

## Особливості дослідження деформаційної поведінки матеріалів при випробуваннях на згин

Д. Г. Вербило<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Інститут проблем матеріалознавства ім. І. М. Францевича НАН України

Україна, 03142, Київ, вул. Кржижановського, 3

<sup>2</sup>ВП НУБІП України “Ніжинський агротехнічний інститут”

Україна, 16600, Чернігівська обл., Ніжин, вул. Шевченка, 10

E-mail: ver@ipms.kiev.ua

*Досліджено вдосконалення експериментальних методик визначення характеристик пружності, зокрема співвідношення переміщення внутрішніх роликів відносно зовнішніх і прогину між внутрішніми роликками, а також точне визначення абсолютної деформації випробувальної машини залежно від навантаження. Встановлено, що прогин центральної частини зразка відносно внутрішніх роликів за чотириточковим згином складає 3/8 від переміщення внутрішніх роликів відносно зовнішніх. Вдосконалена методика визначення прогинів дозволяє отримати діаграми деформування зразків без використання прогиновимірювача, а також вимірювати модуль пружності.*

**Ключові слова:** згин, напруження, деформація, прогин, осьовий момент інерції, прогиновимірювач.

### Вступ

Застосування випробувань методом згину обумовлено значною поширеністю цієї схеми навантаження в реальних умовах експлуатації та більшою її м'якістю у порівнянні з розтягом. Зазначене дає можливість оцінювати властивості матеріалів, які крихко руйнуються у ході розтягу. Випробування методом згину зручні для оцінки температур переходу з крихкого стану в пластичний (наприклад, у холодноламких ОЦК металів і інтерметалідів).

Експериментально триточковий згин реалізувати набагато простіше, тому він і знайшов найбільше поширення. Слід враховувати, що чотириточковий, або “чистий згин”, у багатьох випадках забезпечує більш надійні результати, оскільки тут максимальний згинальний момент виникає на певній ділянці довжини зразка, а не в одному перерізі, як в процесі триточкового згину.

Під дією згину в зразках створюється неоднорідний напружений стан, який залежить від геометрії зразка та способу навантаження.

У процесі “чистого згину” вузьких зразків з прямокутним поперечним перерізом напружений стан у кожній точці можна вважати лінійним. У широких зразках (з відношенням ширини до висоти перерізу більше трьох) за обома схемами згину створюється двоосьовий напружений стан завдяки відсутності поперечної деформації.

У багатьох випадках до деталей, елементів конструкцій і споруд висуваються вимоги не тільки до міцності, а й до жорсткості, тобто щоб їх пружні деформації під дією навантаження були щонайменшими (внаслідок великого прогину валів порушується правильність зчеплення зубчастих коліс або виникають кромкові навантаження в підшипниках ковзання та ін.) [1, 2].

Точне вимірювання прогинів як за триточковим, так і за чотириточковим згином являється непростою задачею, особливо за наявності кліматичних камер [3—6]. Да і за кімнатної температури випробувань далеко не всі випробувальні машини укомплектовані прогиновимірювачами. Додатковою проблемою в ході випробувань на чотириточковий згин без прогиновимірювача є те, що шток випробувальної машини з'єднаний з внутрішніми роликками і переміщення штока напряму не дає прогин зразка.

Ще однією проблемою випробувань як за триточковим, так і за чотириточковим згином є те, що відношення абсолютної деформації випробувальної машини до навантаження у даний момент часу, тобто податливість машини, не являється величиною сталою і її врахування потребує суттєвих зусиль. Тобто проблематика визначення пружних характеристик, зокрема вимірювання прогинів, потребує уточнення.

Метою даної роботи є вдосконалення експериментальних методик визначення характеристик пружності для матеріалів, деформаційна поведінка яких відповідає припущенням лінійної теорії пружності, зокрема визначення співвідношення переміщення внутрішніх роликків відносно зовнішніх і прогину між внутрішніми роликками, а також точне визначення абсолютної деформації випробувальної машини залежно від навантаження.

