

УДК 519.6:621.396

М. І. Андрійчук

СИНТЕЗ ПЛОСКОЇ ГЕКСАГОНАЛЬНОЇ АНТЕННОЇ РЕШІТКИ ЗА ЗАДАНОЮ ЕНЕРГЕТИЧНОЮ ДІАГРАМОЮ СПРЯМОВАНOSTI

Variational approach is applied for solving the synthesis problem of plane hexagonal array according to the prescribed power directivity pattern (DP). The mean-square deviation of the prescribed and synthesized DPs in sum with squared norm of currents in the array elements is used as criterion of optimization. The investigation of solution to the respective nonlinear equation has been carried out. The numerical results testify the effectiveness of the approach proposed.

Keywords: *power DP, nonlinear equation, non-uniqueness and bifurcation of solutions, numerical optimization.*

Для розв'язання задачі синтезу плоскої гексагональної решітки за енергетичною діаграмою спрямованості (ДС) застосовано варіаційний підхід. За критерій оптимізації вибрано середньоквадратичне відхилення заданої і синтезованої ДС в сумі з квадратом норми струмів на елементах решітки. Проведено дослідження одного із розв'язків відповідного нелінійного рівняння. Числові результати синтезу підтверджують ефективність запропонованого підходу.

Ключові слова: *енергетична ДС, нелінійне рівняння, неєдиність і біфуркація розв'язків, числова оптимізація.*

Зростання вимог до антенних систем на сучасному етапі зумовлює подальший розвиток класичної теорії антенних решіток [2, 5, 9, 14], а також впровадження нових методів [6, 15, 17], спрямованих на розв'язання практично важливих задач. При цьому ставлять вимоги управління характеристиками спрямованості решіток у реальному масштабі часу, врахування взаємного впливу випромінювачів, завадостійкості тощо.

У багатьох практичних застосуваннях на етапі проектування антенних систем ставлять вимоги лише до амплітудної чи енергетичної ДС [1, 10, 11]. Довільність фазової ДС використовують при цьому для покращення наближення синтезованої ДС до заданої. При використанні такої постановки задачі синтезу виникають класи нелінійних задач, характерними властивостями яких є неєдиність розв'язків, їх галуження та біфуркація.

Властивість розв'язків цих задач залежить від електричного розміру решітки, її геометрії, а також форми заданої енергетичної ДС. З практичного погляду, існування багатьох розв'язків, які створюють одну і ту ж або близьку до заданої ДС, дає можливість вибрати той розв'язок, який має простішу інженерну реалізацію.

Дослідження розв'язків нелінійних задач синтезу плоских решіток суттєво відрізняється від такого дослідження для лінійних решіток. Зокрема, на відміну від існуючих точок біфуркації для одного із розв'язків відповідного рівняння Ейлера, для розв'язків задачі синтезу плоских решіток характерними є лінії біфуркації розв'язків. Задача їх знаходження є недостатньо вивченою двопараметричною нелінійною задачею; один із можливих підходів до її розв'язання запропоновано у [12].

Тут розглянемо варіаційну постановку задачі синтезу плоскої гексагональної решітки за заданою енергетичною ДС. Задачу зведено до розв'язування нелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна [3]. Запропоновано методи знаходження ліній біфуркації розв'язків та варіант методу послідовних наближень

© М. І. Андрійчук, 2013

розв'язування отриманого нелінійного рівняння, наведено приклади синтезу двох енергетичних ДС.

Постановка задачі. Розглянемо плоску гексагональну решітку, яка розміщена в площині xOy декартової системи координат і містить $M = 2M_2 + 1$ лінійних підрешіток. Кожна із лінійних підрешіток має, відповідно, парну або непарну кількість випромінювачів, загальна кількість випромінювачів у решітці – N . Геометрію решітки наведено на рис. 1.

