sqrt{1 + Z\bar{T}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + Z\bar{T} / \beta(\mu)}}{1 + \sqrt{1 + Z\bar{T}}}. \quad (57)$$

При фиксированной добротности  $Z\bar{T}$  отношение (57) зависит только от одного параметра  $\beta(\mu)$ . Функция  $\beta(\mu)$  имеет один минимум и инвариантна по отношению к  $Z\bar{T}$ . Минимум наблюдается при  $\mu \approx 1.53$  и, соответственно,  $\beta \approx 0.76 < 1$ , т.е.  $T\bar{E}$  устройство в  $S$ -режиме обеспечит в определенные моменты времени более глубокое охлаждение, чем в установившемся режиме (см. рис. 4).

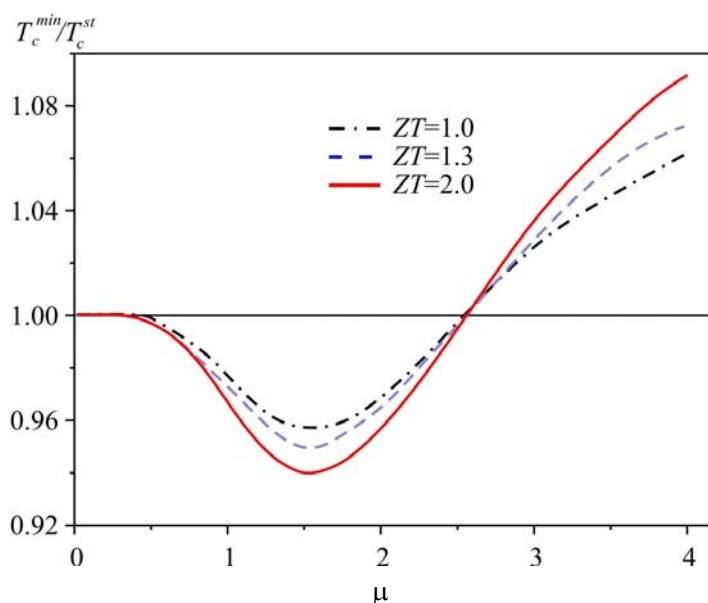


Рис. 4. Соотношение минимальных температур  $T_c^{\min} / T_c^{st}$  для  $S$ -режима и установившегося режима в зависимости от  $\mu$  для  $Z\bar{T} = 1.0, 1.4, 2.0$  (цвет онлайн).

В качестве примера, для ТЭ устройства в  $S$ -режиме с ТЭ проводником из  $Bi_2Te_3$  [34] (температуропроводность  $\chi \approx 1.2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$ ) мы выбрали длину ТЭ проводника  $2a = 1.5 \text{ мм}$  и период вращения  $P \approx 1.15 \text{ с}$ , что дает оптимальное  $\mu_{\min} \approx 1.53$ .

Для термоэлектрического устройства, работающего в  $S$ -режиме с указанными выше параметрами, были рассчитаны  $T(x, t)$ , отсчитываемые от начала периода – (рис. 5).