### Теоретична частина

Визначення співвідношення переміщення внутрішніх роликків відносно зовнішніх  $y_1^{\max}$  і прогину між внутрішніми роликками  $f$  можливо за відсутності прогиновимірювача у випробувальній машині. Схема випробувань на чотириточковий згин показана на рис. 1.

Вивчення деформацій балки зводиться до знаходження рівняння зігнутої осі балки  $y = f(x)$ . Для того щоб визначити

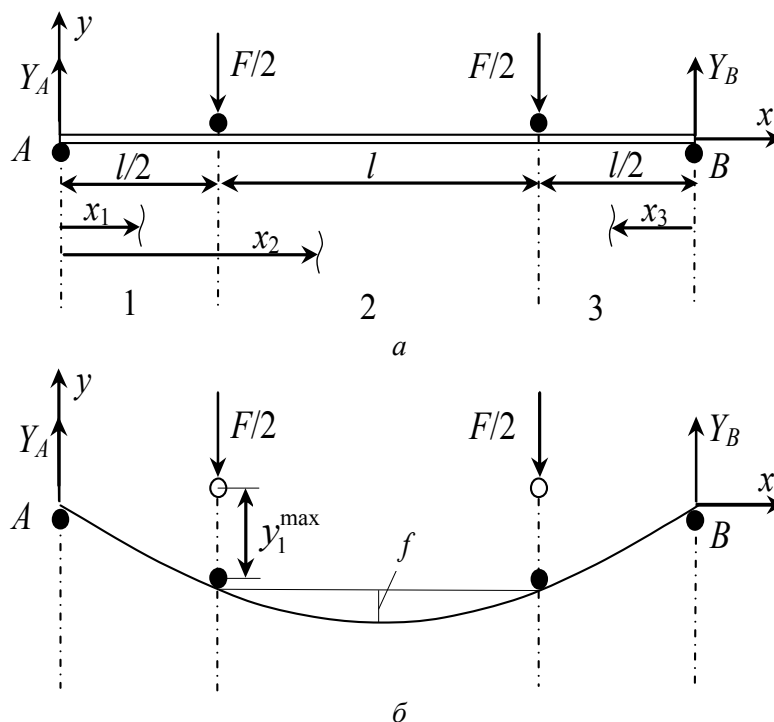


Рис. 1. Схема випробувань на чотириточковий згин: вихідний (а) та деформований стани (б).

функцію  $y = f(x)$ , необхідно встановити залежність деформацій балки від зовнішніх сил, розмірів і матеріалу балки.

Наближене диференціальне рівняння зігнутої осі балки [2] має вигляд

$$\pm \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \text{ або } \pm EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x). \quad (1)$$

Після першого інтегрування цього виразу отримаємо рівняння для кутів повороту  $\theta = dy/dx$ , а після другого — рівняння прогинів  $y = f(x)$ . Сталі інтегрування  $C$  і  $D$  визначаються з граничних умов.

Опорні реакції балки (рис. 1) дорівнюють:  $X_A = 0$ ;  $Y_A = F/2$ ;  $Y_B = F/2$ . Запишемо відповідно до (1) диференціальне рівняння для першої ділянки

$$EIy_1'' = M_1 = Y_A x_1 = \frac{F}{2} x_1. \quad (2)$$

Після інтегрувань отримаємо

$$EIy_1' = \frac{F}{2} \frac{x_1^2}{2} + C_1 \Rightarrow EIy_1 = \frac{F x_1^3}{12} + C_1 x_1 + D_1. \quad (3)$$

Для  $x = 0$  прогин  $y = 0$ , з чого отримуємо  $D_1 = 0$ . Для другої ділянки

$$EIy_2'' = M_2 = Y_A x_2 - \frac{F}{2} \left( x_2 - \frac{l}{2} \right) = \frac{F}{2} x_2 - \frac{F}{2} \left( x_2 - \frac{l}{2} \right). \quad (4)$$

