

УДК 621.311.21.001.2

А.В.Мороз (Інститут відновлюваної енергетики НАН України, Київ)

Властивості та особливості застосування імовірнісного трипараметричного гамма-розподілу для визначення технічного гідроенергетичного потенціалу малої річки

Виконано аналіз властивостей трипараметричного гамма-розподілу у формі Крицького-Менкеля для визначення імовірнісних гідрологічних характеристик та технічного потенціалу малих річок.

Ключові слова: гамма-розподіл, гідроенергетика, гідрологія, електроенергія, імовірність, потенціал, потужність, річка.

Выполнен анализ свойств трехпараметрического гамма-распределения в форме Крицкого-Менкеля для определения вероятностных гидрологических характеристик и технического потенциала малых рек.

Ключевые слова: гамма-распределение, гидроэнергетика, гидрология, электроэнергия, вероятность, потенциал, мощность, река.

Вихідні положення. Дослідження потенційної потужності гідроенергетичних ресурсів території України проводились протягом багатьох років, а їх результати проаналізовані в [1]. Відмінність отриманих результатів зумовлена використанням при розрахунках різних вихідних даних, припущень та положень. Величина потенційної потужності ділянки річки розраховується наступним чином:

$$N = 9,81 \cdot Q \cdot H \text{ (кВт)}, \quad (1)$$

де Q – середня багаторічна витрата води на ділянці річки, $\text{м}^3/\text{с}$; H – напір на ділянці річки, м.

Відповідно величина енергії водного потоку ділянки річки за проміжок часу T розраховується за формулою:

$$E = N \cdot T = 9,81 \cdot Q \cdot H \cdot T \text{ (кВт·год)}. \quad (2)$$

Даний метод розрахунку застосовується для визначення природного потенціалу гідроенергетичних ресурсів річки. При визначенні технічного гідроенергетичного потенціалу річки необхідно врахувати такі явища як повінь, низька літня та зимова межень із досить частими паводками [2, 3], коли гідроелектростанції втрачають свою працез-

датність на період до 2 місяців протягом року. До того ж, на кожній станції проводяться оперативні заходи з регулювання водного потоку відповідно до "Правил експлуатації гідротехнічних споруд та водосховищ" та "Інструкції по пропуску повені (льодоходу) та дощових паводків через гідроспоруди ГЕС", які затверджуються Управлінням із питань надзвичайних ситуацій області, Управлінням водного господарства області, Комісією з питань техногенно-екологічної безпеки та надзвичайних ситуацій [4]. Ці заходи також зменшують використання стоку річки для потреб виробництва електроенергії на малих ГЕС. Тому при визначенні технічних гідроенергетичних ресурсів малої річки необхідно використовувати лише витрати води із забезпеченістю від 10 до 90% річного стоку, що потребує застосування імовірнісних гідрологічних параметрів [5]. У гідрологічній вітчизняній практиці широке застосування отримав імовірнісний трипараметричний гамма-розподіл у формі Крицького-Менкеля [6, 7].

Властивості імовірнісного трипараметричного гамма-розподілу. Його функція має вигляд:

$$F(Q) = \begin{cases} 0, & \text{при } Q < 0 \\ \left[\frac{\Gamma(\gamma + b)}{\Gamma(\gamma)} \right]^{\frac{\gamma}{b}} \frac{1}{\Gamma(\gamma) Q_{cp} b} \int_0^x e^{-\left[\frac{\Gamma(\gamma + b)t}{\Gamma(\gamma) Q_{cp}} \right]^{\frac{1}{b}}} \left(\frac{t}{Q} \right)^{\frac{\gamma}{b} - 1} dt, & \text{при } Q \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

де $F(Q)$ – функції розподілу витрат води Q ; Q_{cp} – середнє значення випадкової величини; γ, b – параметри розподілу; $\Gamma(\dots)$ – символ гамма-функції відповідного аргументу.

Функцію забезпеченості Крицького-Менкеля неможливо виразити через елементарні функції, тому її ординати представляють у вигляді таблиць (табл. 1), які складаються у модульних коефіцієнтах k_p та дозволяють визначити їх значення у залежності від C_v , розрахункової забезпеченості p та співвідношення C_s/C_v :

$$p(Q) = 1 - F(Q); \quad k_p = \frac{Q}{Q_{cp}}, \quad (4)$$

де k_p – модульний коефіцієнт; C_v – коефіцієнт варіації; C_s – коефіцієнт асиметрії.