У багатьох випадках під час розгляду задач синтезу обмежуються не повною ДС решітки, а тільки її множинкою [1]. Для гексагональної решітки множник має такий вигляд:

$$f(s_1, s_2) = \mathbf{A}\mathbf{I} \equiv \sum_{m=-M_2}^{M_2} \sum_{n=-N_1(m)}^{N_1(m)} I_{nm} e^{i(c_1 ns_1 + c_2 ms_2)}, \quad (1)$$

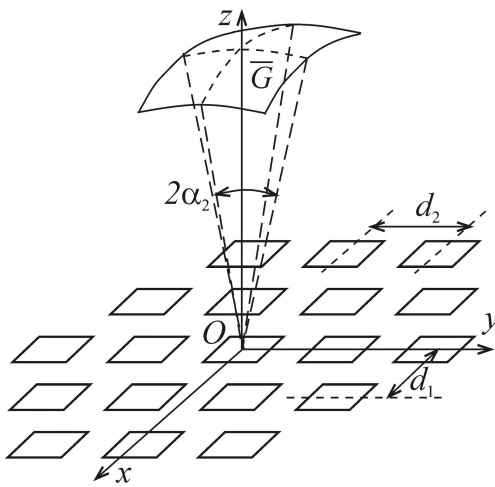


Рис. 1. Геометрична схема задачі.

де $s_1 = \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\sin \alpha_1}$, $s_2 = \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sin \alpha_2}$ – узагальнені кутові координати, $c_1 = kd_1 \sin \alpha_1$, $c_2 = kd_2 \sin \alpha_2$, $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число, d_1 і d_2 – відстані між випромінювачами по осях Ox і Oy відповідно; α_1 і α_2 – кути, у межах яких задана енергетична ДС $N_0(s_1, s_2)$ (поза цими кутами $N_0(s_1, s_2) \equiv 0$).

Функція $f(s_1, s_2) \in 2\pi/c_1$ -періодичною відносно змінної s_1 і $2\pi/c_2$ -періодичною відносно змінної s_2 . Область зміни координат, s_1 і s_2 , які належать одному періоду, позначимо

$$\Omega = \{(s_1, s_2) : |s_1| \leq \pi/c_1, |s_2| \leq \pi/c_2\}.$$

Формула (1) для ДС $f(s_1, s_2)$ – лінійний оператор A , який діє із комплекснозначного простору $H_I = C^N$ у простір комплекснозначних неперервних функцій двох змінних, визначених у області Ω . Нехай задана енергетична ДС $N_0(s_1, s_2)$ відмінна від тотожного нуля в області $\bar{G} \subseteq \Omega$, а на множині Ω/\bar{G} тотожно дорівнює нулю. Задачу синтезу формулюємо як задачу мінімізації функціонала

$$\sigma_\alpha(\mathbf{I}) = \|N_0 - |A\mathbf{I}|^2\|_{C_\Omega^{(2)}}^2 + \alpha \|\mathbf{I}\|_{H_I}^2, \quad (2)$$

де $\|\cdot\|_{C_\Omega^{(2)}}$ і $\|\mathbf{I}\|_{H_I}$ – норми у просторах ДС і струмів відповідно, які визначають за допомогою скалярних добутків

$$\|f\|_{C_\Omega^{(2)}}^2 = (f_1, f_2)_{C_\Omega^{(2)}} = \iint_{\Omega} f_1(s_1, s_2) f_2^*(s_1, s_2) ds_1 ds_2, \quad (3)$$

$$\|\mathbf{I}\|_{H_I}^2 = (\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)_{H_I} = \frac{4\pi^2}{c_1 c_2} \sum_{m=-M_2}^{M_2} \sum_{n=-N_1(m)}^{N_1(m)} I_{1nm} I_{2nm}^*. \quad (4)$$

Використовуючи необхідну умову мінімуму функціонала (рівність нулю його похідної Гато), отримаємо нелінійну систему рівнянь відносно компонент ком-