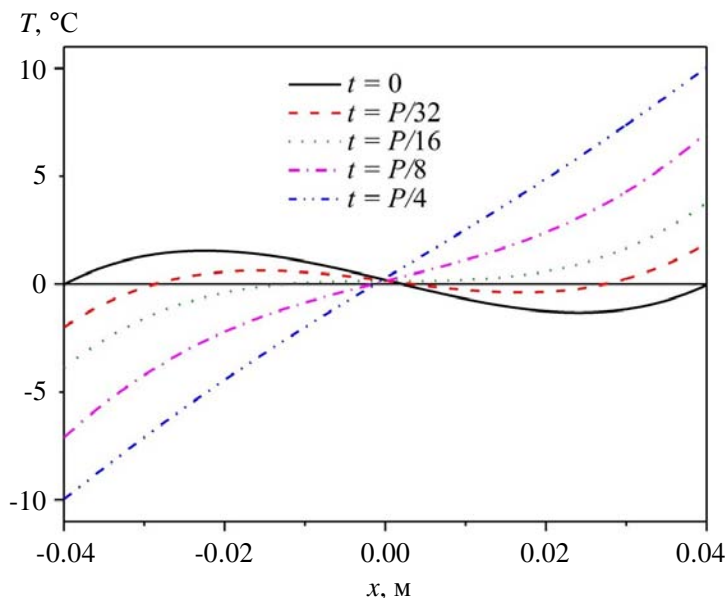


Рис. 5. Распределение температуры ТЭ проводника в  $S$ -режиме в разное время, измеренное от начала периода:  $0 \dots P/32$ . Наружные температуры:  $\bar{T} = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 10 \text{ } ^\circ\text{C}$ , безразмерный параметр ТЭ материала  $\mu_{\min} \approx 1.53$ , длина ТЭ проводника  $a = 0.04 \text{ м}$ .

Сравнивая рис. 3 и рис. 5 видим, что именно при критическом значении безразмерного параметра, равном  $\mu_{\min} \approx 1.53$ , зависимость температуры  $T(x, t)$  от координаты в момент времени  $P/4$  становится линейной, тепло проникает до середины ветви и, таким образом, весь ее объем полностью задействован.

Для  $S$ -режима при оптимальном  $\beta(\mu) \approx 0.76$  минимальную достижимую температуру охлаждения можно выразить как

$$T_c^{\min} \approx \frac{2\bar{T}}{1 + \sqrt{1 + 1.3Z\bar{T}}}. \quad (58)$$

Иными словами, используя ТЭ материал с  $ZT = 1$  в  $S$ -режиме, мы получим охлаждение подобно материалу с  $ZT = 1.3$  в установившемся режиме. ТЭ материал при  $ZT = 1.3$  в  $S$ -режиме соответствует  $ZT = 1.7$  в установившемся режиме.

#### 4. Обсуждение результатов и выводы

В статье описаны два типа предлагаемого ТЭ устройства, которые работают в периодических установившихся режимах:  $P$ -режиме – периодическом режиме переключения и в  $S$ -режиме – непрерывном синусоидальном режиме.

Как правило, КПД ТЭ устройства связан со скоростью производства энтропии, особенно с объемным интегралом отклонения плотности потока энтропии  $s = q/T$ ,  $B = \int_V \text{div}(s) dV$ . В

результате, КПД можно записать в виде

$$\eta = \eta_c \frac{1}{1 + \frac{BT_H}{A}}, \quad (59)$$

где  $A$  – работа, выполненная ТЭ генератором мощности.

Таким образом, чем выше скорость производства энтропии, тем ниже КПД ТЭ устройства в режиме генерирования мощности. Переходный режим, имеющий некоторую дополнительную пространственную неоднородность распределения температуры, естественно приводит к дополнительному производству энтропии  $B$  и, как следствие, КПД должен быть еще ниже.

Но соотношение (59), связывающее КПД и производство энтропии, выводится для установившегося режима. Поэтому предсказать заранее, каким будет КПД в переходном, импульсном или периодическом режиме, практически невозможно. В целом, в статье рассматриваются возможные преимущества применения ТЭ устройства в переходных режимах, особенно периодических.

Показано, что  $S$ -режим в определенные моменты времени демонстрирует более глубокое охлаждение по сравнению с установившимся.

Предлагаемый метод аналитического расчета параметров ТЭ устройств в периодических  $P$ - и  $S$ -режимах для режима генерирования мощности или режима охлаждения может быть обобщен и на более сложные режимы синхронизации. Аналитическое решение позволяет применить метод оптимизации для нахождения оптимальных параметров ТЭ устройства.

## Благодарность

Авторы выражают глубокую признательность д.ф.-м.н. Л.Н. Вихор, профессору С.З. Сапожникову и профессору И.В. Андрианову за ценные и конструктивные предложения в ходе выполнения данной исследовательской работы.

И.В. Безсуднову оказана поддержка Правительства Российской Федерации (Грант 074-U01).