Основні особливості розподілу Крицького-Менкеля полягають у наступному:

- крива щільності імовірності є одномодальною з позитивною асиметрією;
- нижньою межею кривої завжди є нуль;
- крива розподілу не обмежена верхньою межею;
- при $C_s = 2C_v$ даний розподіл перетворюється на двопараметричний гамма-розподіл, тобто збігається з розподілом Пірсона III-го типу.

Більш детальний опис характеристик та використання у гідрології трипараметричного гамма-розподілу у формі Крицького-Менкеля наведено в роботах [7, 8].

Таблиця 1. Ординати кривих забезпеченості трипараметричного гамма-розподілу Крицького-Менкеля в модульних коефіцієнтах k_p за $C_s/C_v = 0,5$

$p, \%$	Коефіцієнт варіації C_v						
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
	Модульний коефіцієнт k_p						
0,001	1,40	1,79	2,17	2,52	2,79	2,95	2,92
0,01	1,38	1,76	2,13	2,47	2,74	2,91	2,89
0,03	1,36	1,73	2,09	2,43	2,69	2,87	2,87
0,05	1,34	1,70	2,05	2,38	2,64	2,83	2,84
0,1	1,31	1,63	1,95	2,25	2,50	2,69	2,74
0,3	1,28	1,56	1,85	2,12	2,36	2,55	2,64
0,5	1,26	1,53	1,79	2,05	2,28	2,48	2,59
1	1,24	1,48	1,72	1,95	2,17	2,37	2,50
3	1,19	1,38	1,58	1,78	1,97	2,16	2,33
5	1,17	1,33	1,51	1,68	1,86	2,03	2,22
10	1,13	1,26	1,39	1,53	1,67	1,83	2,01
20	1,08	1,17	1,25	1,35	1,44	1,56	1,70
25	1,07	1,13	1,20	1,27	1,35	1,45	1,56
30	1,05	1,10	1,16	1,21	1,27	1,34	1,42
40	1,02	1,05	1,07	1,10	1,12	1,15	1,16
50	1,00	1,00	0,99	0,99	0,98	0,96	0,92
60	0,97	0,95	0,92	0,88	0,84	0,78	0,69
70	0,95	0,88	0,83	0,77	0,69	0,60	0,48
75	0,93	0,86	0,79	0,71	0,62	0,50	0,38
80	0,92	0,83	0,74	0,64	0,53	0,41	0,28
90	0,87	0,74	0,62	0,48	0,34	0,22	0,12
95	0,84	0,68	0,52	0,36	0,22	0,11	0,05

$p, \%$	Коефіцієнт варіації C_V						
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
	Модульний коефіцієнт k_p						
97	0,81	0,63	0,46	0,30	0,16	0,07	0,02
99	0,77	0,55	0,35	0,19	0,08	0,03	0,01
99,5	0,75	0,51	0,30	0,14	0,05	0,01	0,00
99,7	0,73	0,48	0,27	0,12	0,04	0,01	0,00
99,9	0,70	0,43	0,21	0,08	0,02	0,00	0,00

Основні особливості розподілу Крицького-Менкеля полягають у наступному:

- крива щільності імовірності є одномодалною з позитивною асиметрією;
- нижньою межею кривої завжди є нуль;
- крива розподілу не обмежена верхньою межею;
- при $C_s = 2C_v$ даний розподіл перетворюється на двопараметричний гамма-розподіл, тобто збігається з розподілом Пірсона III-го типу.

Більш детальний опис характеристик та використання у гідрології трипараметричного гамма-розподілу у формі Крицького-Менкеля наведено в роботах [7, 8].

Гідрологічна інформація щодо малих річок наведена в [2, 3] для 180 пунктів, які знаходились у 50-70-х роках на 146 малих річках України. Аналіз представлених гідрологічних даних показав, що коефіцієнт варіації C_v змінюється у межах 0,21÷1,06, а коефіцієнт C_s у межах 0÷2,4. Також було відмічено, що близько 83% випадків значення C_v знаходиться у межах 0,21÷0,6 (таблиця 2). Коефіцієнт C_s має схожу відмінність, а саме: у 82% випадків значення коефіцієнта знаходиться у межах 0,5÷2 (таблиця 3).