плексного вектора \mathbf{I} в просторі H_1 . В операторній формі цю систему запишемо так [11]:

$$\alpha \mathbf{I} - 2A^*(N_0 \mathbf{A} \mathbf{I}) = -2A^*(|\mathbf{A} \mathbf{I}| \mathbf{A} \mathbf{I}). \quad (5)$$

Тут оператор A^* – спряжений до A , він визначається з умови рівності скалярних добутків $(\mathbf{A} \mathbf{I}, f)_{C^{(2)}_\Omega} = (\mathbf{I}, A^* f)_{H_1}$ і має вигляд

$$A^* f = \frac{c_1 c_2}{4\pi^2} \iint_{\Omega} f(s_1, s_2) e^{-i(c_1 n s_1 + c_2 m s_2)} ds_1 ds_2. \quad (6)$$

Якщо подіяти на обидві частини рівняння (5) оператором A , то отримаємо еквівалентне нелінійне інтегральне рівняння типу Гаммерштейна відносно функції f

$$\alpha f - 2AA^*(N_0 f) = -2AA^*(|f|^2 f). \quad (7)$$

Ядро оператора AA^* має вигляд

$$K(c_1, c_2, s_1, s_1', s_2, s_2') = \frac{\sin[c_1(N_1(0) - 0,5)(s_1 - s_1')]}{\sin(0,5c_1(s_1 - s_1'))} +$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{M_2} \cos mc_2(s_2 - s_2') \begin{cases} \frac{\sin[c_1(N_1(m) - 0,5)(s_1 - s_1')]}{\sin(0,5c_1(s_1 - s_1'))}, & N_1(m) \text{ і } \text{ä} \text{ä} \text{ä} \text{ä} \text{ä}, \\ 2 \sum_{n=1}^{N_1(m)} \cos[c_1(n - 0,5)(s_1 - s_1')], & N_1(m) \text{ і } \text{ä} \text{ä} \text{ä} \text{ä} \text{ä}. \end{cases} \quad (8)$$

Ядро (8) інтегрального рівняння (7) – вироджене і дійсне. Оскільки рівняння (5) і (7) – нелінійні, вони можуть мати неєдиний розв'язок. Дослідження кількості розв'язків та їхніх властивостей проводять за методикою [3]. На практиці розв'язання рівнянь (5) і (7) проводять методами послідовних наближень. Найпростіший із них (для рівняння (7)) такий:

$$f_{n+1} = \theta f_n + (1 - \theta) B(f_n), \quad (9)$$

де оператор B визначають таким чином:

$$B(N_0, f) = \frac{2}{\alpha} AA^*(N_0 f - |f|^2 f). \quad (10)$$

Значення $\theta \in [0,1]$ – додатковий оптимізаційний параметр, який використовують для покращення збіжності ітераційного процесу. Збіжність цього методу залежить також від величини параметра α , заданої енергетичної ДС $N_0(s_1, s_2)$ і геометрії решітки.

Задача знаходження ліній біфуркації нульового розв'язку. При довільних значеннях параметрів c_1 і c_2 , які містяться у ядрі (8), рівняння (7) має очевидний розв'язок $f = 0$. Для дослідження процесу появи ненульових розв'язків, або так званої біфуркації розв'язків, використовуємо методикою [3]. Згідно з цією методикою, для дослідження властивостей розв'язків рівняння (7) використовуємо відповідне лінійне рівняння [11]

$$\alpha f = 2AA^*(N_0 f). \quad (11)$$

На відміну від задачі синтезу за заданою амплітудною ДС, де досліджували галуження розв'язків від первинного ненульового розв'язку, тут досліджуємо виникнення розв'язків, первинним для яких є нульовий розв'язок, тобто біфуркацію розв'язків. Аналогічно, як і у випадку дослідження галуження розв'язків, знахо-

дження точок біфуркації зводиться до задачі на пошук власних значень рівняння (11), яке в розгорнутій формі має такий вигляд:

$$\varphi(s_1, s_2) = \lambda \frac{2}{\alpha} \iint_{\Omega} \varphi(s_1', s_2') N_0(s_1', s_2') K(c_1, c_2, s_1, s_1', s_2, s_2') ds_1' ds_2'. \quad (12)$$

Згідно з теорією нелінійних рівнянь, точками біфуркації можуть бути такі значення параметрів c_1 і c_2 , при яких рівняння (12) має ненульові розв'язки.