## Дополнение 1

### Решение уравнения теплопроводности в $P$ -режиме.

Здесь мы приведем решение задачи о распределении температуры (1) с граничными условиями (2) в  $P$ -режиме (см. рис. 1) с помощью стандартного метода разделения переменных.

Как и ранее в тексте статьи, для ветви термоэлемента в промежутках времени от  $nP$  до  $(n+1)P/2$ , где  $P$  – период, а  $n=0, 1, \dots$  нижний край является холодным, а верхний – горячим.

Будем полагать, как и ранее,  $l=2a$  и перепишем уравнение теплопроводности (1), граничные условия (2), равно как и замену переменных, выполненную в (7), в координатах  $x = -a \dots a$ .

Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\rho}{c_v \rho_0} j^2, \quad (A1)$$

а граничные условия

$$T|_{x=\pm a} = \bar{T} + T_0 \theta(t). \quad (A2)$$

Производя замену



$$T(x,t) = \bar{T} + \frac{\rho j^2}{\kappa}(a^2 - x^2) + \tilde{T}(x,t), \quad (A3)$$

получим

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2}, \quad (A4)$$

$$\tilde{T}(x,t) \Big|_{x=\pm a} = T_0 \theta(t). \quad (A5)$$

Представим решение уравнения (A1) с граничными условиями (A2) в форме

$$T(x,t) = \bar{T} + \frac{\rho j^2}{\kappa}(a^2 - x^2) + \tilde{T}(x,t) = \bar{T} + \frac{\rho j^2}{\kappa}(a^2 - x^2) + T_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[ S_n(x) \sin\left(\frac{2\pi}{P} nt\right) + C_n(x) \cos\left(\frac{2\pi}{P} nt\right) \right], \quad (A6)$$

где

$$C_n(x) = \frac{1}{\Omega_n} [B_n \operatorname{ch}(\lambda_n x) \sin(\lambda_n x) - A_n \operatorname{sh}(\lambda_n x) \cos(\lambda_n x)], \quad (A7)$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\Omega_n} [A_n \operatorname{ch}(\lambda_n x) \sin(\lambda_n x) + B_n \operatorname{sh}(\lambda_n x) \cos(\lambda_n x)], \quad \lambda_n = \sqrt{n\pi/\chi P}.$$

Коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$  и  $\Omega_n$  имеют вид

$$A_n = \operatorname{ch}(\lambda_n a) \sin(\lambda_n a), \quad B_n = \operatorname{sh}(\lambda_n a) \cos(\lambda_n a), \quad \Omega_n = A_n^2 + B_n^2, \quad (A8)$$

а  $b_n$  – коэффициент разложения  $\theta(t)$  в ряд Фурье

$$\theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{P} nt\right), \quad b_n = \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n]. \quad (A9)$$

На рис. А1 показана зависимость температуры  $T(x,t)$  вдоль ветви термопары, полученная как методом Гринберга [30] (TG), так и методом разделения переменных (TD), изложенным выше (параметры ТЭ устройства соответствуют приведенным в статье).

