УДК 620.91:662.997:631.563.2

Т.В.Суржик, канд.техн.наук, **А.В.Гамарко, С.В.Матях, В.А.Щокіна** (Ін-т відновлюваної енергетики НАН України, Київ)

Особливості застосування теореми Умова-Пойнтинга для аналізу електротеплового стану фотобатарей та сонячних колекторів

В роботі розглянуті особливості застосування теореми Умова-Пойнтинга в диференціальній та інтегральній формах для аналізу усередненої по об'єму температури фотобатарей та сонячних колекторів на основі використання теореми про дивергенцію для векторних інтегральних операцій.
Ключові слова: *фотобатарея, сонячний колектор, сонячне випромінювання, вектор Умова-Пойнтинга, теорема про дивергенцію.*

В работе рассмотрены особенности использования теоремы Умова-Пойнтинга в дифференциальной и интегральной формах для анализа усредненной по объему температуры фотобатарей и солнечных коллекторов на основе использования теоремы о дивергенции для векторных интегральных операций.
Ключевые слова: *фотобатарея, солнечный коллектор, солнечное излучение, вектор Умова-Пойнтинга, теорема о дивергенции.*

Вступ. Добре відомо, що у фото- і геліоенергетиці температурний стан активних поверхонь фотобатарей та сонячних колекторів має суттєве значення як з точки зору впливу температурного фактора на ефективність перетворювання енергії сонячного випромінювання в електричну і (або) теплову енергію, так і на надійність та ресурс функціонування фотобатарей і сонячних колекторів. Так, наприклад, збільшення температури активних поверхонь фотобатарей призводить до зменшення коефіцієнта перетворювання енергії сонячного випромінювання в електричну енергію у фотоперетворювачах. Підвищення температури поверхні сонячних колекторів призводить до зменшення коефіцієнта перетворювання енергії сонячного випромінювання в теплову енергію, що є особливо важливим при застосуванні концентраторів сонячного випромінювання. В обох випадках важливе значення має просторовий розподіл температур, який визначається розподілом густини тепловиділення і від якого залежать термічні напруги, а також інтегральні значення тепловиділення.

Постановка задачі. З теорії теплопровідності відомо, що зміна температури будь-яких середовищ у часі визначається диференціальним рівнянням параболічного типу [1]:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = F_T(T). \qquad (1)$$

Тут T – температура середовища; t – час; $\rho,\, C_p,\, \lambda$ – густина, питома теплоємність і коефіцієнт теплопровідності; $F_T(T)$ – густина об'ємного тепловиділення.

Відмітимо, що в рівнянні (1), яке випливає з рівняння балансу теплової енергії в нескінченно малих об'ємах, величини $\rho,\, C_p,\, \lambda$ покладаються постійними. У більш загальному випадку при залежності $\rho,\, C_p,\, \lambda$ від температури і (або) координат необхідно рівняння (1) представити у наступній формі:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho C_p T\right\} - \nabla \cdot \left\{\lambda \nabla T\right\} = F_T(T). \qquad (2)$$

Оскільки згідно закону Фур'є:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T, \qquad (3)$$

(тут $\vec{q}$ – густина теплового потоку), який виконується незалежно від того, залежить λ від температури та координат, чи є тензорною внаслідок анізотропії, то рівняння (2) можна представити в дивергентній формі (або регулярній згідно термінології [2]).

Це є важливим, оскільки представлення рівняння (2) в дивергентній формі дозволяє через теорему про дивергенцію [3] зробити перехід від диференціальної (2) до інтегральної форми. Але при цьому є доцільним представити густину тепловиділення $F_T(T)$ також у дивергентній формі. Це можливо при представленні процесу взаємодії сонячного випромінювання з середовищами як процесу взаємодії електромагнітних хвиль з різними частотами, який має теоретичне та експериментальне обґрунтування при взаємодії світла з атмосферою [4].