Використовуючи властивість виродженості ядра AA^* , зведемо рівняння (12) до еквівалентної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої аналітично залежать від параметрів c_1 і c_2 . З цією метою рівняння для власних функцій, яке відповідає (12), подамо у формі

$$\varphi(s_1, s_2) = \sum_{m=-M_2}^{M_2} \sum_{n=-N_1(m)}^{N_1(m)} x_{nm} e^{i(c_1 n s_1 + c_2 m s_2)}, \quad (13)$$

де

$$x_{nm} = \frac{c_1 c_2}{4\pi^2} \iint_{\Omega} N_0(s_1', s_2') \varphi(s_1', s_2') e^{-i(c_1 n s_1' + c_2 m s_2')} ds_1' ds_2'. \quad (14)$$

Помноживши обидві частини (13) на $N_0(s_1', s_2') e^{-i(c_1 n s_1' + c_2 m s_2')}$ при $k=1, \dots, N$ і проінтегрувавши по Ω , ми одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження величин x_{nm}

$$x_{kl} = \sum_{m=-M_2}^{M_2} \sum_{n=-N_1(m)}^{N_1(m)} a_{nm}^{(kl)}(c_1, c_2) x_{nm}, \quad k = -N_1(m), \dots, N_1(m), \quad l = -M_2, \dots, M_2, \quad (15)$$

де

$$a_{nm}^{(kl)} = \frac{c_1 c_2}{4\pi^2} \iint_{\Omega} N_0(s_1, s_2) e^{-i[(c_1(n-k)s_1 + c_2(m-l)s_2)]} ds_1 ds_2. \quad (16)$$

Матриця коефіцієнтів $a_{nm}^{(kl)}$ при цьому – самоспряжена і ермітова.

Отже, нелінійна двопараметрична спектральна задача, яка відповідає однорідній системі лінійних алгебраїчних рівнянь (15), може бути записана так:

$$A_N(c_1, c_2) \mathbf{x} \equiv (E_N - A_N(c_1, c_2)) \mathbf{x} = 0, \quad (17)$$

де A_N – матриця коефіцієнтів $a_{nm}^{(kl)}$, E_N – одинична матриця розмірності N . Для того, щоб система (15) мала відмінний від нуля розв'язок, необхідно, щоб виконувалась рівність

$$\Psi(c_1, c_2) = \det[E_N - A_N(c_1, c_2)] = 0. \quad (18)$$

Легко переконатися, що $\Psi(c_1, c_2)$ – дійсна функція. Справді, оскільки $A_N(c_1, c_2)$ – ермітова матриця, то $E_N - A_N(c_1, c_2)$ – також ермітова. Як відомо [4], визначник ермітової матриці – дійсна величина. Тобто $\Psi(c_1, c_2)$ – дійсна функція змінних c_1 і c_2 .

Отже, задачу про знаходження власних значень рівняння (12) або еквівалентної до нього системи (15) зведено до знаходження нулів функції $\Psi(c_1, c_2)$.

Розглядаючи рівняння $\Psi(c_1, c_2) = 0$ як задачу про знаходження неявно заданої функції $c_2 = c_2(c_1)$ в околі точки c_1 , отримуємо задачу Коші [7, 12]

$$\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{\Psi_{c_1}'(c_1, c_2)}{\Psi_{c_2}'(c_1, c_2)}, \quad (19)$$

$$c_2(c_1^{(0)}) = c_2^{(0)}. \quad (20)$$

Для знаходження початкової умови (20) будемо розглядати допоміжну нелінійну однопараметричну спектральну задачу, поклавши у (18) $c_2 = \beta c_1$, де β – дійсний коефіцієнт. В результаті отримаємо:

$$\tilde{A}_N(c_1)\tilde{\mathbf{x}} = A_N(c_1, \beta c_1)\tilde{\mathbf{x}} \equiv (E_N - \tilde{A}_N(c_1))\tilde{\mathbf{x}} = 0. \quad (21)$$

