УДК 510.63

Б. Є. Рицар

ПРОСТИЙ ВІЗУАЛЬНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ЛОГІКОВИХ ПОХІДНИХ ДОВІЛЬНИХ ПОРЯДКІВ

A new approach to defining logic derivatives of the function given by visually as a graph so-called pattern of logic function has been considered. Compared with the Karnaugh maps method the suggested patterns method differs simpler realization and the ability to visually determine different types of the logic derivatives of arbitrary order of functions of many variables. Suggested approach is illustrated by examples.

Keywords: *logic (Boolean) derivative, pattern of Boolean function, ternary conjuncterm, canonical set-theoretical form, N-polarity variables.*

Розглянуто новий підхід до визначення логікових похідних від функції, що задана візуально у вигляді графа – так званого візерунка логікової функції. Порівняно з методом карт Карно пропонований метод візерунків відрізняється простішою реалізацією та можливістю візуально визначати різні типи логікових похідних довільних порядків від функцій багатьох змінних. Запропонований підхід проілюстровано на прикладах.

Ключові слова: *логікова (булова) похідна, візерунок логікової функції, трійковий кон'юнктерм, досконала теоретико-множинна форма, N-полярність змінних.*

Логікове диференційне числення (*logic differential calculus*) [1, 7, 10, 11] належить до перспективних напрямків алгебри логіки, орієнтованих переважно на аналіз динамічних характеристик цифрових пристроїв і систем. Практичні можливості техніки логікових похідних доволі широкі [2, 4–7, 9–11] – це тестування мереж, виявлення неістотних змінних, визначення точок пошкодження у цифровій системі, виявлення і корекція помилок у каналах зв'язку, дослідження властивостей спеціальних функцій (розпізнавання симетрії і симетрування функцій), як метод функційної декомпозиції, для розв'язання логікових рівнянь, а також для спектральних перетворень над діаграмами розв'язків та ін.

Основною перепоною широкого застосування техніки логікових похідних у різних аспектах дослідження цифрових пристроїв і систем, яка переважно ґрунтується на аналітичному чи/і векторно-матричному методах [1, 2, 5, 7, 9–11], є складність практичної реалізації у разі визначення (обчислення) їх високих порядків та великої кількості змінних. Зокрема, щоб обчислити логікову похідну щодо одної змінної для функції від n змінних, потрібно мати розмірність матриці $2^n \times 2^n$. Зазначено [2, 7, 9], що шуканий результат легше одержати візуально методом карт Карно. Але цьому методу властиві певні недоліки – це насамперед обмеження щодо кількості змінних (не більше 5) та складність визначення різних типів логікових похідних вищих порядків.

У цій роботі пропонуємо візуальний метод визначення логікових похідних, оснований на графовому зображенні заданої функції – так званому *візерунку логікової функції* [3]. Запропонований метод візерунків, на відміну від карт Карно та інших візуальних методів, не має зазначених вище недоліків і може мати широке застосування для різних практичних задач.

1. Основні положення. В основі обчислення логікової похідної (*logic derivative*) – поняття зміни логікової функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ щодо зміни певної її змінної x_i, і ця найменша зміна дорівнює лог. 1. Наведемо визначення основних типів логікових похідних [1, 9, 11].

Логікову похідну від функції $f(x_1,...,x_i,...,x_n)$ щодо x_i (*simple derivative*), тобто похідну 1-го порядку $\partial f/\partial x_i$, можна визначити операцією суми за *mod*2:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=f(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)\oplus f(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n). \qquad (1)$$

Наприклад, логікову похідну від функції $f=x_1x_2\vee x_3$ щодо x_3 визначають так:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(x_1x_2\vee x_3)=(x_1x_2\vee 1)\oplus(x_1x_2\vee 0)=1\oplus x_1x_2=\overline{x_1x_2}.$$

Змішаною похідною (*k-fold derivative*) *k*-го порядку $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}$ від функції *f* називають вираз, що має такий вигляд:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_{k-1}}\partial x_{i_k}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_{k-1}}}\right). \qquad (2)$$