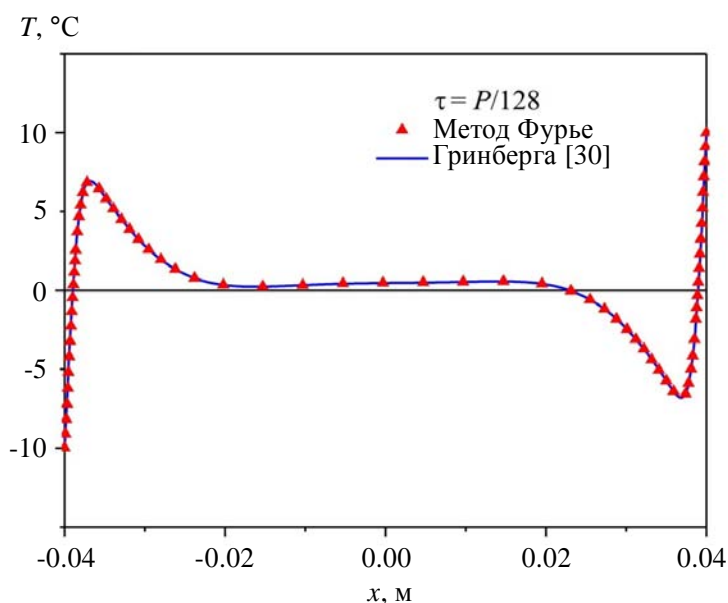


Рис. А1. Распределение температуры вдоль ветви термопары для момента времени  $t = P/128$ .

Как видно из рис. А1, распределение температур  $T(x, t)$ , полученное обоими методами – методом разделения переменных и методом Гринберга [30] практически совпадают. Для расчётов генераторного и холодильного режимов и для их оптимизации необходимо вычислить потоки тепла, т.е., в том числе, производные температуры  $\partial T / \partial x$  на концах ветви термоэлемента  $x = \pm a$ . Для решения, полученного методом разделения переменных, рассчитать такую производную невозможно, поскольку для  $x = \pm a$  формула (А9) дает расходящийся ряд, в то время как решение (19), полученное по [30] при  $x = \pm a$  сходится и производная может быть рассчитана (см. (20)-(22)).

На рис. А2 показана зависимость  $T(x, t)$  температуры для различных значений коэффициента температуропроводности. Коэффициенты  $\lambda_n$  обратно пропорционально зависят от температуропроводности (и, соответственно, теплопроводности) тем самым, чем больше  $\lambda_n$ , тем глубже будут проникать температурные изменения в ветвь ТЭ устройства.

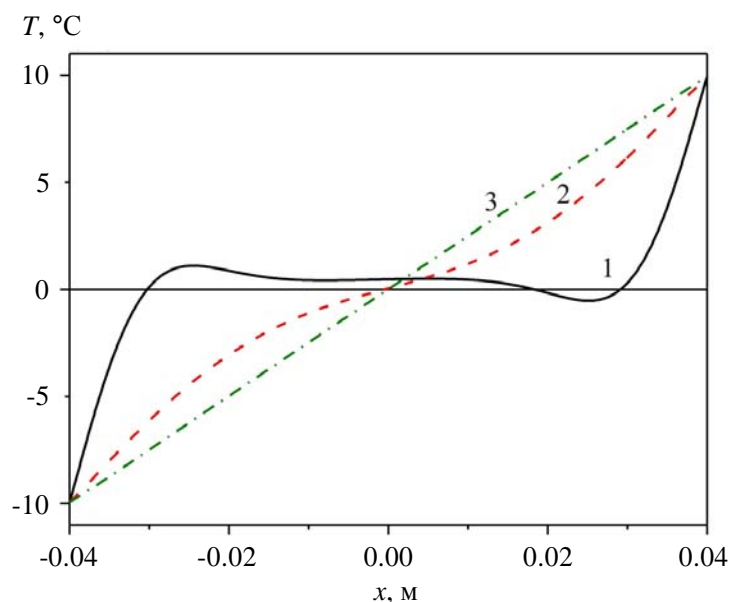


Рис. А2. Распределение температуры в момент времени  $P/4$  вдоль ветви термоэлемента при различных значениях коэффициента температуропроводности 1 –  $\chi = 1.214 \times 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$ ,  
2 –  $\chi = 12.14 \times 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$ , 3 –  $\chi = 4.183 \times 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$ .

Отметим, что зависимость 3 на рис. А2 приведена для значения температуропроводности, соответствующего значению  $\mu_0$  (27), равному 1.53, т.е. найденному в (56). Дальнейшее увеличение температуропроводности не изменяет вида зависимости 3 на рис. А2. При таком значении температуропроводности тепло полностью доходит до середины ветви термопары, и зависимость  $T(x, P/4)$  становится неизменной.

На рис. А3 приведены зависимости  $T(x, t)$  и  $\partial T / \partial x$  в различные моменты времени. Для расчета производной было использовано решение по методу Гринберга [30].