При такому представленні для обраної частоти сонячного випромінювання ω величина F_T визначається як скалярний добуток густини струмів провідності $\vec{\delta}_{пр.}$ на напруженість електричного поля $\vec{E}$:

$$F_T = \vec{\delta}_{пр.} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2 . \tag{4}$$

Приведення функції F_T до дивергентної форми. Оскільки розмірність скалярної функції $F_T(T)$ в формулі (2) є Вт/м^3, то єдиною функцією, яка задовольняє цим вимогам, є функція $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$, оскільки

$$\nabla \cdot \vec{\Pi} = \sigma \vec{E}^2, \tag{5}$$

де $\vec{\Pi}$ – вектор Умова-Пойнтинга; $\vec{E}$, $\vec{H}$ – відповідно напруженість електричного та магнітного полів.

Викладене співвідношення (5) випливає з аналізу першого та другого рівнянь системи рівнянь Максвелла в диференціальній формі:

$$\begin{aligned} &\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \\ &\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \ \sigma, \varepsilon, \mu \to const. \end{aligned} \tag{6}$$

В тому випадку, коли діелектрична проникність ε та магнітна проникність μ є нелінійними, рівняння (6) мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \ \vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \\ &\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \ \vec{B} = \mu \vec{H}. \end{aligned} \tag{7}$$

З урахуванням (7) вираз (5) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{\Pi} = \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H} \right) = \\ &= \left[\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H} \right) - \vec{H} \cdot \left(\nabla \times \vec{E} \right) \right] = \\ &= \sigma \vec{E}^2 + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \end{aligned} \tag{8}$$

При ε, $\mu = const$ вираз (8) для $\nabla \cdot \vec{\Pi}$ набуває вигляду:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{\Pi} = \sigma \vec{E}^2 + \frac{\partial \omega_е}{\partial t} + \frac{\partial \omega_м}{\partial t}; \\ &\omega_е = \varepsilon \frac{\vec{E}^2}{2}; \ \omega_м = \mu \frac{\vec{H}^2}{2}, \end{aligned} \tag{9}$$

де $\omega_е$, $\omega_м$ – густина енергії відповідно електричного та магнітного полів, які накопичуються в середовищі, на відміну від функції $\sigma \vec{E}^2$, яка відповідає перетворенню енергії електромагнітного поля в теплову енергію.

Відмітимо, що функція $F_T(T)$, яка дорівнює $\sigma \vec{E}^2$, згідно (9) може бути приведена до дивергентної форми через дивергенцію вектора Умова-Пойнтинга $\vec{\Pi}$, якщо виконуються наступні умови:

$$\frac{\partial \omega_е}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \omega_м}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

Можна показати, що ці умови виконуються у випадку синусоїдальних залежностей напруженості електричного та магнітного полів у часі як у лінійному (ε, $\mu = const$), так і в нелінійному випадку, оскільки усереднені в часі, який значно перевищує період коливань, значення похідних від $\omega_е$, $\omega_м$ по t дорівнюють нулю.

Таким чином, у рівнянні (1) $F_T(T) = \sigma \vec{E}^2 = \nabla \cdot \vec{\Pi}$, а саме рівняння (1) може бути приведене до дивергентної форми, що значно спрощує аналіз усереднених по простору значень T, а також застосування аналітичного або чисельного аналізу рівняння (1).

Необхідно відмітити, що висновок відносно нульових усереднених у часі значень складових $\frac{\partial \omega_е}{\partial t}$, $\frac{\partial \omega_м}{\partial t}$ в (9) повністю співпадає з результа-

 ISSN 1819-8058

тами аналізу складових потужностей в електричних колах синусоїдального струму, як, наприклад, у випадку послідовного R, L, C-контура (рис. 1).

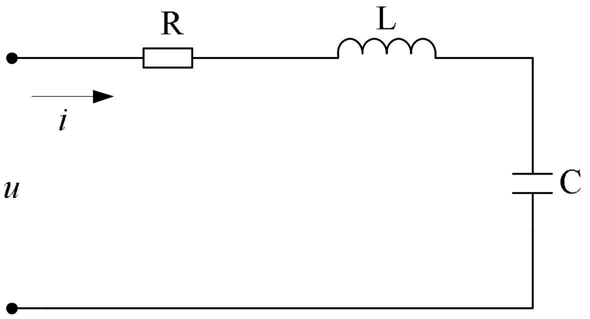

Рис. 1. Схема послідовного R, L, C-контура з активним опором R, індуктивністю L, ємністю C при підключенні до синусоїдального джерела струму $i = I_0 \sin \omega t$.