Після інтегрувань отримаємо

$$\begin{aligned} EIy_2' &= \frac{F}{4} x_2^2 - \frac{F}{4} (x_2 - l/2)^2 + C_2 \Rightarrow \\ EIy_2 &= \frac{F}{12} x_2^3 - \frac{F}{12} (x_2 - l/2)^3 + C_2 x_2 + D_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Для третьої ділянки

$$EIy_3'' = M_3 = -Y_B x_3 = -\frac{F}{2} x_3. \quad (6)$$

Після інтегрувань отримаємо

$$EIy_3' = -\frac{F}{2} \frac{x_3^2}{2} + C_3 \Rightarrow EIy_3 = -\frac{F x_3^3}{12} + C_3 x_3 + D_3. \quad (7)$$

Для  $x_3 = 0$  (т. В) прогин  $y = 0$ , з чого слідує, що  $D_3 = 0$ . Для  $x_1 = x_2 = l/2$  кут повороту буде однаковий і для першої і для другої ділянки. Тоді з формул (3) та (5) для прогинів отримаємо  $C_1 = C_2$ . Аналогічно можна показати, що  $C_2 = C_3$ .

Для  $x_1 = x_2 = l/2$  прогин також буде однаковий і для першої і для другої ділянки. Тоді з формул (3) та (5) для прогинів слідує  $D_1 = D_2 = 0$ . Кут повороту буде нульовий посередині балки, коли  $x_2 = l$ . Тоді з рівняння (5) знайдемо  $C_2$ :

$$0 = \frac{F}{4} l^2 - \frac{F}{4} (l - l/2)^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{3Fl^2}{16} = C_1. \quad (8)$$

Тепер з (3) визначимо максимальний прогин на першій ділянці для  $x_1 = l/2$ :

$$y_1^{\max} = \frac{F x_1^3}{12EI} - \frac{3Fl^2}{16} x_1 = \frac{Fl^3}{32EI} \left( \frac{1}{3} - 3 \right) = -\frac{Fl^3}{12EI}, \quad (9)$$

а із (5) — максимальний прогин на другій ділянці для  $x_2 = l$ :

$$y_2^{\max} = \frac{Fl^3}{12EI} - \frac{Fl^3}{12EI \cdot 8} - \frac{3Fl^3}{16EI} = -\frac{11Fl^3}{96EI}. \quad (10)$$

На рис. 1, б показано максимальний прогин на першій ділянці  $y_1^{\max}$ , який відповідає переміщенню внутрішніх роликів відносно зовнішніх, а також прогин  $f$  між внутрішніми роликками. З (9) та (10) знайдемо прогин між внутрішніми роликками за чотириточковим згином:

$$y_2^{\max} - y_1^{\max} = \frac{11Fl^3}{96EI} - \frac{Fl^3}{12EI} = \frac{Fl^3}{32EI}. \quad (11)$$

З (9) та (11) слідує, що, знаючи переміщення внутрішніх роликів відносно зовнішніх за ходом штоку випробувальної машини за чотириточковим згином  $y_1^{\max}$ , можемо розрахувати прогин між внутрішніми роликками:

$$f = y_2^{\max} - y_1^{\max} = \frac{3}{8} y_1^{\max}. \quad (12)$$

### Експериментальна частина

Вимірювання прогинів за триточковим згином є проблематичним навіть за наявності у випробувальній машині прогиновимірювача, тому що прогиновимірювач має обмежений хід датчика лінійних переміщень. Цей датчик часто зазнає ударних навантажень після руйнування зразків, що може призвести до виходу його з ладу. Крім того, не всі універсальні випробувальні машини укомплектовані прогиновимірювачами. Також зазначимо, що машини для випробувань на згин за підвищених та знижених температур практично не укомплектовані прогиновимірювачами.

