

УДК 537.32

Анатычук Л.И., академик Национальной академии наук Украины,
Лусте О.Я., доктор физико-математических наук
Кобылянский Р.Р., кандидат физико-математических наук

Институт термоэлектричества НАН и МОН Украины,
ул. Науки, 1, Черновцы, 58029, Украина; e-mail: anatyach@gmail.com
Черновицкий национальный университет им. Ю. Федьковича,
ул. Коцюбинского, 2, Черновцы, 58012, Украина; e-mail: anatyach@gmail.com

**ИНФОРМАЦИОННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕНСОРОВ ТЕМПЕРАТУРЫ И ТЕПЛООВОГО
ПОТОКА МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ**

В работе проанализированы сенсоры температуры и теплового потока как источники измерительной информации. Используются понятия информативности сенсоров и измерительных устройств. Определена информативность микрокалориметров, датчиков температуры и теплового потока.

Ключевые слова: информационно-энергетическая теория, информативность, энтропийное значение погрешности, энергетический порог чувствительности измерительных приборов, термоэлектрический сенсор температуры и теплового потока.

Введение

В работах [1 – 5] сформулированы общие методы описания измерительных устройств как источников информации и введен параметр качества измерительного устройства – информативность $\Omega(t) = dI(t)/dt$, которая показывает, сколько измерительной информации $I(t)$ можно получить от прибора за единицу времени. Для произвольного измерительного прибора с распределением на шкале измерительного устройства энтропийной погрешности Δ (W), усредненной за время измерений τ , выражение для расчетов информативности имеет вид [5]:

$$\Omega = \tau^{-1} \left\{ \log \int \frac{dx}{2\Delta(x)} \right\}. \quad (1)$$

Среди сенсоров микрокалориметров, датчиков температуры и теплового потока медицинского назначения все большее внимание исследователей и разработчиков привлекают высоковольтные многоэлементные термоэлектрические батареи (ТЭБ) с плотностью интеграции элементов 10^4 см^{-2} [1, 2]. Они нашли применение как миниатюрные источники электричества с повышенным выходным напряжением милливаттного и микроваттного диапазонов мощности, а также как миниатюрные охладители со сниженными токами питания ($10^{-2} - 10^{-1}$) А. В отличие от стандартных термоэлектрических модулей, которые практически не используются в измерительной технике из-за их низкой вольт-ваттной чувствительности и неудовлетворительного согласования с сопротивлением стандартной электроизмерительной

аппаратуры, многоэлементные ТЭБ обладают значительными возможностями использования в микрокалориметрах, тепломерах и термометрах медицинского назначения.

Эти возможности нуждаются в изучении с позиций современной информационно-энергетической теории измерительных приборов [3].

В работе [5] этот подход применен для определения информативности вихревых термоэлементов и измерительных приборов на их основе, а многоэлементные ТЭБ рассматривались в работах [6 – 14].

Целью этой работы является дальнейшая разработка физических основ теории информативности миниатюрных многоэлементных сенсоров на основе информационно-энергетической теории измерительных приборов, а именно: выбор физической модели, расчеты зависимости информативности от количества элементов ТЭБ и оптимизация ТЭБ по количеству элементов.

Основы теории информативности измерительных приборов

Исчерпывающей характеристикой процесса измерения может служить лишь полное описание закона распределения вероятности погрешности измерения, как случайной величины. Более кратким описанием является величина предельной погрешности по заданному значению доверительной вероятности. Клод Шеннон в теории информации предложил интегральную характеристику закона распределения погрешности. Она является совокупной функцией всех точек кривой закона распределения, то есть его энтропией. Энтропия закона распределения погрешности, так называемая условная энтропия $H(X/X_n)$, которая может быть вычислена по закону распределения вероятности погрешности вокруг полученного показания прибора X_n , будет являться краткой характеристикой дезинформации или мерой неопределенности, которая останется после получения X_n . Для данного распределения вероятности различных значений погрешностей, возникающих при этих измерениях, значение безусловной энтропии $H(X)$ может характеризовать априорно-исходную неопределенность измеряемой величины, которую мы имеем к моменту измерения, и определяющуюся по закону распределения вероятности различных значений этой величины. В соответствии с этими двумя положениями количество информации $q = H(X) - H(X/X_n)$.

Таким образом, исключительным преимуществом энтропии как единой числовой средневзвешенной характеристики закона распределения является ее простая и однозначная связь с количеством информации или дезинформации, имеющимся в исследуемой физической величине, или вносящейся шумами.

В теории вероятности пользуются числовыми характеристиками разных законов распределения погрешностей. При статистическом описании случайной величины математические операции с ней зачастую весьма громоздки, поэтому для характеристики распределения часто используют числовые коэффициенты, которые называются моментами. Это связано с тем, что среди числовых характеристик случайных величин нас интересует положение этой величины на числовой шкале, то есть систематическая составляющая величины (среднее значение), поскольку она определяет размещение на данной шкале той области, в которой группируются значения случайной величины. Такое значение называется ее первым моментом или математическим ожиданием. Его обозначают как $M[X]$. Момент определяется как сумма произведений всех возможных значений нашей дискретной случайной

величины на вероятность этих значений: $M[x] = \sum_{i=1}^n x_i P_i$, где P_i – вероятность значения x_i . В

случае непрерывных величин это математическое ожидание: $M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx$, где $p(x)$ –

плотность распределения вероятности величины x . Имея рассчитанное математическое ожидание, можно найти случайные отклонения для каждого результата измерения: $\Delta i = x_i - M[x]$.

Исходя из этого, можно изъять из массива данных систематическую составляющую, поэтому различают начальные моменты (без исключения систематической составляющей) и центральные моменты (с учетом исключенной систематической составляющей).

Для теории информации Шеннон предложил другую систему критериев, которые описывают законы распределения. Для характеристики систематических составляющих в этом случае, как и ранее, используют первый начальный момент, то есть значение математического ожидания. Для характеристики центрированной случайной составляющей вместо всех моментов более высоких порядков используют момент, который записывается так:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \ln p(x) dx - \text{энтропия.} \quad (2)$$

Таким образом, энтропия является функционалом закона распределения случайных величин и учитывает особенности этого закона.