Змішану похідну *k*-го порядку (2) обчислюють за співвідношенням (1) *k* разів, фіксуючи почергово змінні $x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_k}$ у довільному порядку:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right)\cdots\right)\right).$$

Векторна похідна (*vectorial derivative*) *k*-го порядку $\dfrac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_k})}$ від функції $f(x_1,x_2,...,x_n)$ щодо $x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},...,x_{\lambda_k}$ визначає умови, за яких функція *f* змінює значення при одночасній зміні значень *k* змінних $x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_k}$. Похідна *k*-го порядку від функції *f* щодо всіх її змінних дорівнює сумі за *mod* 2 усіх похідних 1-го, 2-го, ..., *k*-го порядків змішаних похідних щодо фіксованих змінних $x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_k}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_k})}=\bigoplus_{i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\oplus\bigoplus_{i,j;i\neq j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\oplus\bigoplus_{\substack{i,j,s;\\ i\neq j,i\neq s,j\neq s}}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}\oplus...\oplus\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}},$$

де $i,j,s,...=i_1,i_2,...,i_k$. (3)

Отже, якщо треба з'ясувати, за яких умов змінюватиметься значення, наприклад, функції $f(x_1,x_2,x_3)$ у разі одночасної зміни значень усіх її змінних, то необхідно обчислити її векторну похідну 3-го порядку виду:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\oplus\frac{\partial f}{\partial x_2}\oplus\frac{\partial f}{\partial x_3}\oplus\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\oplus\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}\oplus\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}\oplus\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3},$$

де після обчислення усіх похідних 1-го порядку $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}$ і змішаних похідних 2-го порядку $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}=\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}=\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)$, змішану похідну 3-го порядку можна обчислити через змішану похідну 2-го порядку, наприклад $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}$, так: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}=\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right)$.

З викладеного вище зауважимо, що аналітичне визначення логікових похідних k-их порядків навіть для функцій від кількох змінних вимагає чималих зусиль і часу, причому складність такого обчислення швидко зростає зі збільшенням n.

2. Візерунковий метод визначення логікових похідних. Розглянуті вище логікові похідні (1)–(3) значно простіше обчислити візуально за допомогою візерунка функції $f(x_1, x_2,...,x_n)$, вершинами якого є числові мінтерми заданої функції f [3].

Перепишемо (1) з урахуванням виразу $x_i \oplus \overline{x}_i = 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_1,...,x_i,...,x_n) \oplus f(x_1,...,\overline{x}_i,...,x_n) = f'(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)\,, \qquad (4)$$

де $f(x_1,...,x_i,...,x_n)$ – задана функція, а $f(x_1,...,\overline{x}_i,...,x_n)$ – функція, утворена заміною в досконалій ДНФ усіх x_i на $\overline{x}_i$ та $\overline{x}_i$ на x_i; наприклад, $f(\overline{x}_1,x_2,x_3)$ – це функція $f(x_1,x_2,x_3)$, у якій довільному набору $\langle\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\rangle$, $\sigma_i \in \{0,1\}$, змінних x_1,x_2,x_3 ставиться у відповідність її значення для набору $\langle\overline{\sigma}_1,\sigma_2,\sigma_3\rangle$.

Отже, з (4) випливає, що логікова похідна від довільного мінтерма функції f щодо змінної x_i – це кон'юнктерм (n–1)-рангу з усунутою (поглинутою) x_i. Наприклад, логікову похідну від мінтерма $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ щодо x_1 одержимо так:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \oplus x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 = (\overline{x}_1 \oplus x_1)\overline{x}_2\overline{x}_3 = \overline{x}_2\overline{x}_3\,.$$

У теоретико-множинному форматі (ТМФ) [8] виразу похідної $\overline{x}_2\overline{x}_3$ відповідає числовий кон'юнктерм 2-рангу: трійковий (–00) і десятковий (0,4).