Рівняння (18), відповідне (21), запишемо так:

$$\Psi(c_1, \beta c_1) = \det[E_N - \tilde{A}_N(c_1)] = 0. \quad (22)$$

Нехай $c_1^{(0)}$ – розв'язок рівняння (22), тоді $(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) = (c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$ – власне значення задачі (13). Розв'язуючи задачу (19), (20) у деякому околі точки $c_1^{(0)}$, знаходимо спектральну лінію матриці-функції $A_N(c_1, c_2)$, тобто лінію $c_2(c_1)$, по якій відбувається біфуркація розв'язків.

Використовуючи знайдені розв'язки задачі Коші при фіксованих значеннях (c_1, c_2) , які є розв'язками задачі (19), (20), власні функції рівняння (12) визначають як власні вектори матриці $A_N(c_1, c_2)$.

Числові результати. Методику розв'язання задачі синтезу плоских антенних решіток і дослідження біфуркації розв'язків відповідного нелінійного інтегрального рівняння запропоновано в [13]. Знаходження ліній біфуркації розв'язків нелінійного рівняння (7) проведено для решітки з $N = 61$ елемента для заданої енергетичної ДС $N_0(s_1, s_2) = 1$ в області $\Lambda_c = \{(c_1, c_2) : 0 < c_1 \leq 2, 0; 0 < c_2 \leq 2, 0\}$ при різних значеннях параметра α у функціоналі (2). На першому етапі розв'язували одновимірні задачі на власні значення, при цьому задавали різні значення β і одновимірну задачу розв'язували на променях $c_2 = \beta c_1$. На рис. 2 наведено поведінку перших чотирьох власних значень одновимірної задачі при $\beta = 1, 0$, а на рис. 3 ці результати наведено для $\beta = 0, 2$. Слід зауважити, що при зменшенні параметра β точки, у яких значення $\lambda_i = 1$, зсуваються вправо і відстань по осі c_1 між ними збільшується. Значення $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)}) = \beta c_1^{(i)}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ – точки біфуркації на площині (c_1, c_2) . Як показують числові результати, деякі криві власних значень λ_i перетинаються, що приводить до появи точок перетину відповідних ліній біфуркації на площині (c_1, c_2) . На цьому етапі точки $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)})$, для яких власні значення $\lambda^{(i)} = 1$, визначаються наближено із графічних даних.

На наступному етапі здійснюється уточнення значень $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)})$ шляхом розв'язування трансцендентного рівняння (18), при цьому точку $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)})$ розглядають як початкове наближення. Для розв'язування рівняння (18) використовували метод половинного ділення.

На останньому етапі, після уточнення значень $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)})$, шляхом розв'язання задачі Коші (19), (20) визначають лінії біфуркації на площині (c_1, c_2) .

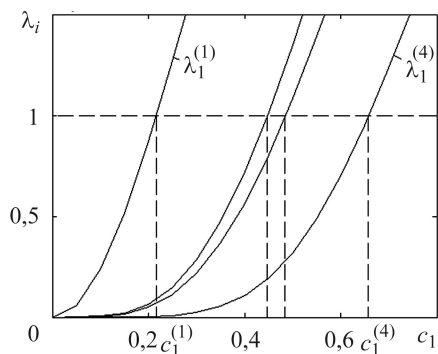


Рис. 2. Перші власні значення на промені $c_1 = c_2$; $\alpha = 0,5$.