Деформація, яка реєструється випробувальними машинами без прогиновимірювача, складається з власне деформації зразка та деформації самої машини, в яку входять деформації динамометра, комірки на згин та штока. Відношення абсолютної деформації вузлів машини до навантаження у даний момент часу у подальшому визначимо податливістю.

Сучасні комп'ютеризовані випробувальні машини дозволяють реєструвати криві навантаження—деформація в електронному вигляді. Вони у достатній кількості є в лабораторії механічних випробувань Інституту проблем матеріалознавства НАН України [7]. Це дозволяє програмними засобами точно обробляти криві деформування. Для отримання кривої деформування власне зразка потрібно від загальної кривої відняти криву податливості випробувальної машини.

Для отримання кривої податливості було випробувано за триточковим згином сталевий зразок з високим осьовим моментом інерції для мінімізації його прогину. Випробування проводили, використовуючи спеціалізовану випробувальну машину на згин CeramTest виробництва СКТБ Інституту проблем міцності НАН України [8] згідно з ДСТУ 3716-98 [9] та ДСТУ ISO 14704:2006 [10] до навантаження 2000 Н. Загальний вигляд комірки за триточковим згином (база 40 мм) машини CeramTest наведено на рис. 2. У свідоцтві про перевірку випробувальної машини CeramTest зазначено, що похибка вимірювання навантаження не більше ніж  $\pm 0,5\%$ , а похибка вимірюван-



Рис. 2. Загальний вигляд комірки за триточковим згином (база 40 мм) машини CeramTest.

ня прогину з прогиновимірювачем — не більше ніж  $\pm 1,0\%$ .

Висота зразка дорівнювала 18,8 мм, ширина — 6,7 мм, довжина — 55 мм і відстань між зовнішніми роликками — 40 мм.

Осьовий момент інерції зразка склав  $3710 \text{ мм}^4$ , а теоретичний прогин — 3,2 мкм. Незважаючи на те, що прогин цього зразка дуже маленький (1,1% від податливості машини), він був врахований в процесі визначення податливості. Крива податливості була апроксимована поліномом шостого степеня у координатах прогин—навантаження:

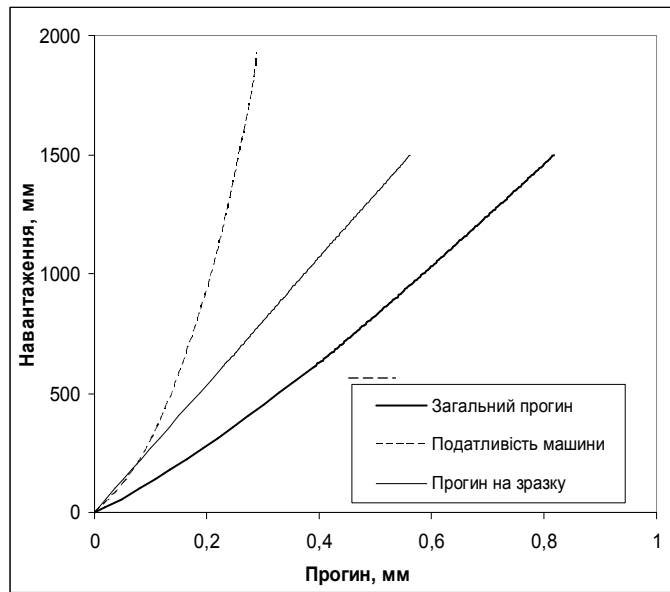
$$\Delta = -6 \cdot 10^{-20} F^6 + 3,8323 \cdot 10^{-16} F^5 - 9,68324 \cdot 10^{-13} F^4 + 1,24515885 \cdot 10^{-9} F^3 - 9,09224 \cdot 10^{-7} F^2 + 0,000518F - 0,00024443831, \quad (13)$$

де  $\Delta$  — абсолютна деформація машини, мм;  $F$  — навантаження, Н.