Логікові похідні 1-го порядку від мінтермів функції $f(x_1, x_2,...,x_n)$ – це кон'юнктерми (n–1)-рангу. Їх на візерунку функції f відображають ребра, утворені двома сусідніми вершинами. Нижче подано візерунки функцій $f(x_1, x_2, x_3)$ (рис. 1) і $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (рис. 2), у яких виділено ребра, що відображають усі логікові похідні 1-го порядку від мінтермів цих функцій.

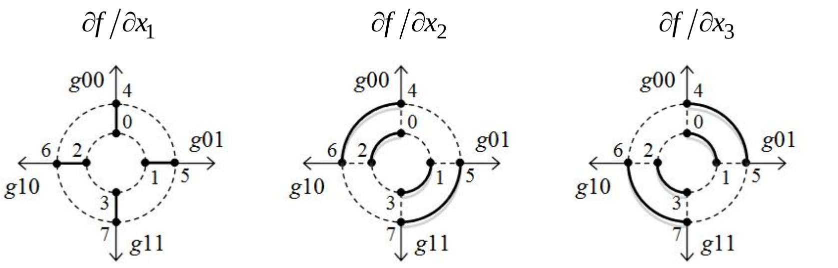

Рис. 1. Візерунки логікових похідних 1-го порядку від мінтермів функції $f(x_1, x_2, x_3)$.

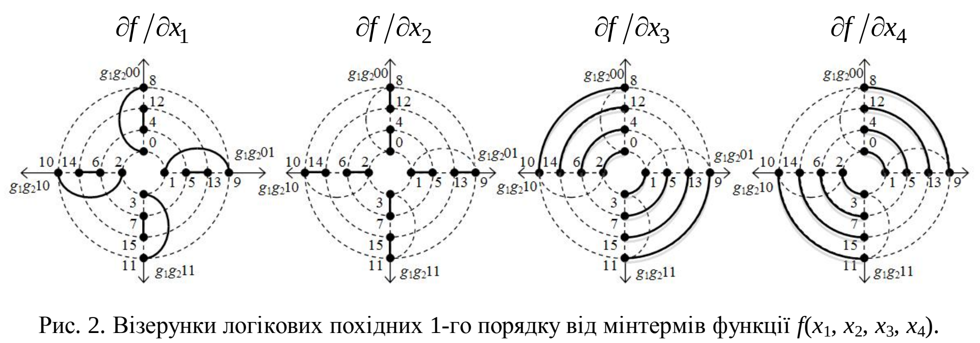

Рис. 2. Візерунки логікових похідних 1-го порядку від мінтермів функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Запропонований візуальний метод визначення логікових похідних ґрунтується на ідеї, що використовує властивість ізоморфності візерунків довільної логікової функції f від n змінних [3].

Суть пропонованого методу полягає у накладанні візерунка заданої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ на візерунок тої самої функції, яка має k ($k \in \{1, 2, ..., n\}$) інверсних змінних щодо яких диференціюється функція f. Усунувши, згідно з (4), вершини, що належать одночасно обом візерункам, утворений новий візерунок (після мінімізації функції, що її відображає) належить шуканій похідній функції f.

Візуально функція f задається на трафареті візерунка множиною s вершин, нумерація яких відповідає числовим мінтермам $m_1, m_2, ..., m_s$ досконалої ТМФ $Y^1 = \{m_1, m_2, ..., m_s\}^1$. Похідну k-го порядку визначаємо на трафареті візерунка з k інверсними змінними, який назвемо *трафаретом візерунка* з *N-полярністю*, де $N = 0,1,...$ – значення двійкового коду кортежа $\langle \sigma_1, ..., \bar{\sigma}_{i_1}, ..., \bar{\sigma}_{i_k}, ..., \sigma_n \rangle$, $\sigma_i \in \{0,1\}$, утвореного змінними функції f. Наприклад, якщо обчислювати похідну 1-го порядку від $f(x_1, x_2, x_3)$ щодо x_1, то маємо кортеж $\langle 1, 0, 0 \rangle$, значення якого $N = 4$, тобто трафарет візерунка буде з 4-полярністю функції $f(\bar{x}_1, x_2, x_3)$, а якщо шукати похідну 2-го порядку від $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ щодо x_1 і x_3, то код кортежа $\langle 1, 0, 1, 0 \rangle \equiv 10$ визначатиме трафарет візерунка з 10-полярністю функції $f(\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, x_4)$ і т. ін.