Шеннон показал, что дезинформирующее действие случайной погрешности, вызванное шумом или помехой при передаче сигнала, определяется энтропией шума как случайной величины. Он доказал, что если вероятности значений шума не зависят от передаваемого сигнала, то независимо от статистики сигнала шума можно приписать определенную величину H , которая характеризует его дезинформирующее действие.

Доказательству этого положения посвящена теорема, утверждающая, что количество информации q , получаемое от передаваемого сигнала H , уменьшается на величину энтропии шума:

$$q = H(x) - H(\Delta). \quad (3)$$

Итак, количество информации меньше энтропии передаваемого сигнала на величину энтропии шума. Если кроме канала передачи информации, который мы рассмотрели, имеется параллельный канал, то для компенсации погрешностей, возникающих от шума с величиной $H(\Delta)$, по этому дополнительному каналу необходимо передать дополнительное количество информации, величина которой Δq должны быть не меньше $H(\Delta)$. Эту дополнительную информацию можно так закодировать, что ею можно скорректировать все погрешности, вызванные шумами, за исключением их незначительной части.

Применение основных положений теории информации для характеристики процесса измерения

Точность измерений характеризуется числовым значением полученных при измерении или возможных значений погрешностей и для их описания используют понятие абсолютной и приведенной погрешностей. Если измерительное устройство имеет диапазон измерения от x_1 до x_2 , то измеряемая величина имеет значения которые находятся в этом интервале. Таким

прибором можно измерять значения величин с погрешностью $\pm \Delta$. При этом полагают, что эта погрешность не зависит от текущего значения x нашей измеряемой величины. Если получено значение x_n (в области от x_1 до x_2), то можно считать, что это показание – это значение нашей величины $\pm \Delta$, а приведенная погрешность: $\nu = \pm \frac{\Delta}{x_2 - x_1}$.

Эти действия с точки зрения теории информации имеют другой смысл. В этом случае вероятность получения показаний меньших x_1 и больших x_2 равняется нулю, а вероятность получения показаний в интервале от x_1 до x_2 равняется единице. Если при этом считать, что плотность вероятности распределения разных значений измерительной величины вдоль всей шкалы прибора одинаковая, то наше знание об измеряемой величине можно представить графиком, изображенным на рис. 1.

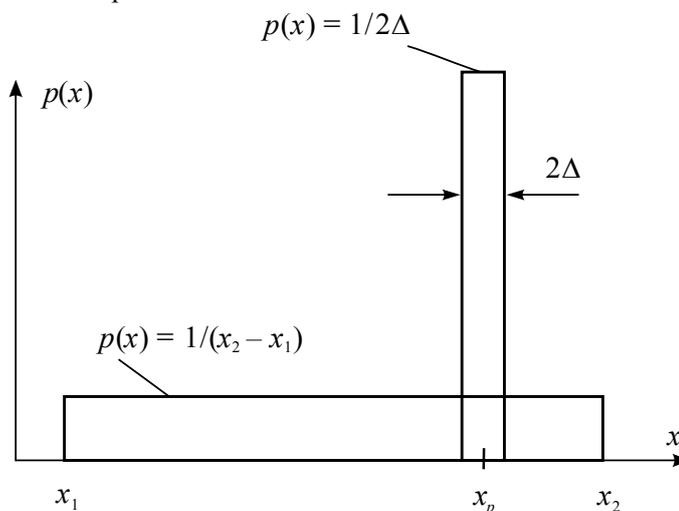


Рис. 1. Сужение интервала погрешности в процессе измерения.

Поскольку полная вероятность получить отчет в пределах от x_1 до x_2 равняется 1, то площадь под нашей кривой условно равна единице (условие нормирования). При равномерном распределении вероятности это приводит к тому, что $p(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}$.

После измерений мы получаем x_n . Однако вследствие погрешности прибора мы можем представить результат исключительно в виде $x_n \pm \Delta$. Тогда наше значение исследуемой величины находится в пределах $x_n + \Delta$, $x_n - \Delta$, то есть в полосе шириной 2Δ .

Вывод: с точки зрения теории информации результат наших измерений состоит лишь в том, что к моменту начала измерений область неопределенности простиралась от x_2 до x_1 и характеризовалась плотностью вероятности $p(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}$, а после измерений неопределенность сократилась до величины 2Δ по оси x и характеризовалась значительно большей плотностью вероятности, равной $\frac{1}{2\Delta}$. Следовательно, получение информации об интересующей нас величине состоит в уменьшении неопределенности ее значения. Количество информации тогда будет составлять:

$$q = H(x) - H(x/x_n). \tag{4}$$

Поскольку в приведенном примере мы имеем дело с равномерным распределением вероятности, то начальное значение H можно записать в виде:

$$H(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log p(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x_2 - x_1} \log \frac{1}{x_2 - x_1} dx = \log(x_2 - x_1).$$

А часть H , оставшаяся после получения отсчета равна:

$$H(x/x_n) = - \int_{x_n - \Delta}^{x_n + \Delta} \frac{1}{2\Delta} \log \frac{1}{2\Delta} dx = \log 2\Delta.$$

Тогда, $q = H(x) - H(x/x_n) = \log(x_2 - x_1) - \log 2\Delta = \log \frac{x_2 - x_1}{2\Delta} = -\log \frac{2\Delta}{x_2 - x_1}.$ (5)

Замена операции деления на операцию вычитания из исходной величины ее части, оставшейся после измерения неопределенностей в виде определенных значений H , и является основой подхода в информационной теории измерений.

Измерение как сужение интервала неопределенности

При измерении физической величины в натуральных шкалах, как было показано ранее, весь диапазон возможных значений реперных точек разбивался на ряд интервалов. При этом неопределенность нашей величины по отношению к измеряемой определяется тем, что мы не знаем, в каком из интервалов находится наша величина.

В результате измерения мы установили интервал между реперными точками, где находится наша величина, то есть мы сузили неопределенность от количества интервалов до ширины одного интервала. Следовательно, в отличие от метрологии, с точки зрения информационной теории результат измерения состоит в выборе данного интервала из числа возможных значений интервалов. Таким образом, если вероятность – это попадание измеренной величины в любой из интервалов, равных между собой, то неопределенность нашей начальной ситуации равняется $H(x) = \log n$, где n – число интервалов. А в результате измерений количество информации, которая устраняет эту неопределенность, $q = \log n$.