Таблиця 2. Розподіл кількості річок за коефіцієнтом варіації C_v

Діапазон змін параметра C_v	Кількість річок	Відносна кількість річок, %
0,21÷0,3	24	13,41
0,31÷0,4	43	24,02
0,41÷0,5	49	27,37
0,51÷0,6	33	18,44
0,61÷0,7	17	9,50
0,71÷0,8	7	3,91
0,81÷0,9	2	1,12
0,91÷1,0	3	1,68
1,01÷1,06	1	0,56

Таблиця 3. Розподіл кількості річок за коефіцієнтом асиметрії C_s

Діапазон змін параметра C_s	Кількість річок	Відносна кількість річок, %
0	7	3,91
0,01÷0,49	19	10,61
0,5÷0,99	69	38,55
1÷1,49	54	30,17
1,5÷1,99	24	13,41
2÷2,4	6	3,35

Співвідношення C_s/C_v змінюється у межах 0÷4,63 (таблиця 4). У 71% випадків значення C_s/C_v знаходиться у межах 1,51÷3,0.

Таблиця 4. Розподіл кількості річок за співвідношенням C_s/C_v

Діапазон змін параметра C_s/C_v	Кількість річок	Відносна кількість річок, %
0÷0,5	14	7,82
0,51÷1,0	9	5,03
1,01÷1,5	14	7,82
1,51÷2,0	41	22,91
2,01÷2,5	61	34,08
2,51÷3,0	24	13,41
3,01÷3,5	6	3,35
3,51÷4,0	6	3,35
4,01÷4,63	4	2,23

Приклад графічного зображення залежності модульного коефіцієнта k_p від розрахункової забезпеченості p та коефіцієнтів C_v , C_s/C_v наведено на рис. 1.

Особливість функцій за даних кількісних значень коефіцієнтів полягає у тому, що вони перетинаються в одній точці, яка відповідає $k_p=1$ за $p=40\%$. Для інших значень C_s/C_v точка перети-

ну зміщується. У 62% випадків точка перетину розташована у межах $p = [30; 45]\%$ (таблиця 5).

Інша особливість спостерігається при умові, що коефіцієнт C_v є сталою величиною, а співвідношення C_s/C_v змінюється (рис. 2).

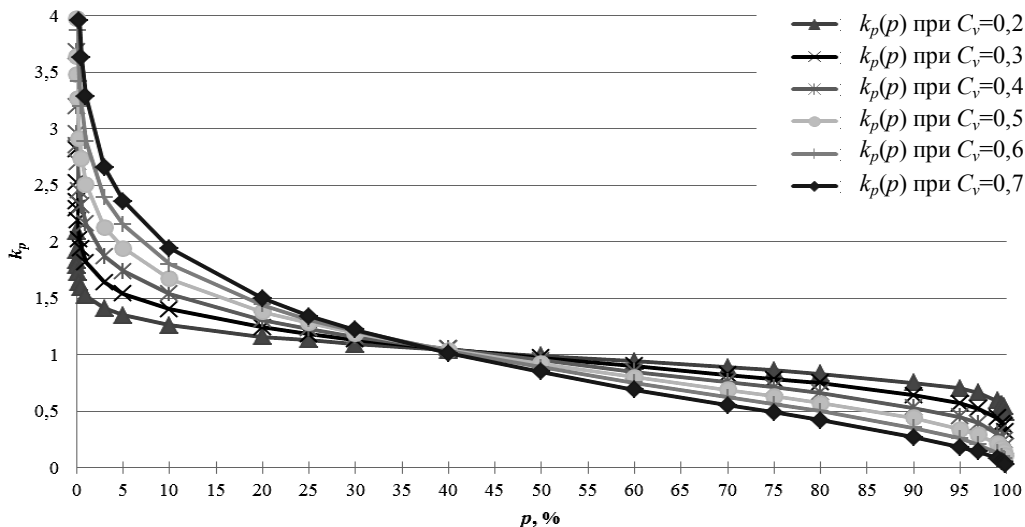


Рис. 1. Залежність модульного коефіцієнта k_p від забезпеченості p за $C_s/C_v=2$ та для різних значень C_v

Таблиця 5. Розподіл $k_p=1$ за значенням забезпеченості p

Діапазон змін забезпеченості p	Кількість потраплянь у діапазон p	Відносна кількість потраплянь, %
20÷24,9	9	5,66
25÷29,9	19	11,95
30÷34,9	34	21,38
35÷39,9	30	18,87
40÷44,9	35	22,01
45÷49,9	14	8,81
50	18	11,32