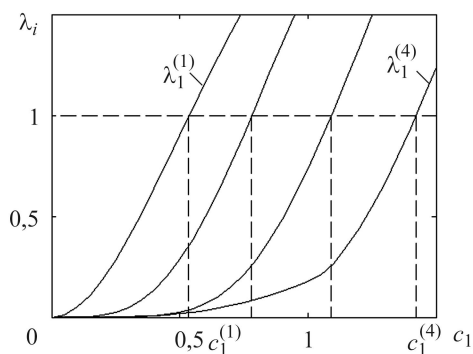


Рис. 3. Перші власні значення на промені $c_2 = 0,2c_1$; $\alpha = 0,5$.

На рис. 4 показано точки біфуркації для перших чотирьох власних значень $(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}) - (c_1^{(4)}, c_2^{(4)})$ на променях $c_2 = \beta c_1$. Відповідні лінії біфуркації, отримані шляхом розв'язування задачі Коші (19), (20), наведено на рис. 5. Номери кривих відповідають номерам власних значень рівняння (12). Зазначимо, що задачі уточнення коренів рівняння (18), а також коректного розв'язання задачі Коші (19), (20) є досить складними у обчислювальному відношенні, оскільки вимагають для їхнього розв'язання проведення низки обчислювальних експериментів із різними початковими параметрами.

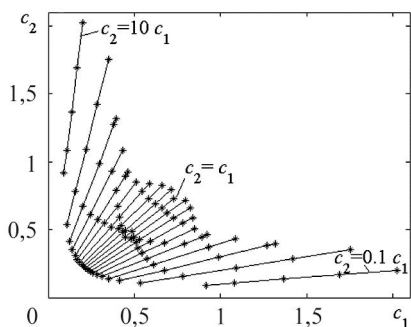


Рис. 4. Точки біфуркації на променях $c_2 = \beta c_1$.

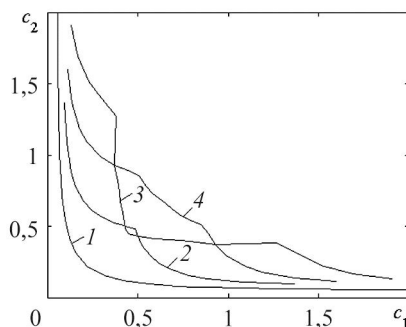


Рис. 5. Лінії біфуркації на площині (c_1, c_2) .

На рис. 6 і 7 наведено результати синтезу двох енергетичних ДС $N_0^1(s_1, s_2) \equiv 1$ і $N_0^2(s_1, s_2) = \begin{cases} 2\sqrt{s_1^2 + s_2^2} \sqrt{1 - s_1^2 - s_2^2}, & s_1^2 + s_2^2 \leq 1, \\ 0, & s_1^2 + s_2^2 > 1, \end{cases}$ у формі тіла обертання для решіт-

ки із 127 випромінювачів при $\alpha = 0,5$. Задачу синтезу зведено до розв'язання рівняння (7) методом послідовних наближень [8]. Середньоквадратичне відхилення (значення першого доданка у функціоналі (2)) для першої ДС дорівнює 0,3774, а для другої – 0,2218. На рис. 8 і 9 показано перетини заданої і синтезованих ДС у площинах $s_1 = 0$ і $s_2 = 0$ відповідно; крива N_0^{sec} – задана енергетична ДС у перетинах, крива 1 відповідає перетину $s_1 = 0$, а крива 2 – перетину $s_2 = 0$. Для заданої постійної ДС N_0 рівень першої бокової пелюстки не перевищує -50 dB у площині $s_1 = 0$ і -36 dB у площині $s_2 = 0$. Для заданої енергетичної ДС у формі тіла обертання ці величини не перевищують -52 dB і -35 dB відповідно. Зі зменшенням параметрів c_1 і c_2 рівень бокових пелюсток суттєво зростає.

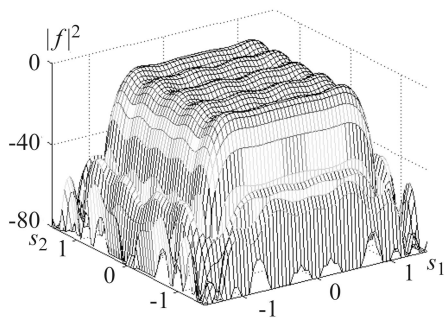


Рис. 6. Синтезована енергетична ДС $|f|^2$ для N_0^1 при $c_1 = 2,0$; $c_2 = 2,236$.

