

УДК 537.32

Анатычук Л.И.<sup>1,2</sup>, Вихор Л.Н.<sup>1</sup>, Коцур М. П.<sup>1</sup>,  
Кобылянский Р.Р.<sup>1,2</sup>, Каденюк Т.Я.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт термоэлектричества НАН и МОН Украины,  
ул. Науки, 1, Черновцы, 58029, Украина;

<sup>2</sup> Черновицкий национальный университет им. Юрия Федьковича,  
ул. Коцюбинського, 2, Черновцы, 58012, Украина

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВРЕМЕННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ТЕМПЕРАТУРЫ ОХЛАЖДЕНИЯ В ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ

---

*Рассмотрена физическая модель термоэлемента в нестационарном режиме охлаждения, на холодной поверхности которого учитываются объемная теплоемкость коммутационной и изоляционной пластин и охладительного объекта, тепловыделение объекта, теплообмен с окружающей средой, выделение тепла Джоуля на контактных сопротивлениях между термоэлектрическим материалом и металлической коммутацией, а также влияние эффекта Томсона в объеме веток термоэлемента. Описан метод расчетов оптимальных зависимостей тока питания термоэлемента от времени, которые обеспечивают заданные временные зависимости температуры охлаждения. Приводятся примеры результатов компьютерного моделирования оптимальных функций управления током для заданных непрерывных, кусочно-непрерывных и периодических функций температуры охлаждения от времени.*

**Ключевые слова:** термоэлемент, процесс нестационарного термоэлектрического охлаждения, временные зависимости температуры, функции управления током.

*We consider a physical model of thermoelement in the unsteady-state cooling mode, on the cold surface of which account is taken of the volumetric heat capacity of connecting and insulating plates, heat release of the object, heat exchange with the environment, the Joule heat release on the contact resistances between thermoelectric material and metal interconnects, as well as the influence of the Thomson effect in the bulk of thermoelement legs. A method for calculation of optimal time dependences of thermoelement supply current ensuring the prescribed time dependences of cooling temperature is described. Examples of computer simulation results of optimal current control functions for given continuous, piecewise continuous and periodic functions of cooling temperature versus time are provided.*

**Key words:** thermoelement, unsteady-state thermoelectric cooling process, time dependences of temperature, current control functions.

### Введение

Термоэлектрический способ охлаждения широко применяется для обеспечения тепловых режимов различных электронных, медицинских и измерительных устройств. В отдельных случаях такие устройства работают в динамических режимах, которые требуют изменять

температуру охлаждения (нагрева) объекта согласно заданному временному закону. Термоэлектрический охладитель позволяет легко реализовать такие динамические режимы путем управления температурой охлаждения (нагрева) за счет изменения во времени тока питания термоэлементов.

Актуальная задача управления процессом термоэлектрического охлаждения или нагрева состоит в установлении оптимальной зависимости тока питания от времени, которая бы обеспечивала заданную временную зависимость температуры рабочей поверхности термоэлементов. Такая задача относится к задачам синтеза управления процессом нестационарного термоэлектрического охлаждения или нагрева.

Анализ научной информации [1 – 10] показывает, что опубликованные результаты теоретических исследований процесса нестационарного охлаждения преимущественно касаются определения поведения температуры в термоэлементе при условиях его питания импульсами тока определенной заданной формы. Относительно задач синтеза управления, связанных с поиском оптимальных временных функций тока для нестационарных процессов охлаждения и нагрева, то сегодня способы их решения изучены недостаточно.

Цель работы состояла в разработке алгоритма и компьютерных средств для расчетов оптимальной временной зависимости тока питания термоэлектрического преобразователя, которой реализуется изменение по заданному закону температуры объекта, охлаждаемого или нагреваемого этим преобразователем.

Задача синтеза управления температурой охлаждения в нестационарном режиме связана с решением двух вопросов. Во-первых, необходимо уметь определять, может ли заданная временная зависимость температуры охлаждения вообще быть реализована, ведь возможность достижения заданной температуры за определенное время связана с ограничениями быстродействия термоэлектрического охладителя. Ответ на этот вопрос дает решение оптимизационной задачи о нахождении минимальной температуры охлаждения за определенный промежуток времени. Компьютерные методы решения такой задачи предложены в [11, 12]. В этих работах показано, какая минимальная температура достигается в режиме нестационарного охлаждения за разные промежутки времени с помощью однокаскадных и двухкаскадных термоэлектрических охладителей.