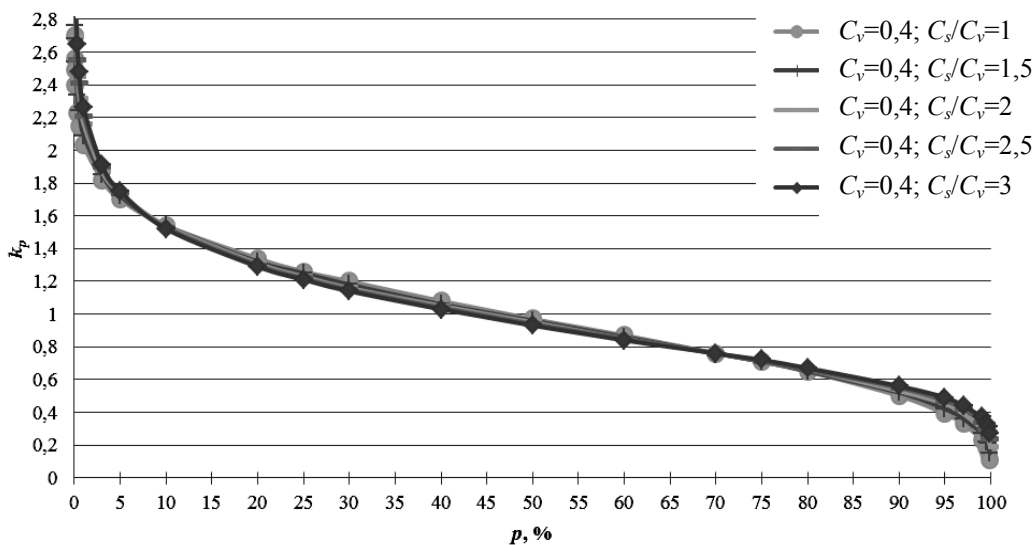


Рис. 2. Залежність модульного коефіцієнта k_p від забезпеченості p за $C_v=0,4$ та для різних значень C_s/C_v

За цих умов графіки функцій практично збігаються. Суттєві відмінності спостерігаються при максимальних та мінімальних значеннях k_p на відрізках, які відповідають забезпеченості 0÷10 та 90÷100%, тобто в тих діапазонах, що не являють інтересу для визначення технічного потенціалу. Форма графіків функції $k_p(p)$ на відрізках, які відповідають забезпеченості 10÷90%, близька до лінійної залежності, яку можна аналітично представити в загальному вигляді наступним чином:

$$p = \frac{p_2 - p_1}{k_{p2} - k_{p1}} k_p + \frac{p_1 \cdot k_{p2} - p_2 \cdot k_{p1}}{k_{p2} - k_{p1}}, \quad (5)$$

де $p_2 < p_1$, а k_{p1} та k_{p2} – це значення модульних коефіцієнтів при забезпеченості p_1 та p_2 відповідно.

Розрахунок енергії водного потоку річки за обмежень по величині стоку.

Визначення енергії за (2) базується на застосуванні детермінованого підходу з використанням середньорічного значення витрат води. Урахування обмежень на використання витрат води реалі-

зуємо з використанням імовірнісного розподілу стоку впродовж року (3), (4) наступним чином:

$$E = 9,81 \cdot Q_{cp} \cdot H \times \\ \times (p_0 - p_m) \cdot T \int_{k_{p0}}^{k_{pm}} k_p \frac{dF(k_p)}{dk_p} dk_p; \quad (6)$$

$$\frac{dF(k_p)}{dk_p} = \frac{-d}{dk_p} p(k_p),$$

де k_{p0} та k_{pm} – мінімальне та максимальне значення модульного коефіцієнта k_p при забезпеченості p_0 та p_m , визначених у відносних одиницях.

Зображення похідної $\frac{dF(k_p)}{dk_p}$, отриманої в результаті чисельного диференціювання функції розподілу за $C_v = 0,2$ та $C_s/C_v = 2,5$, показано на рис. 3.