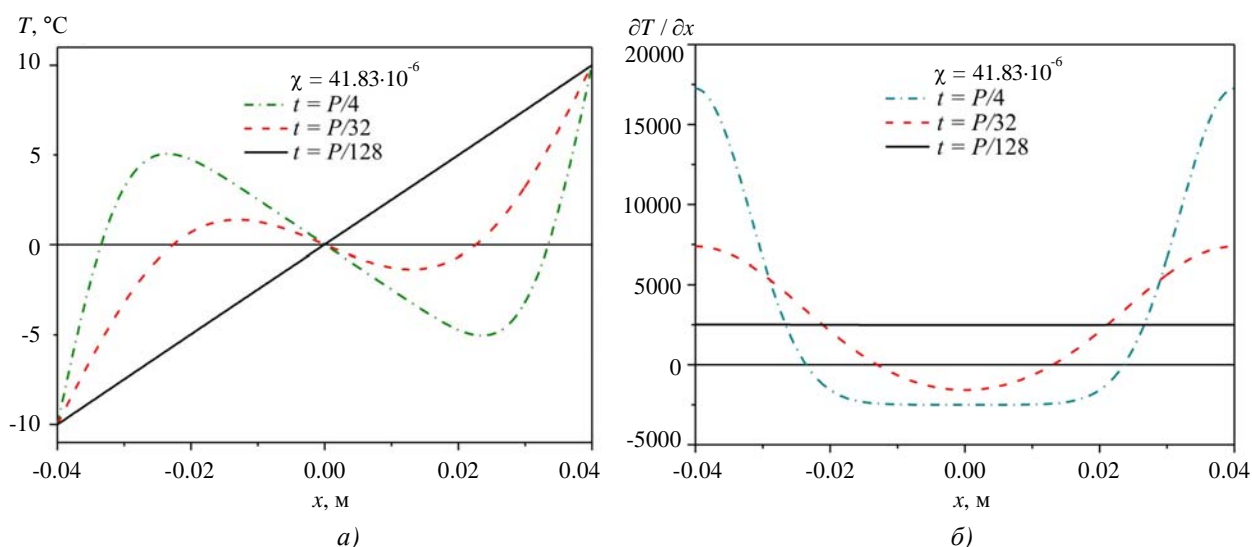


Рис. А3. Зависимости температуры  $T(x, t)$  (а) и градиента температуры  $\partial T / \partial x$  (б) в моменты времени  $P/128$ ,  $P/32$ ,  $P/4$ , для  $\chi = 4.183 \times 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$ .

Как видно из рис. А3, та часть теплового потока, которая обязана градиенту температуры  $\partial T / \partial x$  ( $q_x = -\kappa \cdot \partial T / \partial x + \Pi j_x$ ) в середине ветви термопары, вблизи  $x = 0$ , много меньше потока на границах, где имеют место большие тепловые потоки, входящие в горячий спай и выходящие в холодный. При этом сквозной поток через ветвь термопары, в связи с малостью  $\partial T / \partial x|_{x=0}$ , практически отсутствует.

## Литература

1. T.M. Tritt, *Annual Review of Materials Research*, 41, 433 (2011).
2. G.J. Snyder, and Eric S. Toberer, *Nature Materials* 7, 105 (2008).
3. G.S. Nolas, J. Poon, and M. Kanatzidis, *Materials Research Society Bulletin*, 31, 199 (2006).
4. H. Alam, S. Ramakrishna, *Nano Energy* 2, 190 (2013).
5. G.S. Nolas, J. Sharp, and J. Goldsmid, *Thermoelectrics. Basic Principles and New Materials Developments*, Springer Series in Materials Science 45-VIII (Springer-Verlag, Berlin, 2001), p.293.
6. X.F. Zheng, C.X. Liu, Y.Y. Yan, and Q. Wang, *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 32, 486 (2014).
7. *New Materials for Thermoelectric Applications: Theory and Experiment*, NATO Science for Peace and Security Series B: Physics and Biophysics, edited by V. Zlatic and A. Hewson (Springer, New York, 2013) p.273.
8. Properties and Applications of Thermoelectric Materials. The Search for New Materials for Thermoelectric Devices. *Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Properties and Application of Thermoelectric Materials*, Hvar, Croatia, 21-26 September 2008, edited by V. Zlatic and A. Hewson, NATO Science for Peace and Security Series B: Physics and Biophysics (Springer, New York, 2009), p.340.
9. *Thermoelectric Nanomaterials Materials Design and Applications*. Springer Series in Materials Science, 182-XIX, edited by K. Koumoto, T. Mori, (Springer, New York, 2013), p.387.
10. L. Weishu, Y. Xiao, C. Gang, and R. Zhifeng, *Nano Energy* 1, 42 (2012).