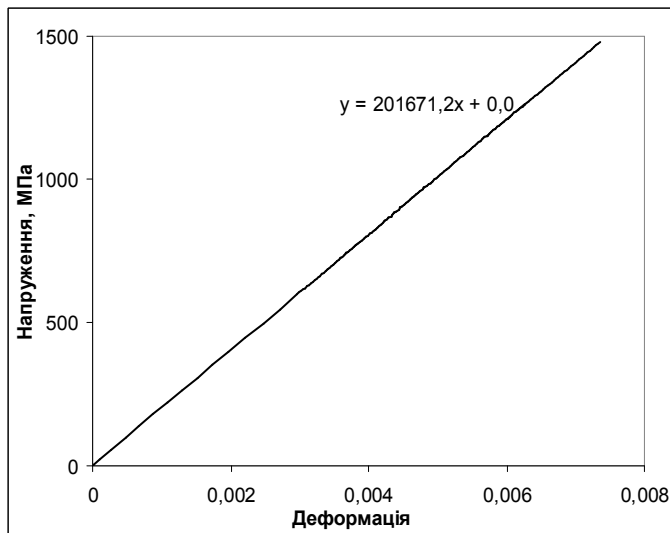
Ця крива представлена на рис. 3, *a* пунктирною лінією. Крива деформування сталевого зразка висотою 3,5 мм, шириною 5 мм і довжиною 50 мм разом з податливістю машини представлена на цьому рисунку жирною лінією.

Для кожної записаної точки комп'ютерна програма від загального прогину віднімала величину абсолютної деформації машини залежно від поточного значення навантаження, розраховуючи її за допомогою рівняння (13). Результат цього віднімання — це суцільна крива на рис. 3, *a*. Після перерахунку в напруження і деформацію за формулами отримали криву, представлену на рис. 3, *б*. Апроксимація лінійною залежністю цієї кривої дає модуль Юнга 201,6 ГПа, що відповідає табличним значенням. Випробування цього ж зразка з прогиновимірювачем за чотириточковим згином показало модуль пружності 203 ГПа, що підтверджує правомірність запропонованої методики.

Для перевірки запропонованої методики визначення прогину зразка без прогиновимірювача було випробувано також зразок кераміки на основі  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . Здійснивши перебудови, аналогічні зображеним на рис. 3, *a*, отримали криву деформування, наведену на рис. 4. Модуль пружності склав 371,3 ГПа, що також відповідає табличним значенням. Зразок з цієї ж партії був випробуваний



*a*



*б*

Рис. 3. Податливість машини (пунктирна лінія), крива деформування сталевго зразка разом з податливістю машини (жирна лінія) та крива прогину на зразку (суцільна лінія) (*a*); крива деформування сталевго зразка у координатах напруження—деформація (*б*).

з прогиновимірювачем за чотириточковим згином і показав модуль пружності 372,5 ГПа. Порівняння результатів визначення модулів пружності по методиках без прогиновимірювача і з прогиновимірювачем показало, що різниця між значеннями модулів Юнга, розрахованими за запропонованою методикою, та відповідними