Отже, для візуального визначення логікових похідних 1-го порядку щодо x_i необхідно застосовувати трафарети візерунків з 2^{n-i}-полярністю, зокрема, для $\partial f / \partial x_1$ від $f(x_1, x_2, x_3)$ – трафарет візерунка з 4-полярністю функції $f(\bar{x}_1, x_2, x_3)$, для $\partial f / \partial x_2$ – трафарет візерунка з 2-полярністю функції $f(x_1, \bar{x}_2, x_3)$, а для $\partial f / \partial x_3$ – трафарет візерунка з 1-полярністю функції $f(x_1, x_2, \bar{x}_3)$ і т. ін. Для визначення змішаних (2) і векторних (3) похідних k-их порядків застосовуються трафарети візерунків з N-полярністю. Зокрема, для 2-го порядку від $f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n)$ щодо x_i і x_j число $N = 2^{n-i} + 2^{n-j}$.

На практиці трафарет візерунка з N-полярністю функції f зручно мати для більшої кількості змінних, оскільки він міститиме всі трафарети візерунків функцій від меншої кількості змінних [3].

Методом візерунків визначити логікову похідну k-го порядку, $k = 1, 2, ..., n$, від функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна за таким алгоритмом:

- побудувати візерунок заданої функції f, виділивши відповідні вершини;
- виділені вершини перекопіювати у трафарет візерунка з N-полярністю за місцем їх розташування на півосях візерунка заданої функції f;
- на побудованому таким чином візерунку з N-полярністю виділити вершини, що відповідають заданим мінтермам функції f;
- якщо значення заданого мінтерма m_i дорівнює значенню мінтерма виділеної вершини, то таку вершину з розгляду усунути (на підставі виразу $m_i \oplus m_i = 0$), позначивши її символом ×;
- функцію, яку відображає утворений візерунок, змінімізувати [3];
- змінімізований візерунок – це візуальне зображення шуканої похідної функції f, а зчитана з нього множина $Y^1 = \{\theta_1^{r_1}, \theta_2^{r_2}, ..., \theta_p^{r_p}\}^1$ – мінімальна ТМФ, де $\theta_i^{r_i}$ – i-й кон'юнктерм, тобто множина мінтермів i-го фрагмента візерунка; у разі потреби записати аналітичний вираз одержаної функції [8].

Приклад 1. Візерунковим методом визначити логікову похідну 1-го порядку від $f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$ щодо x_2.

Розв'язання. Задана функція f має досконалу ТМФ $Y^1 = \{0, 2, 6\}^1$, а її візерунок на рис. 3*а*. Щоб визначити $\partial f/\partial x_2$, застосуємо трафарет візерунка з 2-полярністю функції $f^*(x_1, \bar{x}_2, x_3)$ (*б*), на який накладемо візерунок (*а*) функції f. Унаслідок цього виділені вершини візерунка (*а*) займуть вершини візерунка (*б*): 0→2, 2→0 і 6→4. Виділивши на (*б*) вершини 0; 2; 6, що відповідають заданим мінтермам, виконаємо операцію $f \oplus f^*$, у результаті якої вершини 0 і 2 з розгляду будуть усунені (їх позначено символом ×), що показано на візерунку (*в*).

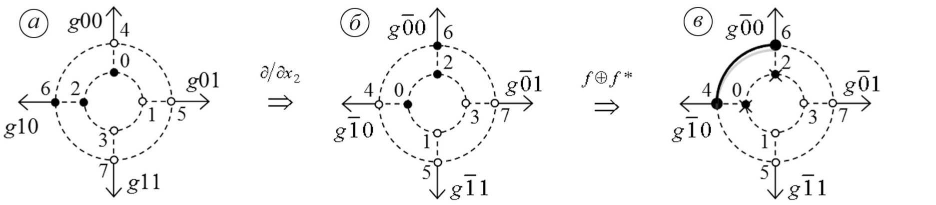

Рис. 3. Візерунки заданої функції f (*а*), функції f^* (*б*) та логікової похідної $\partial f/\partial x_2$ (*в*).