Второй вопрос состоит в нахождении алгоритма, по которому для заданной временной функции температуры охлаждения  $T_c(t)$  определяется форма управляющего импульса тока  $I(t)$ . Методы решения такой задачи рассматривались в работах [13, 14]. Результаты были получены для приближенных физических моделей термоэлектрического охладителя в нестационарном режиме. Рассматривалась лишь одна термоэлектрическая ветка, параметры материала которой, а именно: коэффициенты Зеебека  $\alpha$ , удельного сопротивления  $\rho$ , теплопроводности  $k$  и объемной теплоемкости  $c$ , не зависят от температуры. В [13] на холодной поверхности ветки учтено лишь поглощение тепла Пельтье, не учитываются теплоемкость охлаждаемого объекта, выделение тепла Джоуля на контактом сопротивлении между термоэлектрическим материалом ветки и металлической коммутацией, которые существенно влияют на температуру охлаждения в динамическом режиме [15]. В [14] учтено влияние этих факторов, но не учитывается мощность активного тепловыделения охлаждаемого объекта в процессе нестационарного охлаждения, которое тоже важно в практическом использовании. Поэтому для нахождения взаимосвязи между заданной функцией температуры  $T_c(t)$  и управляющим током  $I(t)$  воспользуемся уточненной физической моделью термоэлемента.

## Физическая модель термоэлемента в нестационарном режиме и ее математическое описание

Схема термоэлемента в нестационарном режиме охлаждения показана на рис. 1. Ветки термоэлемента высотой  $l$  и сечением  $s$  выполнены из материалов  $n$ - и  $p$ -типа проводимостей. Характеристики материалов веток, а именно: коэффициенты термоЭДС  $\alpha_{n,p}(T)$  и удельного сопротивления  $\rho_{n,p}(T)$ , зависят от температуры, а коэффициенты теплопроводности  $\kappa_{n,p}$  и теплоемкости  $c_{n,p}$  будем считать константами вследствие их незначительной зависимости от температуры в термоэлектрических материалах для охладителей. Принимается, что тепловыделяющая поверхность термоэлемента поддерживается при фиксированной температуре  $T_h$ , боковая поверхность веток адиабатически изолирована. На холодном спае термоэлемента учитываются поглощение тепла Пельтье, выделение тепла Джоуля на контактах спая с контактным сопротивлением  $r_c$ , суммарная объемная теплоемкость  $g$  коммутационной и изоляционной пластин и охлаждаемого объекта, теплообмен холодной поверхности с окружающей средой, температура которой  $T_a$ , а также активное тепловыделение объекта, который охлаждается, мощность которого  $q_0$ .

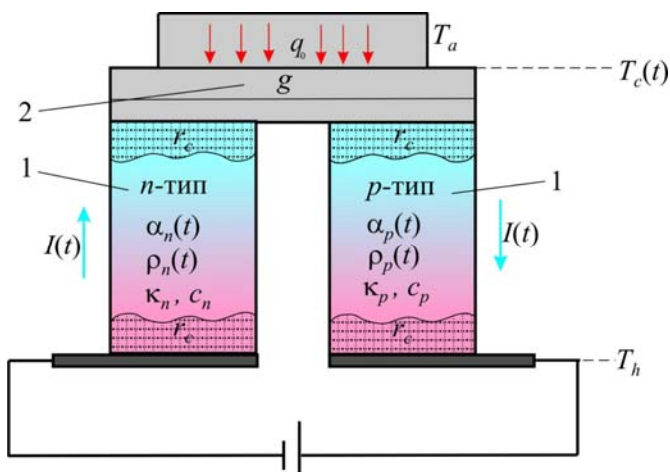


Рис. 1. Схема термоэлемента в нестационарном режиме охлаждения.  
 1 – ветки термоэлемента, 2 – сосредоточенная объемная теплоемкость  $g$  коммутационной и изоляционной пластин и объекта охлаждения.