У відповідності до схеми, наведеної на рис. 1, при синусоїдальній залежності струму i від часу t залежність напруги u від часу t буде також синусоїдальною.

У відповідності до законів теорії електричних кіл зв'язок між падінням напруги u_R на активному опорі R, падінням напруги u_L на індуктивності L і падінням напруги u_C на ємності C визначається співвідношеннями:

$$u_R = Ri = RI_0 \sin \omega t,$$
$$u_L = L\frac{di}{dt} = \omega L I_0 \cos \omega t, \quad (11)$$
$$i_C = i = C\frac{du_C}{dt}.$$

Представляючи в останньому виразі падіння напруги u_C у формі

$$u_C = M \sin \omega t + N \cos \omega t; \; M, N = const, \quad (12)$$

отримуємо співвідношення:

$$I_0 \sin \omega t = \omega CM \cos \omega t - \omega CN \sin \omega t. \quad (13)$$

З виразу (13) випливає, що $M = 0$, а $N = -\dfrac{I_0}{\omega C}$.

Тобто $u_C = -\dfrac{I_0}{\omega C}\cos \omega t. \quad (14)$

Таким чином, для миттєвих потужностей $P_R = u_R i$; $P_L = u_L i$; $P_C = u_C i$ маємо наступні вирази:

$$P_R = RI_0^2 \sin^2 \omega t,$$
$$P_L = \frac{1}{2}\omega L I_0^2 \sin^2 \omega t, \quad (15)$$
$$P_C = -\frac{1}{2}\frac{I_0^2}{\omega C}\sin^2 \omega t.$$

З (15) випливає висновок, що усереднене по великому значенню t значення активної потужності $P_R \neq 0$, а, відповідно, і усереднені значення P_L і P_C, які відповідають енергії, що накопичується в індуктивних та ємнісних елементах кола, приймають нульові значення. Цей висновок, який добре відомий в теорії електричних кіл синусоїдального струму, підтверджує твердження про те, що для усереднених по часу t значеннях $\vec{E}$ повинна виконуватись умова: $\sigma \vec{E} = F_T(T) = \nabla \cdot \vec{\Pi}$ в (1).

Аналіз структури співвідношень, що випливають з теореми Умова-Пойнтинга, в термінах методу комплексних амплітуд.

В теорії електричних кіл синусоїдального струму широко використовується метод комплексних амплітуд, згідно з яким для напруг u та струмів i в будь-якому з елементів кола вводяться комплексні амплітуди $\dot{U}_a$, $\dot{I}_a$ за правилом:

$$u(t) \to \dot{U}_a \exp(j\omega t);$$
$$i(t) \to \dot{I}_a \exp(j\omega t); \; j^2 -1. \quad (16)$$

Цей метод дозволяє здійснити перехід від системи диференціальних рівнянь кола в часі до системи алгебраїчних рівнянь відносно комплексних амплітуд $\dot{U}_a$, $\dot{I}_a$.

Також вводиться поняття про повну комплексну потужність $\dot{S}$:

$$\dot{S} = \dot{U}_a \overset{*}{I}_a = P + jQ, \quad (17)$$

де $\overset{*}{I}_a$ – комплексно-спряжена до комплексної амплітуди струму; P – активна потужність, що відповідає тій частині електричної енергії, яка перетворюється в теплову енергію; Q – реактивна потужність, яка відповідає тій частині електричної енергії, яка накопичується в реактивних елементах кола (індуктивностях та ємностях).