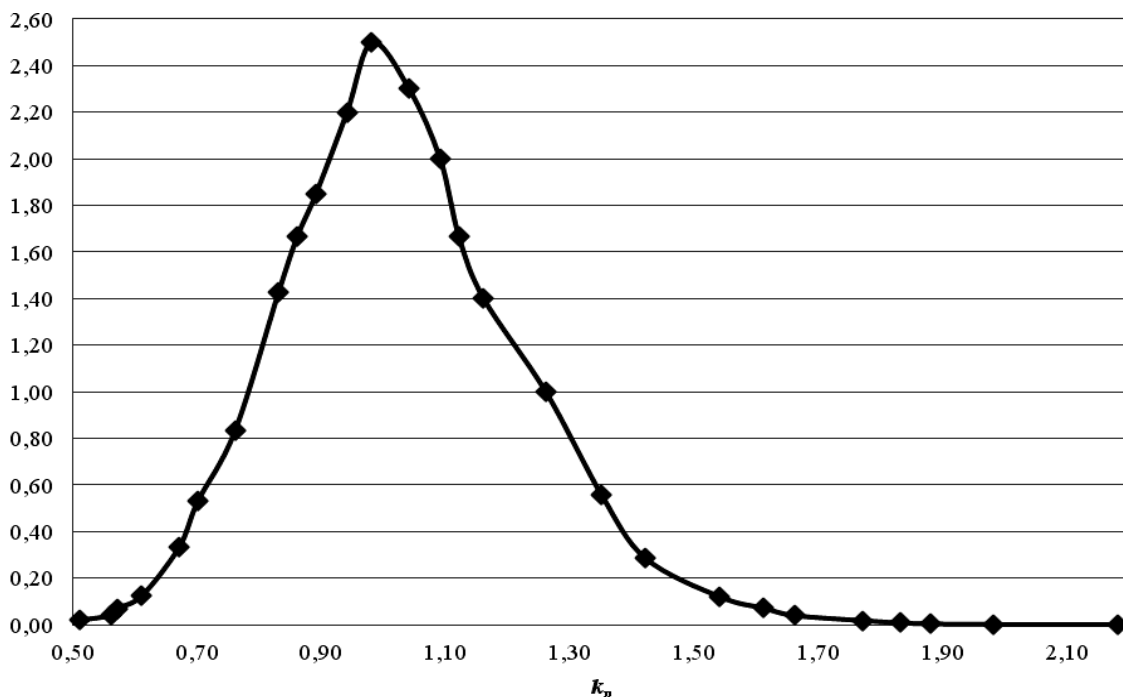


Рис. 3. Ординати диференціальної функції розподілу $\frac{dF(k_p)}{dk_p}$ за $C_v=0,2$ та $C_s/C_v=2,5$ в діапазоні забезпеченості 0÷100%.

Дослідимо підінтегральну величину в формулі (6) для сукупності значень $C_v = \{0,2; 0,4; 0,6\}$ та $C_s/C_v = \{1,5; 2,0; 2,5; 3,0\}$ (рис. 4).

Розрахунки підінтегральної величини виконаємо для 3 випадків:

- у першому випадку використовується таблично задана функція $p(k_p)$ трипараметричного гамма-розподілу у формі Крицького-Менкеля (рис. 4, 5);

- у другому випадку – таблично задана функція приводиться до лінійної залежності, при якій втрати площі фігури, яка обмежена графіком функції $p(k_p)$, найменші (рис. 5);

- у третьому випадку – таблично задана функція приводиться до лінійної залежності. При цьому пряма проходить через 2 точки, які відповідають забезпеченості 10 та 90% (рис. 5).