Отсюда вытекает, что измерение представляет собой сравнение измеренной величины с тем или другим образом построенной шкалой возможных значений измеренной величины, а результат измерения состоит в выборе одного интервала из всего множества интервалов всей шкалы.

Понятие энтропийного значения погрешности

Законы распределения вероятностей в различных измерительных приборах существенно различны. Это разнообразие и создает основные трудности определения эффективного значения погрешности, которое однозначно характеризовало абсолютную величину интервала неопределенности, т.е. неопределенность, оставшуюся после получения показания прибора. Рассмотрим эту проблему на основании законов распределения погрешности для равномерного и неравномерного распределений.

В случае распределения вероятности погрешности близкого к равномерному при многократном повторении измерений величины X_n , погрешность большая чем $+\Delta$ и меньшая $-\Delta$ практически не встречаются, а внутри этого интервала (2Δ) все значения погрешности

равновероятны. В этом случае абсолютная величина интервала неопределенности, остающаяся после процесса измерения, определяется и без теории информации. Интервал неопределенности равный 2Δ и указание на погрешность $\pm\Delta$ характеризует погрешность прибора. В большинстве приборов закон распределения вероятности выражается кривыми (б, в, рис. 2); для (б) по мере возрастания величины погрешности указать интервалы неопределенности практически невозможно. Подобное пологое распределение можно охарактеризовать средним значением погрешности, но значение максимальной погрешности указать невозможно, поскольку в (б) могут встречаться сколь угодно большие погрешности.

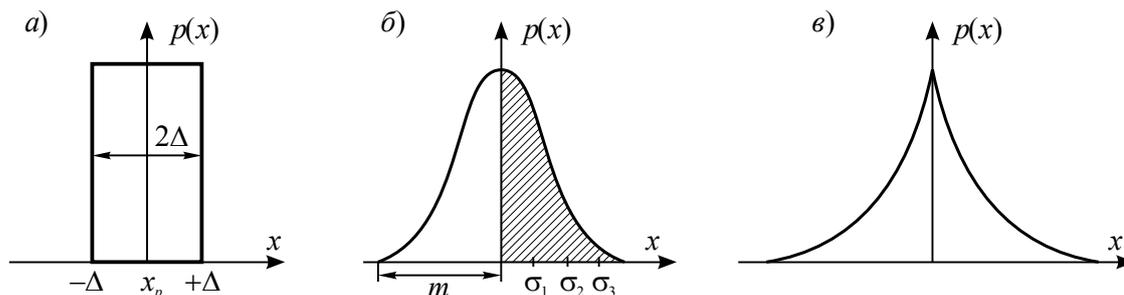


Рис.2. Энтропийная погрешность для различных законов распределения.

Если среднеквадратичная погрешность δ при нормальном распределении $\delta = 0,5\%$, то в среднем на каждые три измерения будет приходиться погрешность 0.5% . Однако на каждое 22 испытание нам будет попадаться погрешность величиной 2δ , то есть 1% , а один раз на 370 и 15000 испытаний будет встречаться погрешность равная 3 и 4δ (1.5% и 2%). Чтобы в этом случае определить интервал неопределенности, необходимо приписать «ширине» погрешности некоторое Δ . Эта условная величина может быть равна средневероятной погрешности $\Delta = 0.6745\sigma$ или $2/3\sigma$. В этом случае, если закон распределения погрешности действительно является нормальным, половина всех погрешностей, которые будут нам встречаться, будет меньше этого значения, а другую половину будут составлять погрешности, превышающие $2/3\sigma$. В этом случае указывают, что определяющая погрешность выбрана с доверительной вероятностью 0.5 , а это свидетельствует, что любая погрешность, которая встречалась, должны быть меньше выбранной при нормальном законе распределения. Если ширину полосы изменить и ее выбрать равной σ , 2σ или 3σ , то при нормальном законе распределения это будет отвечать доверительной вероятности 0.67 , 0.95 или 0.997 . Без теории информации выбрать обоснованную ширину достоверно различного интервала измерений нельзя.

Математическое определение понятия энтропийного значения погрешности

Решение этой проблемы предложено Шенноном: дезинформирующее действие, помехи или погрешности зависят от ее закона распределения и в связи с этим может быть однозначно указано путем определения условий $H\left(\frac{x}{x_n}\right)$ этого закона распределения. Однако, исследуя дезинформирующее действие помех с различными законами распределения вероятности их амплитуд, он заметил, что однозначного соответствия между мощностью помехи и вносимой ею дезинформацией (значением ее энтропии) не существует, поскольку при одной и той же мощности помехи вносимая ею дезинформация различна и зависит от ее закона распределения.

При определенном среднеквадратичном значении (равноценно полной мощности помехи) наибольшим дезинформирующим действием (H)обладают помехи с нормальным законом распределения вероятности. При всяком другом законе распределения вероятности энтропия помехи при том же самом среднеквадратичном значении всегда меньше. Таким образом, при произвольном законе распределения вероятности дезинформирующее действие помехи определяется не всей ее мощностью, а только некоторой ее частью, которую Шеннон назвал энтропийной мощностью помехи. При исследовании информационной способности разных приборов стараются делать ряд упрощений, поскольку все время оперировать полной информацией о законах распределения очень сложно. В некоторых случаях удобнее оперировать не энтропийной мощностью погрешности, а энтропийным значением самой погрешности, поскольку эта величина тоже определяет дезинформирующее действие. Для осознания понятия энтропийного значения погрешности рассмотрим энтропию для примера равномерного и нормального законов распределений вероятности этих погрешностей.

$$H\left(\frac{x}{x_n}\right) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) dx. \quad (6)$$

Плотность вероятности $p(x)$ для равномерного закона можно записать так:

$$p(x) = 0 \text{ для } x < -\Delta, x > +\Delta,$$
$$p(x) = \frac{1}{2\Delta} \text{ для } x > -\Delta, x < +\Delta, (|x| < \Delta),$$
$$H\left(\frac{x}{x_n}\right) = - \int_{-\Delta}^{+\Delta} \frac{1}{2\Delta} \ln \frac{1}{2\Delta} dx = \ln 2\Delta.$$

Для равномерного закона распределения видно, что энтропия погрешности равняется логарифму интервала неопределенности, или можно сказать, что значение интервала неопределенности есть величина, которая находится под знаком логарифма в выражении для H .