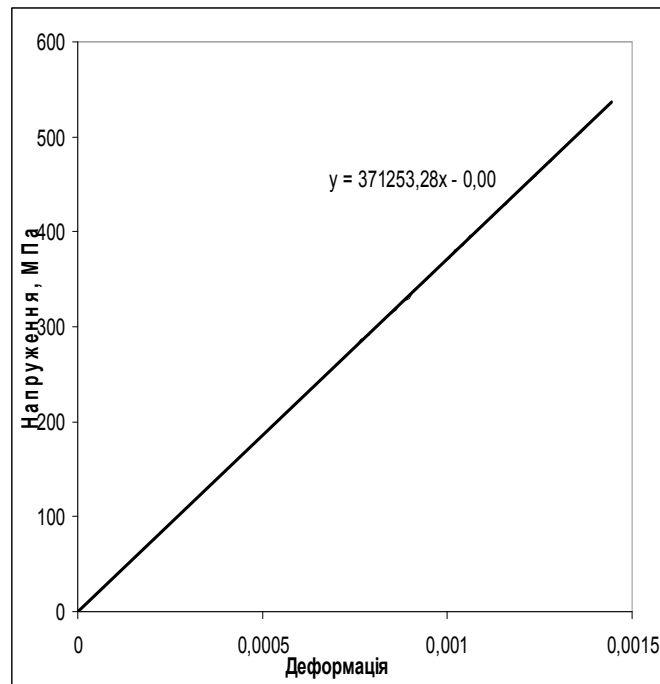


Рис. 4. Крива деформування керамічного зразка у координатах напруження — деформація.

значеннями, обчисленими з урахуванням безпосередньо виміряних прогинів, не перевищує 1%.

#### Висновки

В умовах випробувань на чотириточковий згин зразків матеріалів, прогин яких достатньо малий та може бути описаний диференціальним рівнянням зігнутої осі балки, з задовільною точністю можна вважати, що максимальний прогин центральної частини зразка відносно внутрішніх роликів складає 3/8 від переміщення внутрішніх роликів випробувальної машини відносно зовнішніх.

Застосування вдосконаленої методики визначення прогинів дозволило отримати діаграми деформування зразків без використання прогиновимірювача, а також визначати модуль пружності та криві мікрдеформації малопластичних матеріалів за різних температур випробувань.

Експериментально встановлено, що різниця між значеннями модулів Юнга, розрахованими за запропонованою методикою, та відповідними значеннями, обчисленими з урахуванням безпосередньо виміряних прогинів, не перевищує 1%.



## Список літератури

1. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Часть 1. Элементарная теория и задачи / Пер. с англ. В. Н. Федорова. Ленинград, 1932. 336 с.
2. Цурпал І.А. Механіка матеріалів і конструкцій: Навч. посібник. К.: Вища освіта, 2005. 367 с.
3. Подрезов Ю.Н., Луговой Н.И., Слюняев В.Н., Вербило Д.Г., Чернышев Л.И. Принципы конструирования высокопористых слоистых композитов, работающих в режиме изгиба. *Порошковая металлургия*. 2000. № 3/4. С. 70—78. <https://doi.org/10.1007/BF02678641>
4. Orlovskaya N., Lugovy M., Verbylo D., Reece M.J., Graule T., Kuebler J. High temperature stiffening of ferroelastic LaCoO<sub>3</sub>. *J. European Ceramic Soc.* 2019. Vol. 39 (11) September. P. 3338—3343. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2019.03.052>
5. Шевченко А.В., Лашнева В.В., Дудник Е.В., Рубан А.К., Редько В.П., Цукренко В.В., Вербило Д.Г., Бричевский Н.Н. Технология изготовления и физико-химические свойства керамики на основе нанокристаллического порошка композита диоксида циркония. *Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии*. 2014. Т. 12, № 2. С. 333—345.
6. Золоторевский В.С. Механические свойства металлов. Москва: Металлургия, 1983.
7. <http://www.materials.kiev.ua/departments/008/MechTest.files/page0003.htm>
8. [http://www.sdtb.kiev.ua/sdtb\\_ceram1\\_ru.htm](http://www.sdtb.kiev.ua/sdtb_ceram1_ru.htm)
9. ДСТУ 3716-98. Кераміка. Метод визначення границі міцності під час згинання.
10. ДСТУ ISO 14704:2006. Високоякісна кераміка. Метод випробування міцності на згин монолітної кераміки за кімнатної температури.