Виділене на візерунку (*в*) ребро (4,6) відображає шукану похідну 1-го порядку $\partial f/\partial x_2$. Це кон'юнктерм 2-рангу (1–0) заданої функції f, мінімальна ТМФ якої $Y^1 = \{(1-0)\}^1$.

Відповідь. Логікова похідна 1-го порядку $\partial f / \partial x_2 = x_1 \bar{x}_3$.

Описаний вище алгоритм лежить також в основі визначення як змішаних, так і векторних логікових похідних k-их порядків. Проте, якщо у разі змішаної похідної k-го порядку (оператор $\overset{\partial^k / \partial x_1, \partial x_2, \ldots, \partial x_k}{\Rightarrow}$) кожна наступна похідна 1-го порядку визначається попереднім результатом (2), то для визначення векторної похідної k-го порядку (3) (оператор $\overset{\partial^k / \partial (x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\Rightarrow}$) досить двох трафаретів візерунків, так як у разі визначення похідної 1-го порядку (див. далі приклади).

Пропонований алгоритм візуального визначення логікових похідних k-их порядків відрізняється значно меншою трудомісткістю порівняно з методом карт Карно [2, 7, 8]. Для порівняльної оцінки часової складності досить розглянути тривіальний випадок знаходження логікової похідної 1-го порядку щодо змінної x_i від $f(x_1, x_2, x_3)$. Методом карт Карно операція суми за *mod* 2 виконується над усіма парами мінтермів, сусідніх щодо x_i. При цьому зі збільшенням порядку k, починаючи з $n \geq 5$, візуальні властивості карти Карно взагалі втрачаються. Методом візерунків операція суми за *mod* 2 виконується на трафареті візерунка шуканої похідної тільки над виділеними вершинами, перекопійованими з візерунка заданої функції f, і вершинами, що відповідають її мінтермам. Це забезпечує порівняно меншу кількість зазначених операцій і, відповідно, менший час, необхідний на реалізації алгоритму. Понад то від збільшення n кількість операцій не залежить, а візуальні властивості методу не втрачаються.

Переваги методу візерунків над аналітичним і картою Карно для візуального визначення логікових похідних k-х порядків ілюструють розглянуті далі приклади, які з метою порівняння запозичено з праць відомих учених.

Приклад 2. Візерунковим методом визначити змішані похідні 2-го порядку щодо x_1 і x_2 та 3-го порядку від функції $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3$ ([1], с. 65).

Розв'язання. Задана функція f має ТМФ $Y^1 = \{(11–), (1-0)\}^1 = \{(6,7), (4,6)\}^1$; її візерунок – на рис. 4*а*. Щоб знайти $\partial^2 f/\partial x_1 \partial x_2$, визначимо спочатку похідну 1-го порядку, наприклад $\partial f/\partial x_1$. У трафарет візерунка з 4-полярністю (*б*) перенесемо вершини візерунка *а*: 4→0, 6→2, 7→3. На візерунку (*б*) виділимо вершини 4, 6 і 7, що відповідають заданим мінтермам. Для визначення шуканої похідної застосуємо трафарет візерунка з 6-полярністю (*в*), у якому виділимо вершини 0, 2, 3, 4, 6, 7 функції $f(\overline{x}_1, x_2, x_3)$ візерунка (*б*), та перенесемо їх у візерунок (*в*) за місцем розташування у візерунку (*б*). Після усунення продубльованих вершин (×) одержимо візерунок (*в*) функції $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, x_3)$, що відображає змішану похідну 2-го порядку $\partial^2 f/\partial x_1 \partial x_2$ від заданої функції *f*.