11. L.P. Bulat, I.A. Drabkin, V.V. Karatayev V.B. Osvenskii, Yu.N. Parkhomenko, D.A. Pshenay-Severin, and A.I. Sorokin, *Journal of Electronic Materials*, 43, 2121 (2014).
12. L.P. Bulat, V.B. Osvenskii, and D.A. Pshenai-Severin, *Physics of the Solid State*, 55, 2442 (2013).
13. А.А. Снарский, А.К. Сарычев, И.В. Безсуднов и А.Н. Лагарьков, *Физика и техника полупроводников*, 46, 659 (2012).
14. H.J. Goldsmid, *Introduction to Thermoelectricity*, Springer Series in Materials Science, 121, (Springer, Berlin, 2009), p. 242.
15. Q. Zhou, Z. Bian, and A Shakouri, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 40, 4376 (2007).
16. G.J. Snyder, J.-P. Fleurial, T. Caillat, R. Yang, and G. Chen, *J. Appl. Phys.*, 92, 1564, (2002).
17. Yu.I. Dudarev, M.Z. Maksimov, *Technical Physics*, 43, 737 (1998).
18. Chakraborty, K.C. Ng, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49, 1845 (2006).
19. R. Yanga, G. Chena, A.R. Kumarb, G.J. Snyder, and J.-P. Fleurial, *Energy Conversion and Management*, 46, 1407 (2005).
20. J.N. Mao, H.X. Chen, H. Jia, and X.L. Qian, *Journal of Applied Physics*, 112, 014514 (2012).
21. Л.С. Стилбанс, Н.А.Федорович, *Журнал технической физики* 3, 460 (1958).
22. J.E. Parrott, *Solid State Electron.* 1, 135 (1960).
23. V.A. Naer, *Journal of Engineering Physics*, 8, 340 (1965).
24. Е.К. Иорданишвили, *Термоэлектрические источники питания* (Советское радио, Москва, 1968), стр. 110
25. G.J. Snyder, J.P. Fleurial, T. Caillat, R. Yang, and G. Chen, *J. Appl. Phys.* 92, 1564 (2002).
26. G.E. Hoyos, K.R. Rao, and D. Jerger, *Energy Convers.* 17, 45 (1977).
27. K. Landecker, A.W. Findlay, *Solid State Electron.* 3, 239 (1961).
28. T. Thonhauser, G.D. Mahan, L. Zikatanov, and J. Roe, *Appl. Phys. Lett.* 85, 3247 (2004).
29. R.L. Field, H.A. Blum, *Energy Conversion*, 19-3, 159 (1979).
30. А.А. Гринберг, *Избранные проблемы математической теории электрических и магнитных явлений* (Издательство АН СССР, Москва, 1948), стр. 727.
31. R. Haberman *Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1998) p 215.
32. D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations* (3rd edition), (Academic Press, Boston, 1997) p.828.
33. D. Polyanin, V.F. Zaitsev, *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations* (2nd edition), (Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003), p.816.
34. *Thermoelectrics Handbook. Macro to Nano*, edited by D.M. Rowe (CRC Press, 2005) p.1014.

Поступила в редакцию 21.10.14.