Согласно теории случайных погрешностей, величина интервала неопределенности может быть выражена через значение среднеквадратичной погрешности. Для равномерного закона распределения, дисперсия, то есть $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$, а в пределах равномерного распределения:

$$\int_{-\Delta}^{+\Delta} x^2 \frac{1}{2\Delta} dx = \frac{\Delta^2}{3}.$$

Для равномерного закона распределения $\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$, а $\Delta = \sqrt{3} \cdot \sigma$, а тогда энтропия

$$H\left(\frac{x}{x_n}\right) = \ln(2\sqrt{3}\sigma).$$

Если погрешность измерительного устройства распределена вокруг x_n по нормальному закону, для которого

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

то в этом случае

$$H\left(\frac{x}{x_n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \left(\ln \sqrt{2\pi}\sigma + \frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx = \ln \sqrt{2\pi}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx.$$

Поскольку $\int_0^{\infty} p(x) dx = 1$, а по определению понятия дисперсии второй интеграл равен σ^2 ,

то можно записать $H\left(\frac{x}{x_n}\right) = \ln \sqrt{2\pi}\sigma + \ln \sqrt{e} = \ln(\sqrt{2\pi e}\sigma)$.

Это выражение от полученного раньше для распределения, резко ограниченного шириной 2Δ , отличается только выражением, находящимся под логарифмом. Отсюда следует, что неограниченное распределение в виде пологой кривой (б) приводит к получению точно такого же количества информации, как и резко ограниченное равномерное распределение (а). В этом случае $2\Delta = (2\pi e)^{1/2}\sigma$ или иными словами, эффективный интервал неопределенности, порожденный пологой кривой распределения, полностью эквивалентен по количеству вносимой дезинформирующей неопределенности интервалу, порожденному равномерной полосой погрешностей с шириной $2\Delta = (2\pi e)^{1/2}\sigma$. Если прибор с равномерным распределением (а) с информационной точки зрения исчерпывающе характеризуется погрешностью $\pm\Delta$, равной $\Delta = d/2$, то прибор с распределением погрешностей по нормальному закону (б) точно в такой же мере характеризуется эффективным значением погрешности:

$$\Delta = \sqrt{\frac{\pi e}{2}} \sigma. \quad (7)$$

Изложенный подход к определению эффективного значения погрешности (в энтропийном содержании) можно применять при других интегральных законах распределения погрешности, подобно тому, как понятие действующего значения электрического тока мы используем при любой форме кривой этого тока.

Форма сигнала характеризуется коэффициентом формы K_ϕ , равным отношению действующего значения к среднему выпрямленному значению переменного тока, (формфактор).

Итак, энтропийным значением погрешности считается значение погрешности с равномерным законом распределения, которая производит такое же дезинформирующее действие, как и погрешность с данным законом распределения.

Это определение сводится к следующему.

Если погрешность с нормальным законом распределения имеет условную энтропию, то эффективный интервал неопределенности, независимо от закона распределения, будет равен:

$$2\Delta = \exp\left(H\left(\frac{x}{x_n}\right)\right), \quad (8)$$

а энтропийное значение погрешности, которое определяется как половина от интервала неопределенности, будет

$$\Delta = \pm \frac{1}{2} \exp H\left(\frac{x}{x_n}\right). \quad (9)$$

Таким образом, в результате введения понятия энтропийного значения погрешности мы получили возможность любую погрешность с произвольным законом распределения всегда заменить погрешностью с равномерным распределением с резко ограниченными краями и с тем же значением энтропии. Это позволит заменить реальную полосу погрешности какого-либо

распределения с плавным убыванием эквивалентной ей в информативном содержании резко ограниченной полосой с равномерным распределением вероятности.

Негэнтропийный принцип информации Бриллюэна

Бриллюэн в 1951-1956 гг. опубликовал ряд работ, которые связывали теорию информации с термодинамикой. Для сохранения информации мы должны использовать упорядоченные физические системы (штрихи, электрические импульсы, намагниченные участки и т.д.). Эти носители информации имеют одно общее свойство: они постепенно теряют сохраненную в них информацию, вследствие взаимодиффузии материалов, размагничивания и т.п. Следовательно, информация, внесенная в систему, всегда с определенной скоростью убывает, в крайнем случае, остается постоянной, но никогда не возрастает.

Когда в систему вносится упорядочение, на это затрачивается энергия, поэтому упорядоченная система имеет определенный запас энергии и может выполнять работу. Кроме того, вследствие недостаточной изоляции системы от окружающего пространства, этот запас энергии неизбежно теряется. С точки зрения термодинамики возможность выполнения системой работы характеризуется ее отрицательной энтропией (негэнтропией). Согласно 2-му началу термодинамики, прирост энтропии в изолированной системе может быть положительным, она может только возрастать и никогда не убывает. Соответственно негэнтропия может только убывать, она убывает по мере выполнения работы.

Свойства информации, как ее понимают в теории информации, и свойства термодинамической энтропии являются тождественными. Тождественными являются и формулы, описывающие эти два понятия.

Формула Больцмана-Планка:

$$S = k \ln P .$$

Формула теории информации:

$$q = K \ln N ,$$

где S – энтропия; P – число элементарных состояний системы; k – постоянная Больцмана; q – информация; N – число возможных состояний системы; K – коэффициент, зависящий от выбора системы единиц. Если $K = k$, то информация будет формально определяться уравнением Больцмана-Планка.

Энтропия связана с вероятностью, и можно искусственно создать замкнутую (изолированную) систему с очень маловероятной структурой. Если эту систему предоставить самой себе, то она будет эволюционировать к более вероятной структуре. На основе этого делаем вывод, что вероятность имеет естественную тенденцию к росту, как и энтропия.

Энтропия может интерпретироваться двояко: как мера беспорядка в физической системе; или как мера недостатка информации о структуре системы. Основной вывод Бриллюэна заключается в том, что информация может быть получена только в результате затрат энергии, поэтому всякий опыт, который дает нам информацию о физической системе, или всякие физические измерения параметров системы могут быть выполнены в результате увеличения энтропии системы или ее окружения. Причем среднее увеличение энтропии, согласно 2-му началу термодинамики, всегда больше чем получаемой информации.