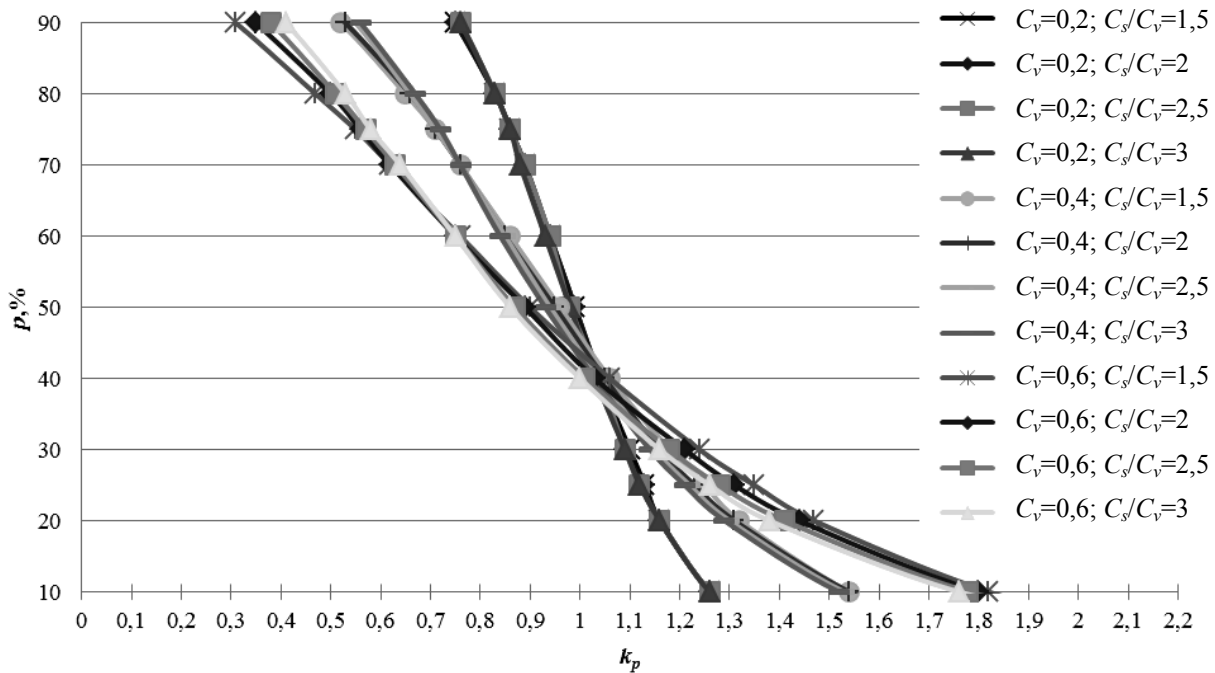


Рис. 4. Залежність забезпеченості p від модульного коефіцієнта k_p при різних значеннях C_v та C_s/C_v .

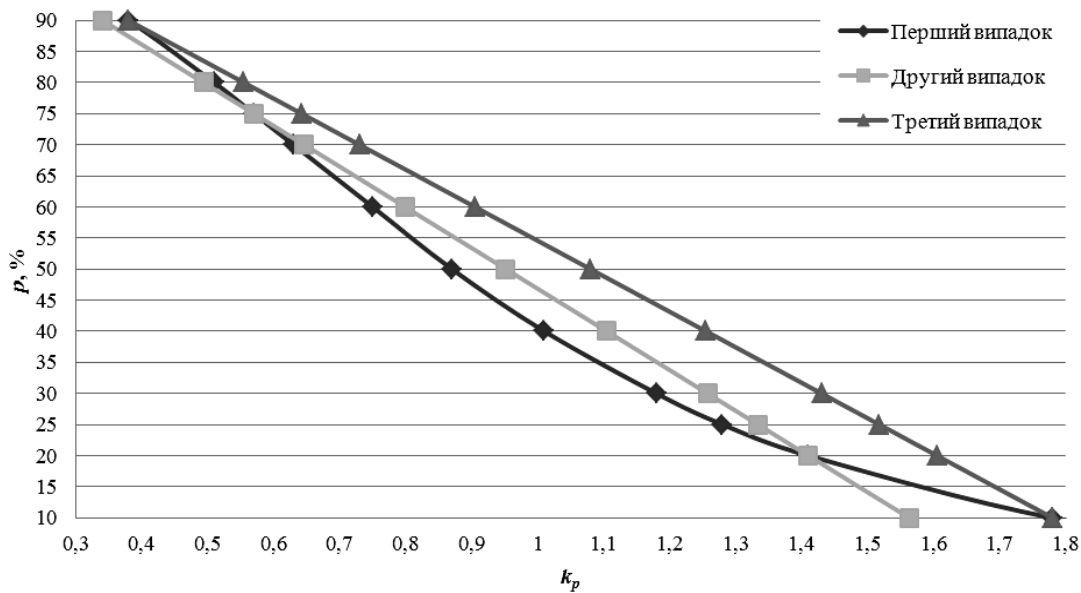


Рис. 5. Залежність забезпеченості p від модульного коефіцієнта k_p для всіх випадків розрахунку при $C_v = 0,6$ та $C_s/C_v = 2,5$.