Згідно з визначеннями (16) вирази (11) в термінах комплексних амплітуд приймають вигляд:

$$\dot{U}_{Ra} = R\dot{I}_a;\ \dot{U}_{La} = j\omega L\dot{I}_a;\ \dot{U}_{Ca} = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_a. \quad (18)$$

Виходячи з (17), (18), отримуємо наступний зв'язок між повною комплексною потужністю $\dot{S}_u = \dot{U}_a \overset{*}{I}_a$ джерела енергії та складовими комплексних потужностей в R, L, C-контурі:

$$\begin{aligned} &\dot{S}_u = P + jQ;\ P = R\dot{I}_a \overset{*}{I}_a; \\ &Q = \omega L\dot{I}_a \overset{*}{I}_a - j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_a \overset{*}{I}_a. \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогічний вищенаведеному аналіз може бути здійснений і для моделі електромагнітного поля з частотою ω для комплексних амплітуд вектора Умова-Пойнтинга $\dot{\vec{\Pi}}_a = \dot{\vec{E}}_a \times \dot{\vec{H}}_a$, який визначається через комплексну амплітуду $\dot{\vec{E}}_a$ напруженості електричного поля $\vec{E}(x,y,z,t)$ та комплексну амплітуду $\dot{\vec{H}}_{ya}$ напруженості магнітного поля $\vec{H}(x,y,z,t)$:

$$\begin{aligned} &\vec{E}(x,y,z,t) \to \dot{\vec{E}}_a(x,y,z)\exp(i\omega t), \\ &\vec{H}(x,y,z,t) \to \dot{\vec{H}}_a(x,y,z)\exp(i\omega t), \\ &i^2 = -1. \end{aligned} \quad (20)$$

Рівняння, які визначають $\dot{\vec{E}}_a$, $\dot{\vec{H}}_a$, можна отримати з (6) з урахуванням (20), і вони мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} &\nabla \times \dot{\vec{H}}_a = (\sigma + i\omega\varepsilon)\dot{\vec{E}}_a, \\ &\nabla \times \dot{\vec{E}}_a = -i\omega\mu\dot{\vec{H}}_a. \end{aligned} \quad (21)$$

Вводячи вектор $\tilde{\vec{\Pi}}_a = \dot{\vec{E}}_a \times \overset{*}{\vec{H}}_a$, по аналогії з виразу (17) для $\nabla \cdot \tilde{\vec{\Pi}}_a$ з урахуванням (8) отримуємо:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \tilde{\vec{\Pi}}_a = \nabla \cdot \left(\dot{\vec{E}}_a \times \overset{*}{\vec{H}}_a\right) = \\ &= \left[\dot{\vec{E}}_a \cdot \left(\nabla \times \left(\overset{*}{\vec{H}}_a\right)\right) - \overset{*}{\vec{H}}_a \cdot \left(\nabla \times \left(\dot{\vec{E}}_a\right)\right)\right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Оскільки

$$\nabla \times \left(\overset{*}{\vec{H}}_a\right) = (\sigma - i\omega\varepsilon)\overset{*}{\vec{E}}_a,$$

то вираз для $\nabla \cdot \tilde{\vec{\Pi}}_a$ набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \tilde{\vec{\Pi}}_a = P + iQ;\ P = \sigma\dot{\vec{E}}_a \cdot \overset{*}{\vec{E}}_a; \\ &Q = -\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}_a \cdot \overset{*}{\vec{E}}_a + \omega\mu\dot{\vec{H}}_a \cdot \overset{*}{\vec{H}}_a. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким чином, вираз (23) за розмірностями та фізичним змістом співпадає з виразом (19) для послідовного R, L, C-контура, що є додатковим аргументом для представлення густини тепловиділення $F_T(T)$ в рівнянні (1) через $\nabla \cdot \vec{\Pi}$.

Особливості застосування теореми Умова-Пойнтинга для аналізу електротеплового стану фотобатарей та сонячних колекторів у термінах інтегральних характеристик.

Представимо в (2) густину тепловиділення $F_T(T)$ у вигляді:

$$F_T(T) = F_{+TS}(T) + F_{\pm TV}(T), \quad (24)$$

де $F_{+TS}(T)$ – густина позитивного тепловиділення внаслідок поглинання сонячного випромінювання, яка може бути приведена до дивергентної форми; $F_{\pm TV}(T)$ – густина позитивного або негативного тепловиділення, яка не може бути перетворена до дивергентної форми.