Исходная предельная определенность измеренной величины

Пытаясь точнее определить значение измеряемой величины, мы на каком-то этапе столкнемся с невозможностью ее дальнейшего уточнения. Наиболее ярко это наблюдается при измерении дискретных величин. Для большинства физических величин это ограничение не слишком очевидно, поскольку большинство физических величин воспринимается не как дискретные, а как непрерывные (аналоговые). Однако непрерывность измеренных физических величин является некоторой абстракцией или приближением к действительным, естественным явлениям. Таким образом, физически возможная степень определенности конечна и определяется или собственной дискретностью измеряемой величины, или флуктуациями, которые обусловлены принципиальной дискретностью энергии и вещества. Эта граница определенности в микромире известна как соотношение неопределенностей Гейзенберга. Энергия термодинамических флуктуаций как молекулярных явлений, так и явлений электрического тока в замкнутой цепи, определяется уравнением Найквиста. Согласно этому уравнению средняя мощность термодинамической флуктуации: $\bar{P}_u = 4 \cdot k \cdot \theta \cdot \Delta f$, где k – постоянная Больцмана; θ – температура; Δf – полоса частот, в которой рассматриваются эти флуктуации. Если за время измерения некоторой величины будет сделано n отсчетов, то мощность термодинамических флуктуаций усредненного результата будет убывать обратно пропорционально числу результатов, которые усредняются, т.е. $\bar{P}_u = \frac{4 \cdot k \cdot \theta \cdot \Delta f}{n}$.

Однако такое снижение среднего значения мощности флуктуаций будет происходить до тех пор, пока отсчеты, которые усредняются, будут независимыми друг от друга; согласно теореме Котельникова число независимых отсчетов функции, имеющей предельную частоту Δf , за время t составит $n = 2 \cdot \Delta f \cdot t$.

Отсюда предельное достижимое уменьшение термодинамических флуктуаций за счет увеличения числа отсчетов равно:

$$\bar{P}_u = \frac{2k\theta}{t}. \quad (10)$$

Для электроизмерительного прибора, имеющего входное сопротивление r при приложении внешнего напряжения, действующее значение шумового напряжения можно определить как:

$$\sqrt{U_u^2} = \sqrt{\bar{P}_u r} = \sqrt{\frac{2k\theta r}{t}}. \quad (11)$$

Среднеквадратичная погрешность: $\delta_u = \frac{\sqrt{U_u^2}}{E} = \sqrt{\frac{2k\theta}{Pt}}$, где P – мощность; t – время.

Распределение вероятности теплового шума подчиняется закону Гаусса (нормальный закон распределения), поэтому энтропийное значение погрешности, которое вносится этими значениями, будет определяться K для нормального закона распределения ($K = 2,07$). То есть энтропийное значение погрешности, обусловленной флуктуациями, равно:

$$\gamma_u = 2,07 \delta_u = \sqrt{\frac{\pi \cdot e}{2} \cdot \frac{2k\theta}{Pt}}. \quad (12)$$

Таким образом, если измерение выполнять при абсолютной температуре θ , то даже если измерительное устройство не вносит потерь, погрешность измерения непрерывной величины

не может быть меньше $\gamma_{ш}$, определяемого соотношением энергии шума $W_{ш}$, которое зависит от температуры, и энергии P_t , потребляемой прибором от объекта измерений. Соотношение (12) для минимальной возможной погрешности $\gamma_{ш}$ получено лишь на основе того, что шумы подчинены нормальному закону распределения и исходя из законов термодинамики. Поэтому это соотношение справедливо для других измерительных устройств. Смысл этого соотношения заключается в том, что входная определенность (негэнтропия) любой физической величины при определенной $T \neq 0$ конечна и ограничена найденной величиной погрешности $\gamma_{ш}$.

Энергетический порог чувствительности и логарифмический показатель относительной добротности измерительных устройств

Порог чувствительности измерительного устройства определяется как такое значение измеряемой величины $x = \Delta$, при котором погрешность измерений $\gamma = 1$ или 100 %, поэтому даже в идеальном приборе, в котором путем конструктивного усовершенствования потери информации сведены к нулю, а потеря точности $\kappa = \frac{\gamma}{\gamma_{ш}} = 1$, будет оставаться порог чувствительности, определяемый погрешностью, обусловленной шумом.

Поскольку при нормальной температуре $T = 273 \text{ К}$ $W_{ш} = 3,5 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$, то при энергетическом обмене между измерительным устройством и объектом измерения, равном этой величине, или меньшим ее, измерения невозможны. Итак, эта величина энергии является тем квантом энергии обмена между прибором и объектом, который определяет цену получения результата измерения. Это понятие принадлежит Бриллюэну. Исходя из такого понимания энергетических затрат, он ввел понятие энтропийной цены измерения, определяя ее как наименьшее возможное количество негэнтропии, необходимое при наблюдении для получения ответа на первый двоичный вопрос с вероятностью правильных и неправильных ответов 50%. Однако такое определение этого понятия является несколько упрощенным, поскольку оно основывается на принятии для априорного распределения вероятности погрешности дискретного закона. Но это предположение приводит Бриллюэна к значению энтропийной цены измерения $0,95 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/град}$, которая при температуре 293К отвечает значению энергетического порога $W_{ш} = 0,28 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$. Учитывая, что термодинамические шумы подчиняются нормальному закону распределения, естественно допускать, что такому закону подчиняются и законы распределения погрешностей, поэтому в соответствии со значением энтропийного коэффициента для нормального закона $K = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}$ с учетом теоремы Котельникова усредненная мощность флуктуации за время t равна:

$$\bar{P}_{ш} = \frac{2k\theta}{t}.$$

В это выражение входит $2k\theta$, а не $4k\theta$, как брал Бриллюэн, поэтому полученное значение энергии обмена $3,5 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$ в $\frac{\pi e}{\ln 2}$ раз больше, чем значения энергетической цены полученного Бриллюэном.

Вследствие логарифмического соотношения между информацией и энергией энтропийная и энергетическая цена каждой следующей единицы информации возрастает. Так,

если для получения одной десятичной единицы достаточен энергетический обмен в одну единицу энергии, то для получения двух единиц информации необходим обмен в сто единиц энергии, для трех – 1000 единиц энергии.