## References

1. Timoshenko, S. (1983). *Strength of materials. Part. 1. Elementary theory and problems*. Krieger Pub Co; 3rd edition, (May 31, 1010 p. [in Russian]. ISBN-10: 0898746213 ISBN-13 : 978-0898746211
2. Tsurpal, I. A. (2005). *Mechanics of materials and structures: Navch. posibnik*. K.: Vyshcha osvita, 367 s. [in Ukrainian].
3. Podrezov, Y. N., Lugovoi, N. I., Slyunyaev, V. N., Verdylo, D. G. (2000). Principles of the design of highly porous layered composites working in the bending mode. *Poroshkovaya metallurgiya*, No. 3/4, pp. 171—177. <https://doi.org/10.1007/BF02678641>

4. Orlovskaya, N., Lugovy, M., Verbylo, D., Reece, M. J., Graule, T., Kuebler, J. (2019). High temperature stiffening of ferroelastic LaCoO<sub>3</sub>. J. European Ceramic Soc., Vol. 39 (11), September, pp. 3338—3343 [in Russian]. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2019.03.052>
5. Shevchenko, A. V., Lashneva, V. V., Dudnik, E. V., Ruban, A. K., Redko, V. P., Tsukrenko, V. V., Verbylo, D. G., Brichevsky, N. N. (2014). Manufacturing technology and physicochemical properties of ceramics based on nanocrystalline powder of zirconium dioxide composite. Nanosystems, nanomaterials, nanotechnologies, Vol. 12, No. 2, pp. 333—345 [in Russian].
6. Zolotarevskiy, V. S. (1983). Mechanical properties of metals. Moscow: Metallurgiya [in Russian].
7. <http://www.materials.kiev.ua/departments/008/MechTest.files/page0003.htm>
8. [http://www.sdtb.kiev.ua/sdtb\\_ceram1\\_ru.htm](http://www.sdtb.kiev.ua/sdtb_ceram1_ru.htm)
9. DSTU 3716-98. Ceramics. The method of determining the strength under bending tests [in Ukrainian].
10. DSTU ISO 14704:2006. Fine ceramics. Test method for flexural strength of monolithic ceramics at room temperature [in Ukrainian].

## **Study the deformation behavior of materials under bending**

D. G. Verbylo

I. M. Frantsevich Institute for Problems in Materials Science of NAS  
of Ukraine, Kyiv  
E-mail: [ver@ipms.kiev.ua](mailto:ver@ipms.kiev.ua)

*The application of bending tests is due to the widespread use of this load scheme in real operating conditions and its greater softness compared to tensile strength. This makes it possible to assess the properties of materials that are brittle when tensile. Bending tests are convenient for estimating the transition temperatures from brittle to plastic (for example, in cold-brittle BCC metals and intermetallics). The issue of determining the elastic characteristics, in particular the measurement of deflections, needs to be clarified. The aim of this work is to improve experimental methods for determining the characteristics of elasticity, in particular to determine the ratio of movement of internal rollers relative to external and deflection between internal rollers, as well as accurate determination of absolute deformation of the test machine depending on load. To obtain the deformation curve of the sample without the deflection meter, a method of subtracting from the total load curve the yield curve of the test machine, which can be obtained after testing the sample*

*with a high axial moment of inertia to minimize its deflection. To test this technique, a ceramic sample based on  $Al_2O_3$  was tested. After the adjustments, it was found that the modulus of elasticity was 371.3 GPa, which corresponds to the tabular values. The proposed technique allows to accurately measure the modulus of elasticity and obtain curves of microdeformation of low-plastic materials at different test temperatures in the absence of a deflector. The deflection of the central part of the sample relative to the inner rollers by four-point bending is 3/8 of the movement of the inner rollers relative to the outer ones. The improved method of determining the deflections allows to obtain diagrams of deformation of the samples without the deflection meter, as well as to measure the modulus of elasticity and obtain curves of microdeformation of low-plastic materials at different test temperatures. Comparison of the results of determining the modulus of elasticity by methods without a deflector and with it allows you to assess the accuracy of measuring the modulus of elasticity. It is experimentally established that the difference between the values of the Young's modules calculated by the proposed method and the corresponding values calculated taking into account the directly measured deflections does not exceed 1%.*

**Keywords:** *bending, stress, deformation, deflection, angle of rotation, radius of curvature, axial moment of inertia, deflection meter.*