Для такой модели распределение температуры в ветках термоэлемента задается системой одномерных уравнений нестационарной теплопроводности в виде

$$\begin{cases} c_n \frac{\partial T_n}{\partial t} = \kappa_n \frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} + \rho_n(T) \frac{I^2(t)}{s^2} - T_n \frac{\partial \alpha_n(T)}{\partial T_n} \frac{I(t)}{s} \frac{\partial T_n}{\partial x} \\ c_p \frac{\partial T_p}{\partial t} = \kappa_p \frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} + \rho_p(T) \frac{I^2(t)}{s^2} - T_p \frac{\partial \alpha_p(T)}{\partial T_p} \frac{I(t)}{s} \frac{\partial T_p}{\partial x} \end{cases}, \quad (1)$$

где  $x \in [0, l]$ ,  $t \in [0, t_{\max}]$ .  $I(t)$  – ток в ветках термоэлемента, который является функцией времени. В уравнениях (1) учтено влияние эффекта Томсона, который возникает в объеме веток термоэлемента вследствие зависимости коэффициентов термоЭДС  $\alpha_{n,p}(T)$  от температуры.

Краевые условия для этих уравнений имеют вид

$$\left[ \kappa_n s \frac{\partial T_n}{\partial x} + \kappa_p s \frac{\partial T_p}{\partial x} \right]_{x=0} - [\alpha_p(T_c(t)) + \alpha_n(T_c(t))] I(t) T_c(t) -$$

$$- g \frac{\partial T_c(t)}{\partial t} - 2sH(T_c(t) - T_a) + 2 \frac{r_c}{s} I^2 + q_0 = 0, \quad (2)$$

$$T_n(0, t) = T_p(0, t) \equiv T_c(t), \quad T_n(l, t) = T_p(l, t) \equiv T_h,$$

где  $T_c(t)$  – температура холодной поверхности термоэлемента является заданной функцией времени,  $H$  – коэффициент конвективного теплообмена с окружающей средой.

Начальное распределение температуры в ветках соответствует стационарному распределению при начальном значении тока  $I_0$  и задается в виде функции

$$T_{n,p}(x, 0) = C_0 I_0^2 x^2 + C_1 x + C_2, \quad (3)$$

где  $C_0$ ,  $C_1$  и  $C_2$  – константы, которые определяются решениями стационарной задачи теплопроводности в ветках термоэлемента при постоянном токе  $I_0$ .

При условиях  $I_0 = 0$  А,  $T_h = T_a$ , начальные условия краевой задачи (1) – (2) будут иметь простой вид

$$T_n(x, 0) = T_p(x, 0) \equiv T_a. \quad (4)$$

Задача заключается в том, чтобы найти функцию управления током  $I(t)$  такую, которая обеспечивает заданную зависимость холодной температуры от времени  $T_c(t)$ .

### Решение задачи синтеза оптимального управления

Для решения поставленной задачи воспользуемся усредненными значениями параметров материалов веток термоэлемента, а именно

$$\alpha = (\overline{\alpha_p} + \overline{\alpha_n}) / 2; \quad \rho = (\overline{\rho_p} + \overline{\rho_n}) / 2; \quad \kappa = (\kappa_p + \kappa_n) / 2; \quad c = (c_p + c_n) / 2. \quad (5)$$

Заметим, что в первом приближении влияние эффекта Томсона в уравнениях (1) можно учесть арифметическим усреднением коэффициентов термоЭДС в рабочем интервале температур [16], а для коэффициентов удельного сопротивления целесообразно воспользоваться интегральным усреднением [16]. Тогда средние значения этих коэффициентов в (5) определяются следующим образом:

$$\overline{\alpha_{n,p}} = (\alpha_{n,p}(T_h) + \alpha_{n,p}(T_c(t))) / 2, \quad (6)$$

$$\overline{\rho_{n,p}} = \frac{1}{(T_h - T_c(t))} \int_{T_c(t)}^{T_h} \rho_{n,p} dT. \quad (7)$$

Такие приближения позволяют решать вместо задачи (1) – (3) для термоэлемента аналогичную начально-краевую задачу нестационарной теплопроводности для одной ветки с усредненными согласно (5) – (7) термоэлектрическими параметрами  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\kappa$  и  $c$ .