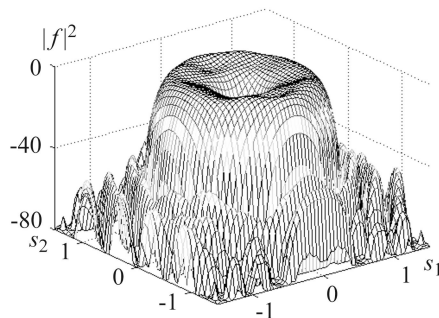


Рис. 7. Синтезована енергетична ДС $|f|^2$ для N_0^2 при $c_1 = 2,0$; $c_2 = 2,236$.

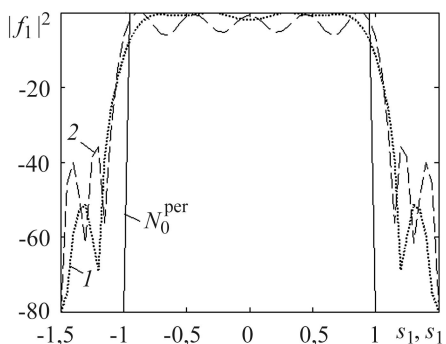


Рис. 8. Перетини синтезованої ДС у площинах $s_1 = 0$ і $s_2 = 0$ для N_0^1 .

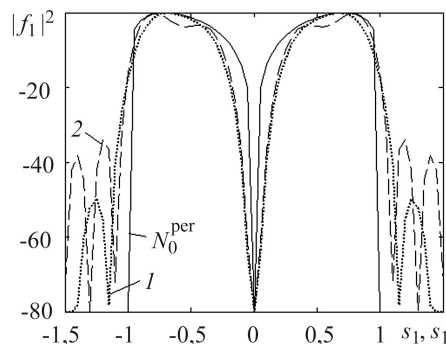


Рис. 9. Перетини синтезованої ДС у площинах $s_1 = 0$ і $s_2 = 0$ для N_0^2 .

Якість наближення до заданої енергетичної ДС N_0 значною мірою залежить як від значень параметрів c_1 і c_2 , так і від параметра α . На рис. 10 і 11 наведена залежність середньоквадратичного відхилення заданих ДС від α при різних c_1 на промені $c_2 = 1,118c_1$. Таке співвідношення між значеннями c_1 і c_2 забезпечує регулярність геометрії гексагональної решітки, і, як показали числові результати, дає змогу отримати близькі характеристики ДС уздовж координат s_1 і s_2 .

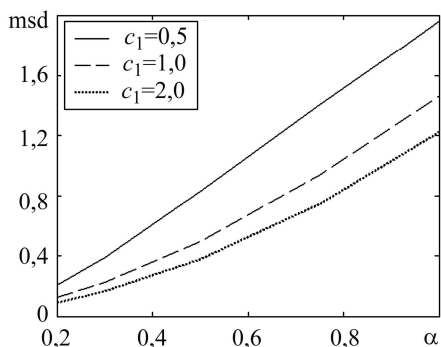


Рис. 10. Залежність середньоквадратичного відхилення від параметра α для ДС N_0^1 .

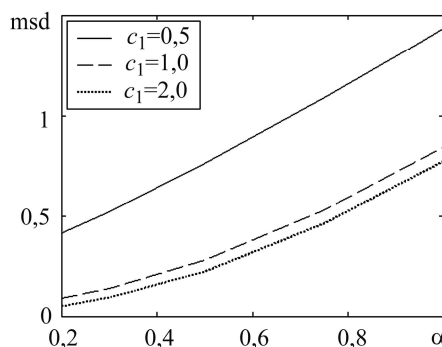


Рис. 11. Залежність середньоквадратичного відхилення від параметра α для ДС N_0^2 .