Вывод: вместо понятий «информация» и «энергия» величины измерения необходимо использовать термин «энергетический порог чувствительности данного измерительного устройства», который более точно отражает сущность этого понятия. Тогда для идеального прибора, в котором устранены все погрешности за исключением погрешности флуктуации измеряемой величины, энергетический порог чувствительности будет равен $W_{и} = 3.5 \cdot 10^{-20}$ Дж, а для реальных измерительных приборов реальный порог чувствительности будет больше идеального в соответствии с $\eta_{ен}$:

$$C = \frac{W_{и}}{\eta_{ен}}.$$

Энергетический порог чувствительности

Энергетический порог чувствительности является обобщенным показателем измерительных устройств, через который можно однозначно определить такие характеристики как энергетический КПД $\eta_{ен} = \frac{W_{и}}{C}$; потерю точности $\kappa = \sqrt{\frac{C}{W_{и}}}$; потерю информации

$\Delta q = \frac{1}{2} \lg \frac{C}{W_{и}}$. С другой стороны, энергетический порог чувствительности является

совокупной характеристикой точности, чувствительности, потребления и быстродействия измерительных устройств, поскольку его можно выразить через отдельные показатели совершенства измерительных устройств так: учитывая, что погрешность $\gamma_{и} = \sqrt{\frac{W_{и}}{Pt}}$, а потеря

точности $\kappa = \frac{\gamma}{\gamma_{и}}$, для энергетического КПД $\eta_{ен} = \frac{1}{\kappa^2}$, можем получить такое общее

выражение:

$$\eta_{ен} = \frac{1}{\kappa^2} = \frac{\gamma_{и}^2}{\gamma^2} = \frac{W_{и}}{\gamma^2 Pt} = \frac{W_{и}}{C}, C = \gamma^2 Pt. \quad (13)$$

Это выражение является обобщенной записью закона, в соответствии с которым энергетический порог чувствительности измерительного устройства есть произведение квадратичной погрешности на потребляемую мощность и на время установления погрешности измерения. В том случае, если прибор характеризуется только погрешностью нуля, энергетический порог чувствительности (C) является просто энергией, потребляемой от объекта за время измерений при равенстве измеряемой величины порогу чувствительности прибора.

Понятие энергетического порога чувствительности можно легко распространить на гальванометр или другие указатели неравновесия и выразить его через C по I или U :

$$\left. \begin{aligned} C &= \Delta_i^2 r t \\ C &= \frac{\Delta_U^2 t}{r} \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Здесь r – сопротивление цепи указателя нуля прибора. Наиболее ценным свойством этой характеристики является принципиальная ограниченность ее числовых значений, которая не может быть меньше величины мощности шума $3.5 \cdot 10^{-20}$ Дж., т.е. никакими усовершенствованиями нельзя уменьшить C . Также характерно то, что все информационные характеристики измерительных приборов, такие как энергетический КПД, потеря точности и потеря информации являются только функциями соотношения между действительными значениями энергетического порога и его предельным значением C , которое равняется $W_{ш}$. В связи с этим оказалось целесообразным ввести наглядную относительную характеристику, которая должна была быть выражена в относительных единицах или в процентах и показывала бы нам степень приближения реальных измерительных приборов к границе их абсолютного совершенства. Такой характеристикой является η . Однако, поскольку реальные приборы имеют энергетический порог чувствительности в лучшем случае $10^{-12} - 10^{-14}$ Дж, а мощность $W_{ш} = 3.5 \cdot 10^{-20}$ Дж, то $\eta = \frac{W_{ш}}{C} \approx 10^{-6} - 10^{-8}$ и его выражение в процентах не является наглядным, поскольку дает весьма малую величину. Поэтому для характеристики относительного совершенства средств измерения введен более удобный показатель – показатель энергетической добротности, который определяется так: $pC = \frac{\lg C}{\lg W_{ш}}$.

Значение логарифмического показателя будет меняться от нуля до 100 % для реальных приборов и им можно оценивать совершенство этих приборов.

Физическая модель ТЭБ

В работе использован частный случай общей модели термоэлектрического измерительного прибора, предложенной в работе [5], конкретизированный для многоэлементных сенсоров. В этой модели поток тепла W , который поступает в сенсор, превращается в его выходное напряжение U и далее – в сигнал S на выходе регистратора. Учтена специфика многоэлементных ТЭБ – шумы на контактах между элементами и теплопроводность вдоль межэлементной теплоизоляции. Учтены коэффициенты преобразований ($W \rightarrow U \rightarrow S$), шумы и быстродействие не только сенсора, но и регистрирующего прибора. Для этого сенсор и регистратор рассматриваются как апериодические звенья динамической системы.

Методика исследований. Используются методы теории динамических систем, согласно которой передаточная функция измерительного прибора $F(p)$, функции сенсора F_i и регистратора F_r имеют вид

$$F(p) = F_i(p)F_r(p), \quad (15)$$

где

$$F_i(p) = \frac{A_i}{\tau_i p + 1},$$

$$F_r(p) = \frac{K_r}{\tau_r p + 1},$$

где A_i – вольт-ваттная чувствительность ТЭБ; K_r – коэффициент усиления регистратора; τ_i, τ_r – постоянные времени сенсора и регистратора; p – аргумент преобразования Лапласа.

Результаты исследований. Для избранной выше модели многоэлементных ТЭБ с последовательным соединением n элементов с учетом (10) из общего выражения для информативности (9) получаем ее зависимость от числа элементов n :

$$\Omega(n) = \frac{\tau_r + \tau_p}{\tau_r \tau_r} \log \frac{D}{\sqrt{2\pi e} \left(A_t \left(\frac{1}{n} + \frac{r_0}{R_r} \right) u_0 + k_c n \right)}, \quad (16)$$

где D – динамический диапазон измерений; r_0 – электрическое сопротивление элемента ТЭБ; R_r – сопротивление регистратора; u_0 – абсолютная погрешность измерений электрического напряжения регистратором; k_c – общая приведенная к тепловому входу мощность шумов одного элемента ТЭБ. Характерной особенностью этой зависимости (рис. 3) есть наличие асимметричного максимума при

$$n = \sqrt{\frac{k_c}{A_t u_0}} \quad (17)$$

Наличие этого максимума обусловлено двумя конкурирующими факторами. Первый из них состоит в том, что при малом количестве элементов ТЭБ основной вклад в энтропийную погрешность $\Delta(W)$ дает регистрирующий прибор, поскольку в этом случае выходное напряжение сенсора U близко к абсолютной погрешности регистратора u_0 . Поэтому увеличение количества элементов ТЭБ повышает выходное напряжение U и приводит к росту информативности. Но при $n \sim 10^2 - 10^3$ сказывается другой фактор максимума – существенными становятся тепловые и контактные шумы элементов ТЭБ, мощность которых пропорциональна количеству элементов.