Применяя метод преобразований Лапласа, как это было предложено в [14], получим соотношение между заданной функцией температуры охлаждения  $T_c(t)$  и функцией управления током  $I(t)$  в виде

$$I(t) = \frac{1}{\alpha T_c(t)} \left[ \frac{r_c}{s} I^2(t) + \frac{\kappa \rho}{c s l} \int_0^{at} K(t - \tau) I^2(\tau) d\tau + \Phi(t, T_c(t)) \right], \quad (8)$$

где  $\Phi(t, T_c(t)) = -g \frac{dT_c(t)}{dt} - HsT_c(t) - \frac{r_c}{s} I_0^2 + A - \frac{\kappa s}{l} \int_0^{at} \vartheta_1(t-\tau) \frac{dT_c(\tau)}{d\tau} d\tau - \frac{\kappa \rho}{c sl} I_0^2 \int_0^{at} K(\tau) d\tau$ ,

$$A = (\alpha I_0 + Hs) \frac{\frac{\kappa s}{l} T_h + HsT_a + q_0 + (0.5 + \frac{r_c}{\rho l}) \frac{\rho l}{s} I_0^2}{\alpha I_0 + Hs + \frac{\kappa s}{l}},$$

$$a = \frac{\kappa}{cl^2}, \quad K(t) = \vartheta_1(t) - \vartheta_0(t), \quad \vartheta_1(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 k^2 at), \quad \vartheta_0(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp(-\pi^2 k^2 at).$$

Соотношение (8) является нелинейным интегральным уравнением, которое решается численно методом последовательных приближений. Достаточно сложный алгоритм решения такого уравнения реализуется с помощью программных средств компьютерного моделирования, разработанных в среде Matlab.

### Результаты компьютерного моделирования

Моделирование функций управления током, обеспечивающих заданные временные зависимости температуры охлаждения, проводилось для термоэлементов, ветки которых выполнены из материалов на основе *Bi-Te* *n*- и *p*-типов проводимостей со стандартными термоэлектрическими характеристиками  $\alpha_{n,p}$ ,  $\rho_{n,p}$ ,  $\kappa_{n,p}$ ,  $c_{n,p}$  [17]. Расчеты выполнялись для веток высотой  $l = 0.14$  см, площадью сечения  $s = 0.1 \times 0.1$  см<sup>2</sup>, с величиной контактного сопротивления  $r_c = 5 \cdot 10^{-6}$  Ом·см<sup>2</sup>. Учитывался теплообмен теплопоглощающей поверхности термоэлементов с окружающей средой, температура которой  $T_a = 300$  К, коэффициент теплообмена  $H = 10^{-3}$  Вт/см<sup>2</sup>·К. Суммарная объемная теплоемкость коммутационной и изоляционной пластин и объекта охлаждения равнялась  $g = 0.002$  Дж/К. Рассматривались варианты работы модулей в режиме без тепловой нагрузки, то есть значение тепловыделения охлаждаемого объекта принималось равным  $q_0 = 0$  и с нагрузкой на одну ветку  $q_0 = 0.03$  Вт.

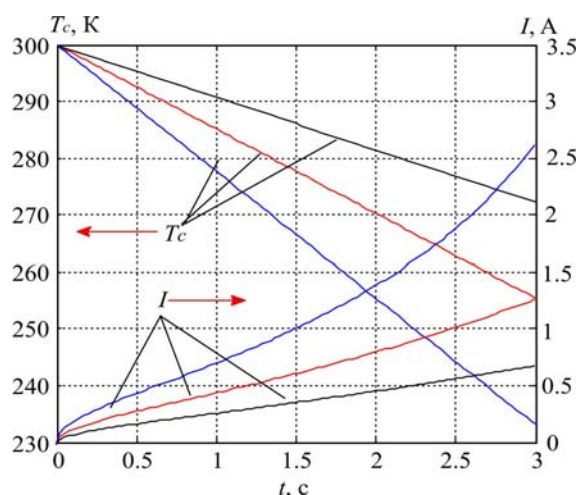


Рис. 2. Заданные временные зависимости температуры охлаждения  $T_c(t)$  и соответствующие функции управления током питания термоэлемента  $I(t)$ .  $q_0 = 0$ .