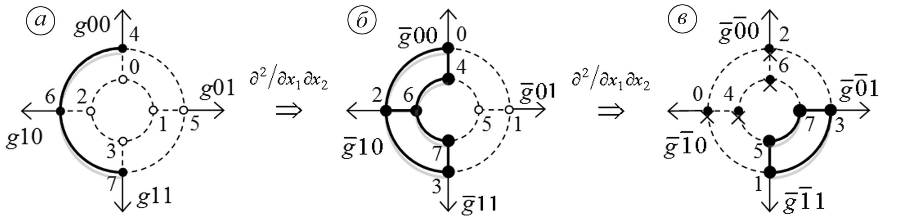

Рис. 4. Візерунки заданої функції (*а*), похідної 1-го порядку $\partial f/\partial x_1$ (*б*)
та змішаної похідної 2-го порядку $\partial^2 f/\partial x_1 \partial x_2$ (*в*).

Зчитаний з візерунка (*в*) фрагмент, складений з вершин 1, 3, 5 і 7, – це кон'юнктерм 1-рангу (1,3,5,7), який відображає мінімальну ТМФ $Y^1 = \{(--1)\}^1$ заданої функції *f*. Отже, шукана похідна $\partial^2 f/\partial x_1 \partial x_2 = x_3$.

Щоб визначити векторну похідну 3-го порядку $\partial^3 f/\partial(x_1, x_2, x_3)$, застосуємо трафарет візерунка з 7-полярністю (рис. 5*б*). Виконавши відповідні процедури, одержимо візерунок шуканої похідної (*б*).

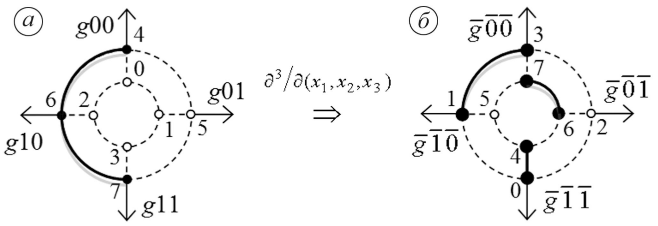

Рис. 5. Візерунки заданої функції (*а*) і її векторної похідної 3-го порядку $\partial^3 f/\partial(x_1, x_2, x_3)$ (*б*).

З візерунка (*б*) логікової функції $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, x_3)$ одержимо її мінімальну ТМФ $Y^1 = \{(0,4),(1,3),(6,7)\}^1 = \{(-00),(0-1),(11-)\}^1$.

Відповідь. $\partial^3 f \big/ \partial(x_1, x_2, x_3) = = \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2$. !!!

Приклад 3. Візерунковим методом визначити векторну похідну 2-го порядку від функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \overline{x}_2) x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$ щодо змінних x_2 і x_4 [9, с. 65].

Розв'язання. Задана функція *f* має досконалу ТМФ $Y^1 = \{2,3,10,11,13,14,15\}^1$; її візерунок – на рис. 6*а*. Щоб знайти похідну $\partial^2 f \big/ \partial(x_2, x_4)$, застосуємо трафарет з 5-полярністю для $f(x_1, \overline{x}_2, x_3, \overline{x}_4)$ (*б*), у якому виділимо відповідні вершини. Усунувши з (*б*) вершини 10, 11, 14 і 15 (×), одержимо візерунок функції шуканої похідної. Мінімальна ТМФ $Y^1 = \{(2,3,6,7),(8),(13)\}^1 = \{(0-1-),(1000),(1101)\}^1$.

Відповідь. $\partial^2 f \big/ \partial(x_2, x_4) = \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$.

Приклад 4. Візерунковим методом визначити векторну похідну 2-го порядку від функції $f(a,b,c,d,e) = a\overline{c} \vee abd \vee bde \vee \overline{b}\overline{e}$ щодо змінних *a* і *e* [2, с. 309].