Асимметрия выявленного максимума информативности имеет практическое значение. Она указывает на значительно большие потери информативности при отклонении от оптимума в сторону меньшего количества элементов, чем при использовании ТЭБ с количеством элементов большим оптимальным.

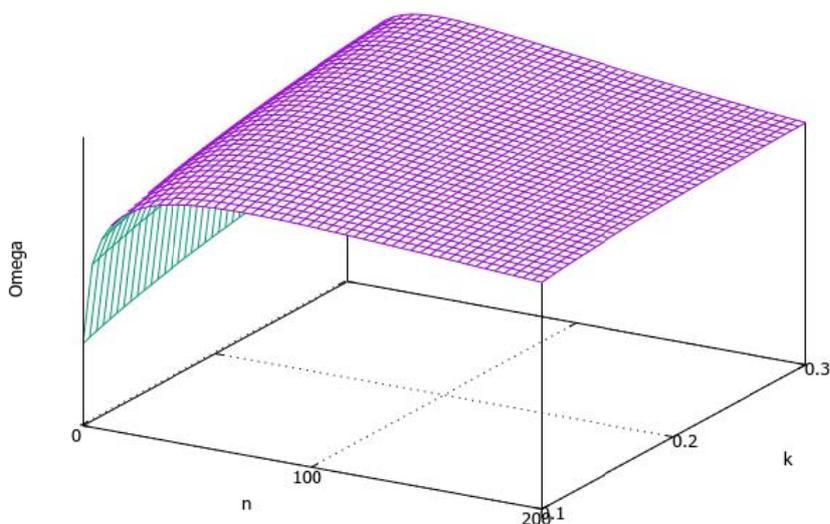


Рис.3. Зависимости информативности многоэлементных ТЭБ от количества элементов:
 $A_t = 1 \text{ В/Вт}$, $k_c = 0.1 \text{ нВт} - 0.3 \text{ нВт}$.

Выводы

1. Разработаны физические основы информационно-энергетического описания многоэлементных термоэлектрических батарей как сенсоров температуры и тепловых потоков, а именно – физическая модель ТЭБ в виде аperiodической линейной динамической системы, метод расчетов зависимости информативности от количества элементов ТЭБ, оптимизация ТЭБ по количеству элементов.

2. Определен асимметричный максимум информативности как функции количества элементов ТЭБ. Определено оптимальное количество элементов ТЭБ в зависимости от вольт-ваттной чувствительности элемента ТЭБ и мощности шумов элемента для заданного уровня разрешающей способности регистрирующего прибора.

Литература

1. Demchuk B.N. Tinythermoelectricbatteriesforthermogenerators. // J. ofThermoelectricity. - 1994. – №1 - P. 47-50.
2. Anatyчук L.I., Demchuk B.N. Miniaturethermoelectricbatteries. // J. ofThermoelectricity. – 1982. - P. 48-54.
3. Новицкий П.В. Основыинформационнойтеорииизмерительныхустройств. Л.:Энергия, 1968. - 248 с.
4. Анатычук Л.И., Лусте О.Я. Микрокалориметрия. - Л.: Выща школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981. - 160 с.
5. Luste O.J., Ontheoryofthermoelectricmicrocalorimeters. // JournalofThermoelectricity. - 2002. - V. 10, № 4. - P. 11-18.
6. Анатычук Л.И. Термоэлементы и термоэлектрические устройства: Справочник. – К.: Наукова думка, 1979. – 768 с.
7. Гищук В.С., Кобылянский Р.Р., Черкез Р.Г. Многоканальный прибор для измерения температуры и плотности тепловых потоков // Научный вестник Черновицкого университета: сборник наук. трудов. Физика. Электроника. - Т. 3, Вып. 1. - Черновцы: Черновицкий национальный университет, 2014. – с. 96-100.
8. Анатычук Л.И., Кобылянский Р.Р., Константинович И.А. Градуировки термоэлектрических датчиков теплового потока // Труды XV Международной научно-практической конференции «Современные информационные и электронные технологии» 26-30 мая 2014. - Т. 2. - Одесса, Украина.– 2014. – с. 30-31.
9. Кобылянский Р.Р., Бойчук В.В. Использование термоэлектрических тепломеров в медицинской диагностике // Научный вестник Черновицкого университета: сборник наук. трудов. Физика. Электроника.- Т. 4, Вып. 1. - Черновцы: Черновицкий национальный университет, 2015. – С. 90-96.
10. Анатычук Л.И., Иващук А.И., Кобылянский Р.Р., Постевка И.Д., Бодяка В.Ю., Гушул И.Я. Термоэлектрический прибор для измерения температуры и плотности теплового потока "АЛТЕК-10008" // Термоэлектричество.– № 1. – 2016. – С.76-84.
11. Кобылянский Р.Р. Компьютерное моделирование показов термоэлектрического датчика медицинского назначения // Термоэлектричество.– № 4. – 2016. – С.69-77.
12. Анатычук Л.И., Кобылянский Р.Р., Константинович И.А., Лиско В.В., Пуганцева Е.В., Розвер Ю.Ю., Тюменцев В.А. Стенд для градуировки термоэлектрических преобразователей теплового потока // Термоэлектричество. – № 5. – 2016. – С.71-79.

13. Анатычук Л.И., Кобылянский Р.Р., Константинович И.А., Кузь Р.В., Маник О.Н., Ницович А.В., Черкез Р.Г. Технология изготовления термоэлектрических микробатарей // Термоэлектричество. – № 6. – 2016. – С.49-54.
14. Анатычук Л.И., Юрик Е.Е., Кобылянский Р.Р., Рой И.В., Фищенко Я.В., Слободянюк Н.П., Юрик Н.Е., Дуда Б.С. Термоэлектрический прибор для диагностики воспалительных процессов и неврологических проявлений остеохондроза позвоночника человека // Термоэлектричество. – № 3. – 2017.