На рис. 2 – 4 показаны примеры заданных временных зависимостей температуры охлаждения  $T_c(t)$  и рассчитанные для них соответствующие функции управления током питания термоэлемента  $I(t)$ . На рис. 2 приведены зависимости  $I(t)$ , которые обеспечивают непрерывное понижение температуры до заданной величины за заданный промежуток времени.

На рис. 3 показаны примеры кусочно-линейных функций температуры от времени  $T_c(t)$  и соответствующие им управления  $I(t)$ . Очевидно, что выбор такого оптимального управления дает возможность уменьшить время выхода термоэлектрического устройства в стационарный режим.

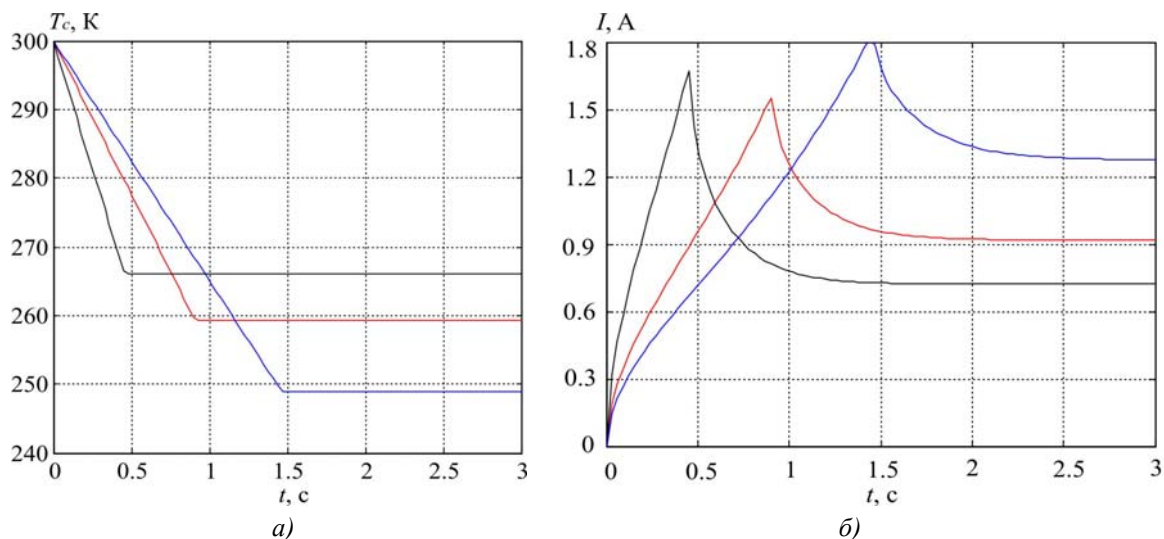


Рис. 3. а) Заданные временные зависимости температуры охлаждения  $T_c(t)$  и б) соответствующие функции управления током питания термоэлемента  $I(t)$ .  $q_0 = 0$ .

На рис. 4 показано периодическое изменение температуры охлаждения, обеспечивающее соответствующей периодической функцией управления током питания термоэлементов.

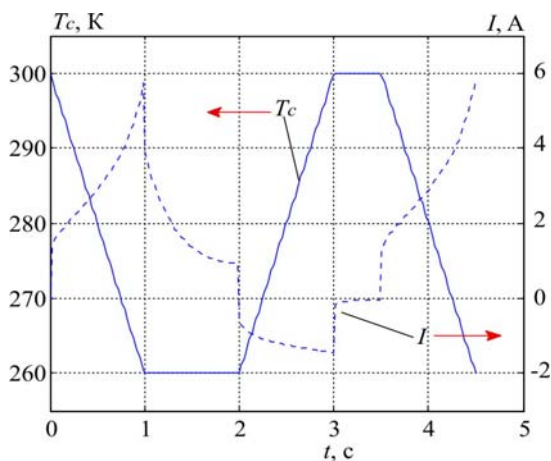


Рис. 4. Заданные временные зависимости температуры охлаждения  $T_c(t)$  и соответствующие функции управления током питания термоэлемента  $I(t)$ .  $q_0 = 0.03$  Вт.