Визначимо значення інтегралу в (6) для вказаних 3-х випадків представлення функції $p(k_p)$. Результати розрахунку представлені в таблиці 6 для забезпеченості у діапазоні 10÷90%, де позначено:

$$B = \frac{S_T - S_L}{S_T} \cdot 100\%, \quad (7)$$

де S_L – значення інтегралу за лінійної функції;
 S_T – значення інтегралу за таблично заданої функції.

Таблиця 6. Результати обчислень інтегралу

Вид функції	Забезпеченість $p=10\div 90\%$	
	Значення інтегралу	$B, \%$
$C_v=0,2; C_s/C_v=2,5$		
Таблично задана функція	0,90	-
Лінійна функція	0,86	4,44
Лінійна функція, яка проходить через забезпеченість 10 та 90%	0,85	5,55
$C_v=0,4; C_s/C_v=2,5$		
Таблично задана функція	0,83	-
Лінійна функція	0,84	-1,20
Лінійна функція, яка проходить через забезпеченість 10 та 90%	0,86	-3,61
$C_v=0,6; C_s/C_v=2,5$		
Таблично задана функція	0,82	-
Лінійна функція	0,78	4,88
Лінійна функція, яка проходить через забезпеченість 10 та 90%	0,88	7,32
$C_v=0,8; C_s/C_v=2,5$		
Таблично задана функція	0,80	-
Лінійна функція	0,93	-16,25
Лінійна функція, яка проходить через забезпеченість 10 та 90%	0,91	-13,75

З результатів розрахунку випливає, що при лінеаризації функції $p(k_p)$ у межах забезпеченості $p=10\div 90\%$ за різними значеннями коефіцієнтів C_v та C_s/C_v , похибка визначення інтегралу складає не більше 15%. Мінімальна похибка спостерігається при значеннях коефіцієнта $C_v \leq 0,6$ для лінійної функції.

Додатково були досліджені значення інтегралу таблично заданої функції у діапазонах забезпеченості $p=[0; 100]\%$ та $p=[10; 90]\%$. При цьому було виявлено, що зменшення значення інтегралу за таблично заданої функції у діапазоні забезпеченості $p=[10; 90]\%$ складає 20-35%. Тобто підлягає подальшому перетворенню в електроенергію лише 65-80% природного потенціалу водного потоку.

Висновки. 1. Обмеження на використання витрат води річного стоку в діапазоні забезпеченості $p=[10; 90]\%$ зменшують на 20-35% величину природного гідроенергетичного потенціалу малих річок, що підлягає подальшому перетворенню в електричну енергію на малих ГЕС.

2. У робочому діапазоні забезпеченості $p=[10; 90]\%$ лінійна апроксимація трипараметричного гамма-розподілу дозволяє отримати формули для аналітичного розрахунку величини енергії водного потоку. Очікувана максимально можлива похибка величини гідроенергетичного потенціалу, спричинена лінійною апроксимацією, не перевищує 15% за несприятливого співвідношення гідрологічних характеристик. Для переважної більшості малих річок України похибка апроксимації знаходиться в межах 3-7%.

1. Мороз А.В. Аналіз розрахункових досліджень гідроенергетичних ресурсів малих річок України // Відновлювана енергетика. – 2014. – №1. – С. 70–75.

2. Справочник по водным ресурсам / Под ред. Б.И. Стрельца. – К.: Урожай, 1987. – 304 с.

3. Малі річки України: Довідник / А.В. Яцик, Л.Б. Бишовець, Є.О. Богатов та ін.; За ред. А.В. Яцика. – К.: Урожай, 1991. – 296 с.

4. Інформація про роботу Явірської ГЕС [Електронний ресурс] // Турківська районна рада – Режим доступу: <http://turka.org.ua/content/Informatsiya-pro-robotu-yavirskoi-ges> – Назва з екрану.

5. СНиП 2.01.14-83. Определение гидрологических характеристик. – 1983. – 33 с.

6. Дружинин В.С., Сикан А.В. Методы статистической обработки гидрометеорологической информации. Учебное пособие. – Санкт-Петербург: РГГМУ, 2001. – 168 с.

7. Блохинов Е.Г. Распределение вероятностей величин речного стока. – М.: Наука, 1974. – 172 с.

8. Васько П.Ф., Озорін Д.Ф. Визначення імовірнісних гідрологічних характеристик річок західного регіону України за трипараметричним гама-розподілом у формі Крицького-Менкеля // Відновлювана енергетика. – 2010. – №4. – С. 54–59.