Поступила в редакцию 21.08.2017

L.I. Anatyshuk, *acad. National Academy of Sciences of Ukraine,*
O.J. Luste, *Doctor Phys.-math. Sciences,*
R.R. Kobylanskyi, *Candidate Phys.-math. Sciences*

Institute of Thermoelectricity of the NAS and MES of Ukraine,
1, Naukystr, Chernivtsi, 58029, Ukraine; e-mail: anatyshuk@gmail.com
Yurii Fedkovych Chernivtsi National University, 2, Kotsiubynskyi str.,
Chernivtsi, 58012, Ukraine; e-mail: anatyshuk@gmail.com

INFORMATION-ENERGY THEORY OF MEDICAL PURPOSES THERMOELECTRIC TEMPERATURE AND HEAT FLUX SENSORS

In this paper, temperature and heat flux sensors are analyzed as the source of measurement information. The concept of informativeness of sensors and measuring devices is used. The informativeness of microcalorimeters, temperature and heat flux sensors is determined. Bibl. 13, Fig. 6.

Keywords: information-energy theory, informativeness, entropy error value, energy sensitivity threshold of measuring instruments, thermoelectric temperature and heat flux sensor.

References

1. Demchuk B.N. (1994). Tiny thermoelectric batteries for thermogenerators. *J. Thermoelectricity*, 1, 47-50.
2. Anatyshuk L.I., Demchuk B.N. (1998). Miniature thermoelectric batteries. *J. Thermoelectricity*, 2, 48-54.
3. Novitskii P.V. (1968). *Osnovy informatsionnoy teorii izmeritelnykh ustroystv [The basics of information theory of measuring devices]*. Leningrad, Energiia [in Russian].
4. Anatyshuk L.I., Luste O.J. (1981). *Mikrokalorimetriya [Microcalorimetry]*. Lviv, Vyschashkola [in Russian].
5. Luste O.J. (2002). К теория термоэлектрических микрокалориметров [On theory of thermoelectric microcalorimeters]. *Termoelektrichestvo - J. Thermoelectricity*, 4, 11-18 [in Russian].

6. Anatychuk L.I. (1979). *Termoelementy i termoelektricheskiye ustroystva: spravochnik [Thermoelements and thermoelectric devices: handbook]*. Kyiv: Naukovadumka [in Russian].
7. Gischuk V.S., Kobylianskyi R.R., Cherkez R.G. (2014). Bahato kanalnyi pryklad dlia vymiriuvannia temperatury i hustyny teplovykh potokiv [Multi-channel device for temperature and heat flow density measurement]. *Naukovyi visnyk Chernivetskoho universitetu: zbirnyk naukovykh prats. Fizyka. Elektronika – Scientific Bulletin of Chernivtsi University: Collection of Scientific Papers. Physics. Electronics.* (Vol.3, issue 1, pp.96-100) [in Ukrainian].
8. Anatychuk L.I., Kobylianskyi R.R., Konstantynovich I.A. (2014). Hraduiuvannia termoelektrychnykh sensoriv teplovoho potoku [Calibration of thermoelectric heat flow sensors]. *Trudy XV Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii "Suchasni informatsiini ta elektronni tekhnologii" – Proc. of International scientific and practical conference "Modern information and electronic technologies"* (Ukraine, Odessa, May 26-30, 2014). (Vol.2, pp.30-31) [in Ukrainian].
9. Kobylianskyi R.R., Boichuk V.V. (2015). Vykorystannia termoelektrychnykh teplomiriv u medychnii diagnostytsi [Use of thermoelectric heat flow meters in medical diagnostics]. *Naukovyi visnyk Chernivetskoho universitetu: zbirnyk naukovykh prats. Fizyka. Elektronika - Scientific Bulletin of Chernivtsi University: Collection of Scientific Papers. Physics. Electronics.* (Vol. 4, issue 1, pp.90-96) [in Ukrainian].
10. Anatychuk L.I., Ivaschuk O.I., Kobylianskyi R.R., Postevka I.D., Bodiaka V.Yu., Huschul I.Ya. (2016). Termoelektrychnyi pryklad dlia vymiriuvannia temperatury i hustyny teplovoho potoku "ALTEC-10008" [Thermoelectric device for temperature and heat flux density measurement]. *Termoelektryka – J. Thermoelectricity*, 1, 76-84 [in Ukrainian].
11. Kobylianskyi R.R. (2016). Kompiuterne modeliuвання pokaziv termoelektrychnoho sensora medychnoho pryznachennia [Computer simulation of medical-purpose thermoelectric sensor readings]. *Termoelektryka – J. Thermoelectricity*, 4, 69-77 [in Ukrainian].
12. Anatychuk L.I., Kobylianskyi R.R., Konstantynovych I.A., Lysko V.V., Puhantseva O.V., Rozver Yu.Yu., Tiumentsev V.A. (2016). Stend dlia hraduiuvannia termoelektrychnykh peretvoriuvachiv teplovoho potoku [Calibration bench for thermoelectric heat flux sensors]. *Termoelektryka – J. Thermoelectricity*, 5, 71-79 [in Ukrainian].
13. Anatychuk L.I., Kobylianskyi R.R., Konstantynovych I.A., Kuz R.V., Manik O.M., Nitsovich O.V., et al. (2016). Tekhnologiya vyhotovlennia termoelektrychnykh mikrobatarei [Technology for manufacturing thermoelectric microthermopiles]. *Termoelektryka – J. Thermoelectricity*, 6, 49-54 [in Ukrainian].
14. Anatychuk L.I., Yuryk O.E., Kobylianskyi R.R., Roi I.V., Fishchenko Ya.V., Slobodianiuk N.P., et al. (2017). Termoelektrychnyi pryklad dlia diagnostyky zapalnykh protsesiv ta nevrolohichnykh proiaviv osteokhondrozu khrebta liudyny [Thermoelectric device for the diagnosis of inflammatory processes and neurological manifestations of vertebral osteochondrosis]. *Termoelektryka – J. Thermoelectricity*, 3, [in Ukrainian].

Submitted 21.08.2017