Для заданої ДС N_0^1 найбільше значення середньоквадратичного відхилення msd досягається при $\alpha = 1,0$ для $c_1 = 0,5$, воно рівне 1,96443, зі зменшенням α

значення msd зменшується майже лінійно. Для заданої ДС N_0^2 у формі тіла обертання максимальне значення msd дорівнює 1,43685. Слід зауважити, що в загальному зі зменшенням параметра α значення msd зменшується, але при цьому зростає норма струму $\|\mathbf{I}\|_{H_1}$, а також погіршується наближення синтезованої ДС до заданої по формі.

ВИСНОВКИ

З використанням методики [7] запропоновано метод знаходження ліній біфуркації нульового розв'язку нелінійного рівняння задачі синтезу за заданою енергетичною ДС для плоскої гексагональної решітки. Процес складається із трьох етапів, які полягають у наближеному обчисленні точок біфуркації на площині параметрів (c_1, c_2) задачі, їхньому уточненні, і розв'язанні відповідної задачі Коші, яка є наслідком задачі про неявно задану функцію. Наведено приклади синтезу декількох заданих енергетичних ДС.

1. Андрийчук М. И., Войтович Н. Н., Савенко П. А., Ткачук В. П. Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы. – К.: Наук. думка, 1993. – 256 с.
2. Бахрах Л. Д., Кременецкий С. Д. Синтез излучающих систем (Теория и методы расчета). – М.: Сов. радио, 1974. – 232 с.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
4. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. Ю. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
5. Зелкин Е. Г., Соколов В. Г. Методы синтеза антенн: Фазированные антенные решетки и антенны с непрерывным раскрытием. – М.: Сов. радио, 1980. – 256 с.
6. Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Гусевский В. И. Конструктивные методы аппроксимации в теории антенн. – М.: Сайнс пресс, 2005. – 512 с.
7. Кравченко В. Ф., Процах Л. П., Савенко П. А., Ткач М. Д. Математические особенности синтеза плоских эквидистантных решеток по заданной амплитудной диаграмме направленности // Антенны. – 2010. – № 31 (154). – С. 34–46.
8. Приближенное решение операторных уравнений / М. А/ Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др.. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
9. Минкович Б. М., Яковлев В. П. Теория синтеза антенн. – М.: Сов. радио, 1969. – 296 с.
10. Савенко П. А., Паснак Л. М. Численно-аналитический метод синтеза линейных решеток вибраторов по заданной амплитудной диаграмме направленности // Изв. вузов. Радиэлектроника. – 1977. – **40**, № 12. – С. 11–25.
11. Савенко П. О. Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем. – Львів: ІППММ НАН України, 2002. – 320 с.
12. Савенко П. А., Процах Л. П. Метод неявной функции решения двумерных нелинейных спектральных задач // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 41–44.
13. Andriyuchuk M. I., Savenko P. O., Tkach M. D. Synthesis of Plane Equidistant Array According to Power Radiation Pattern // Proc. of XVIIth Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2012), September 24–27, 2012, Tbilisi, Georgia. – Tbilisi, 2012. – P. 68–74.
14. Boutami S., Fall M. Calculation of the Free-Space Periodic Green's Function Using Equivalent Finite Array // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2012. – **60**, № 10. – P. 4725–4731.
15. Chan K. K., Rao S. K. Design of a Rotman Lens Feed Network to Generate a Hexagonal Lattice of Multiple Beams // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2002. – **50**, № 8. – P. 1099–1108.
16. Kravchenko V. F. Atomic and R-functions in Radiophysical Applications // Proc. of Int. Conf. on Antenna Theory and Techniques. Oct. 6–9, 2009. – Ukraine: Lviv, 2009. – P. 3–12.
17. Pogorzelski R. J. Phased Arrays Based on Oscillators Coupled on Triangular and Hexagonal Lattices // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 2004. – **52**, № 3. – P. 790–800.