## Выводы

1. Предложенный метод компьютерного моделирования позволяет определить оптимальные временные функции управления током питания термоэлементов, которыми обеспечиваются заданные зависимости изменения температуры охлаждения со временем. Следует заметить, что практически не существует экспериментальных методов, которые бы позволяли находить аналогичные функции управления током термоэлементов.
2. Установление оптимальных для конкретных целей временных зависимостей тока имеет важное практическое значение. Такие функции используются для конструирования и

автокалибровки специальных электронных регуляторов, которые необходимы для обеспечения работы системы автоматического управления процессом нестационарного охлаждения в термоэлектрических устройствах различного назначения.

## Литература

1. Snyder G. J., Fleurial J.-P., Caillat T., Yang R. G., Chen G. I. Supercooling of Peltier cooler using a current pulse. *J. Applied Physics*. 2002. V. 92. P. 1564 – 1569.
2. Thonhauser T., Mahan G.D., Zikatanov L., Roe J. Improved supercooling in transient thermoelectrics. *Applied Physics Letters*. 2004. V. 85. N. 15. P. 3247 – 3249.
3. Yang R.G., Chen G.I., Kumar A.R., Snyder G.I., Fleurial J.-P. Transient cooling of thermoelectric coolers and its applications for microdevices. *Energy Conversion and Management*. 2005. V. 46. P. 1407 – 1421.
4. Shen L. M., Chen H.X., Xiao F., Yang Y.X., Wang S.W. The step-change cooling performance of miniature thermoelectric module for pulse laser. *Energy Conversion and Management*. 2014. V. 80. P. 39 – 45.
5. Shen L. M., Xiao F., Chen H.X., Yang Y.X., Wang S.W. Numerical and experimental analysis of transient supercooling effect of voltage pulse on thermoelectric element. *Int. J. of Refrigeration*. 2012. V. 35. P. 1156 – 1165.
6. Ma M.A., Yu J. Numerical study on the temperature overshoot characteristic of a realistic thermoelectric module under a current pulse operation. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 2014. V. 72. P. 234 – 41.
7. Mao J. N., Chen H.X., Jia H., Qian X.L. The transient behavior of Peltier junctions pulsed with supercooling. *J. of Applied Physics*. 2012. V. 112. N. 1. P. 014514-1 – 014514-9.
8. Cheng C.-H., Huang C.-S., Cheng T.-C A three-dimensional theoretical model for predicting transient thermal behavior of thermoelectric coolers. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 2010. V. 53. P. 2001 – 2011.
9. Snarskii A.A., Bezsudnow I.V. Rotating thermoelectric device in periodic steady state. *Energy Conversion and Management*. 2015. V. 94. P. 103 – 111.
10. Hao L.V., Wang X.-D., Wang X.-D., Meng J.-H. Optimal pulse current shape for transient supercooling of thermoelectric cooler. *Energy*. 2015 V. 83. P. 788 – 796.
11. Kotsur M. Optimal control of distributed parameter systems with application to transient thermoelectric cooling. *Advances in Electrical and Computer Engineering*. 2015 V. 15. P.117 – 122.
12. Коцур М.П. Математичне моделювання та оптимізація процесу нестационарного термоелектричного охолодження. *Технологічний аудит і резерви виробництва*. 2016 Т. 1. N2 (27). С. 29 – 34.
13. Иорданишвили Е.К., Малкович Б.Е. О возможности управления температурой холодного спая термоэлемента. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО*. 1971 N2. С. 74 – 81.
14. Каганов М.А., Ривкин А.С. Воспроизведение заданного временного хода температуры с помощью полупроводниковых термоэлементов. *Инженерно-физический журнал*. 1973. Т. 24. N5. С. 902 – 907.
15. Ривкин А.С. Оптимальное управление нестационарным процессом термоэлектрического охлаждения. *ЖТФ*. 1973. Т. 43. № 7. С. 1563 – 1570.
16. Термоэлектрические охладители. под ред. А. А. Вайнера. Москва. 1983. 176 с.
17. Гольцман Б.М., Кудинов В.А., Смирнов И.А. Полупроводниковые термоэлектрические материалы на основе  $Bi_2Te_3$ . Москва. 1972. 320 с.

Поступила в редакцию 31.10.2016