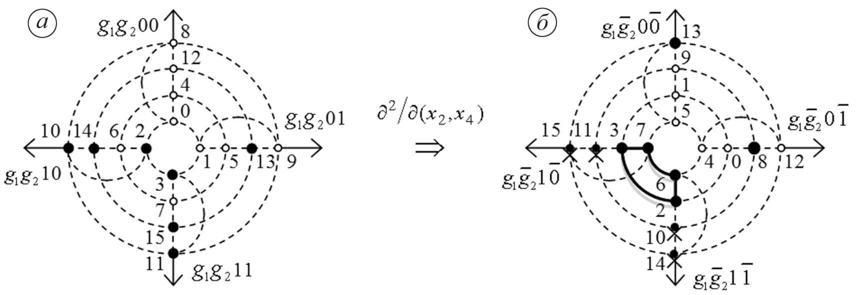

Рис. 6. Візерунки заданої функції (*а*) і її векторної похідної 2-го порядку $\partial^2 f/\partial(x_2, x_4)$ (*б*).

Розв'язання. ТМФ заданої функції $Y^1 = \{(1-0--),(11-1-),(-1-11),(-0--0)\}^1$, її досконала ТМФ $Y^1 = \{0,2,4,6,11,15,16,17,18,19,20,22,24,25,26,27,30,31\}^1$, а її візерунок – на рис. 7*а*. Щоб знайти $\partial^2 f \big/ \partial(a,e)$, застосуємо трафарет візерунка (*б*) з 17-полярністю для $f(\overline{a},b,c,d,\overline{e})$. Усунувши з (*б*) продубльовані вершини (×), одержимо візерунок (*в*) для $f(\overline{a},b,c,d,\overline{e})$, у якому залишені вершини 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 31 з'єднаємо між собою ребрами. Візерунок змінімізованої функції *f*, що відображає логікову похідну $\partial^2 f \big/ \partial(a,e)$, зображено на рис. 7*г*.

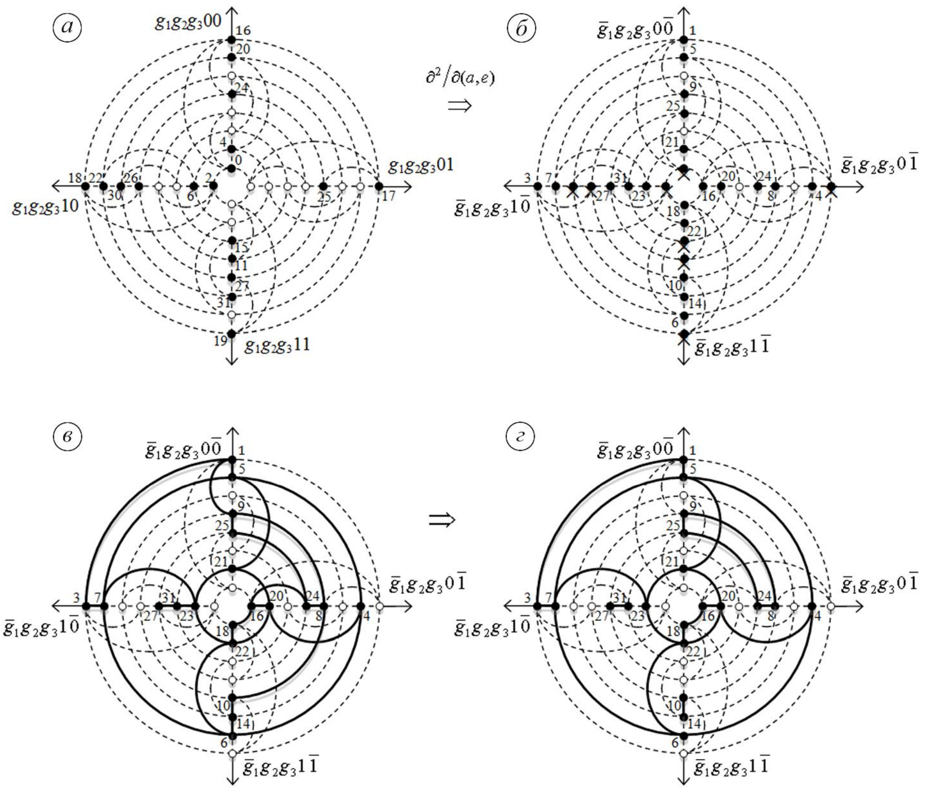

Рис. 7. Візерунки заданої функції (*а*), функції $f(\overline{x}_1, x_2, x_3, x_4, \overline{x}_5)$ (*б*) та векторної похідної 2-го порядку $\partial^2 f/\partial(a, e)$ до мінімізації (*в*) і після мінімізації (*г*).