Тоді, покладаючи:

$$F_{+TS}(T) = \sum_{i=1}^{n} \nabla \cdot \vec{\Pi}_i, \quad (25)$$

де $\vec{\Pi}_i$ – вектор Умова-Пойнтинга для обраної частини випромінювання ω_i, з рівняння (2), (3), (24) на основі теореми про дивергенцію отримуємо наступне диференціальне рівняння:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho C_p T\right\} dV = Q_{+u} + Q_{\pm n} + Q_{\pm v}. \qquad (26)$$

Тут

$$Q_{+u} = \sum_{i=1}^{n} \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}; \quad Q_{\pm n} = \oint_S \vec{q} \cdot d\vec{S};$$
$$Q_{\pm v} = \int_V F_{-TV}\left(T\right) dV, \qquad (27)$$

де $\vec{q}$ – густина теплового потоку на поверхні, який передається в оточуюче середовище конвекцією або тепловим випромінюванням і може бути як позитивним, так і негативним. Величина $Q_{\pm v}$ також може бути як позитивною, так і негативною в залежності від того, які фізико-хімічні процеси мають місце в середовищах при дії сонячного випромінювання (полімеризація, затвердження, випаровування вологи тощо).

Якщо середовище суттєво не змінює свою форму в часі, то тоді похідну під інтегралом у лівій частині рівняння (1) можна винести за знак інтеграла, і за припущення про те, що комплекс ρC_p слабо залежить від просторових координат і (або) температури T, можна отримати звичайне диференціальне рівняння для зміни в часі середньої по об’єму V температури T_{cp} :

$$\rho C_p V \frac{dT_{cp}}{dt} = Q_{+u} + Q_{\pm n} + Q_{\pm v}; \; T_{cp} = \frac{\int_V T dV}{V}. \qquad (28)$$

Це рівняння дає можливість здійснити наступний аналіз температурного стану фотобатарей, сонячних колекторів, а також інших складових системи енергопостачання з відновлюваними джерелами енергії, а саме:

1. Визначити значення середньої температури в сталому стані, коли $\frac{dT_{cp}}{dt} = 0$.

2. Визначити умови регулювання заданої середньої температури при зміні енергії сонячного випромінювання Q_{+u} за рахунок зміни $Q_{\pm n}$, $Q_{\pm v}$.

3. Здійснити аналіз стійкості теплового стану того чи іншого елемента системи по відношенню до малих збурень, у тому числі з урахуванням навантаження та допоміжних систем акумулювання електричної та теплової енергії.

Висновки. 1. На основі використання системи рівнянь Максвелла для обраної частоти сонячного випромінювання в термінах дійсних та комплексних змінних обґрунтовано представлення густини омічного тепловиділення при поглинанні сонячного випромінювання через дивергенцію вектора Умова-Пойнтинга.

2. З використанням теореми про дивергенцію для векторних інтегральних операцій здійснено перехід від диференціального рівняння теплової провідності в часткових похідних для температури до звичайного диференціального рівняння відносно усередненої по об’єму температури з інтегральними джерелами тепловиділення. Це дає можливість здійснити аналіз теплового стану фотобатарей та сонячних колекторів з урахуванням параметрів навантаження та систем акумулювання електричної та теплової енергії.

1. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

2. *Ладиков-Роев Ю.П., Черемных О.К.* Математические модели сплошных сред/монография/НАН Украины, Нац. косм. агенство Украины, Ин-т косм. исслед. – К.: Наукова думка, 2010. – 550, [2] с.: рис. – (Проект "Наукова книга"). – Библиогр.: – С. 540–548.

3. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / пер. с англ. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна, Л.З. Румшиского, Л.Я. Цлафа, под общей ред. И.Г. Арамановича. – Москва: Изд-во "Наука", 1973. – 832 с.

4. *Борен К.*, *Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами/монография/ пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 664 с.