Зчитуючи з (*г*) утворені фрагменти $(4,5,6,7,20,21,22,23) \Rightarrow \begin{pmatrix} 00100 \\ 10111 \end{pmatrix} \Rightarrow (-01--)$,

$(1,3,5,7) \Rightarrow \begin{pmatrix} 00001 \\ 00111 \end{pmatrix} \Rightarrow (00--1)$, $(8,9,24,25) \Rightarrow \begin{pmatrix} 01000 \\ 11001 \end{pmatrix} \Rightarrow (-100-)$, $(16,18,20,22) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 10000 \\ 10110 \end{pmatrix} \Rightarrow (10--0)$, $(10,14) \Rightarrow \begin{pmatrix} 01010 \\ 01110 \end{pmatrix} \Rightarrow (01-10)$ і $(27,31) \Rightarrow \begin{pmatrix} 11011 \\ 11111 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow (11-11)$, одержимо мінімальну ТМФ шуканої похідної заданої функції *f*:

$$Y^1 = \{(-01--),(00--1),(-100-),(10--0),(01-10),(11-11)\}^1 .$$

Відповідь. $\partial^2 f \big/ \partial(a,e) = \bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b}e \vee b\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{b}\bar{e} \vee \bar{a}bd\bar{e} \vee abde$.

ВИСНОВКИ

Порівняно з відомими візуальними методами візерунковий метод визначення різних типів логікових похідних довільних порядків від функцій багатьох змінних відрізняється простішою реалізацією. Запропонований метод можна застосовувати також до функцій, заданих, наприклад, таблицею істинності чи досконалою ДНФ.

1. *Горбатов В. А.* Основы дискретной математики. – М.: Высш. шк., 1986. – 311 с.
2. *Закревский А. Д., Поттосин Ю. В., Черемисинова Л. Д.* Логические основы проектирования дискретных устройств. – М.: Физматлит, 2007. – 592 с.
3. *Рицар Б. Є.* Візерунки булових функцій: метод мінімізації // УСИМ. – 2007. – № 3. – С. 34–51.
4. *Логическое* дифференциальное исчисление: достижения, тенденции и приложения / С. Янушкевич, Д. Бохман, Р. Станкович, Ж. Тошич, В. Шмерко // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 6. – С. 155–170.
5. *Astola J. T., Stankovic R. S.* Fundamentals of Switching Theory and Logic Design, Springer. – 2006. – P. 235–250.
6. *Davio M.* Symmetric discrete functions // Philips Res. Repts. – 1972. – **27**, № 5. – P. 405–445.
7. *Posthoff C., Steinbach B.* Logic Functions and Equations: Binary Models for Computer Science. – Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2004.
8. *Rytsar B., Romanowski P., Shvaj A.* Set-theoretical Constructions of Boolean Functions and theirs Applications in Logic Synthesis // Fundamenta Informaticae. – 2010. – **99**, № 3. – P. 339–354.
9. *Steinbach B., Posthoff C.* Boolean Differential Calculus / Eds.: T. Sasao, J. T. Butler // Progress in Applications of Boolean Functions. – 2010. – P. 55–78.
10. *Schneeweiss W. G.* Boolean Functions with Engineering Applications and Computer Programs. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. – 264 p.
11. *Thayse A.* Boolean Calculus of Differences. – Berlin: Springer-Verlag, 1981. – P. 50–130.

Національний університет "Львівська політехніка"

Одержано
25.01.2013