УДК 7.948.326

О. Д. Поліщук

ПРО УМОВИ КОРЕКТНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ, ЕКВІВАЛЕНТНИХ ЗАДАЧАМ З УМОВАМИ СТРИБКА ШУКАНОЇ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ НОРМАЛЬНОЇ ПОХІДНОЇ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В R^3

The conditions of well-posed solution of searched function and its normal derivative jump problem for the Laplacian in R^3 and equivalent to them integral equation system for the sum of the simple and double layer potentials are determined in the Hilbert space, element of which as well as their normal derivatives have the jump through boundary surface.

Keywords: *boundary value problems, Laplacian, simple and double layer potentials, integral equations.*

Визначено умови коректної розв'язності задачі з умовою стрибка шуканої функції та її нормальної похідної для рівняння Лапласа в R^3 та еквівалентної їй системи інтегральних рівнянь для суми потенціалів простого і подвійного шару в гільбертовому просторі функцій, які, як і їхні нормальні похідні, мають стрибок під час переходу через границю області.

Ключові слова: *граничні задачі, рівняння Лапласа, потенціали простого та подвійного шару, інтегральні рівняння.*

Моделювання багатьох фізичних процесів у тривимірному просторі (дифузія, тепловий потік, електростатичне поле, течія ідеальної рідини, пружні рухи твердого тіла, течія ґрунтових вод тощо) [1, 7] призводить до необхідності розв'язання граничних задач для рівняння Лапласа. У випадку, коли область та оточуюче її середовище мають різні фізичні властивості, виникає потреба у розв'язанні задач з умовою стрибка. Залежно від властивостей шуканого розв'язку при переході через граничну поверхню це може бути задача з умовою стрибка шуканої функції [11], стрибка її нормальної похідної [8] або задача з обома умовами одночасно, умови коректної розв'язності якої у диференціальній та еквівалентній їй інтегральній постановках досліджуємо у цій роботі. Методи інтегральних рівнянь та теорія граничних операторів [2] дають можливість не лише визначати властивості операторів таких задач, але й будувати ефективні методи їх розв'язання.

Задача з умовою стрибка нормальної похідної шуканої функції. Нехай G – обмежена відкрита C^1-область [4] в R^3 з 1-гладкою границею Γ. Позначимо $G'=R^3\setminus\bar{G}$ і введемо [8] на G, G' простори Соболєва $W_2^1(G)$ і $W_{2,0}^1(G')=\{u\in D'(G'):u/r,Du\in L_2(G')\}$, де r – відстань від точки $x\in G'$ до початку координат, а на Γ – простір $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Визначимо простір $H^1=W_2^1(G)\times W_{2,0}^1(G')$. Елементи H^1 позначимо через $u=(u^i,u^e)$, $u^i\in W_2^1(G)$, $u^e\in W_{2,0}^1(G')$.

Визначимо лінійні неперервні оператори слідів [5] $\gamma_0^i u^i=u^i\big|_{\Gamma_i}$, $\gamma_0^e u^e=u^e\big|_{\Gamma_e}$, $\gamma_0^i:W_2^1(G)\to W_2^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma_0^e:W_{2,0}^1(G')\to W_2^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma_1^i u^i=\partial u^i/\partial\vec{n}\big|_{\Gamma_i}$, $\gamma_1^e u=\partial u/\partial\vec{n}\big|_{\Gamma_e}$, $\gamma_1^i:W_2^1(G)\to W_2^{-1/2}(\Gamma)$, $\gamma_1^e:W_{2,0}^1(G')\to W_2^{-1/2}(\Gamma)$, де Γ_i, Γ_e – внутрішня і зовнішня сторони поверхні Γ відповідно, $\vec{n}$ – нормаль до поверхні Γ, зовнішня по відношенню до G, $W_2^{-1/2}(\Gamma)$ – простір, двоїстий до $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Позначимо $\gamma_0^{\varepsilon_0} = \gamma_0^i - \varepsilon_0\gamma_0^e$, $\gamma_1^{\varepsilon_1} = \gamma_1^i - \varepsilon_1\gamma_1^e$, $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$, і $W_2^1(G;\Delta = 0) = \{u^i \in W_2^1(G) : \Delta u^i = 0\}$, $W_{2,0}^1(G';\Delta = 0) = \{u^e \in W_{2,0}^1(G') : \Delta u^e = 0\}$. Для довільних $u^i \in W_2^1(G;\Delta = 0)$, $v^i \in W_2^1(G)$ виконується формула Гріна [8]

$$\int_G \nabla u^i \nabla v^i = \left\langle \gamma_1^i u^i, \gamma_0^i v^i \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)}, \tag{1}$$

де $\langle .,. \rangle_{V\times V^*}$ – відношення двоїстості на $V \times V^*$, а для будь-яких $u^e \in W_{2,0}^1(G';\Delta = 0)$, $v^e \in W_{2,0}^1(G')$ – формула Гріна

$$\int_{G'} \nabla u^e \nabla v^e = -\left\langle \gamma_1^e u^e, \gamma_0^e v^e \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)}. \tag{2}$$

Введемо простір $H_\Gamma^1 = \{u \in H^1 : \gamma_1^0 u = 0\}$, $(u,v)_{H_\Gamma^1} = \int_{G\cup G'} \nabla u \nabla v$, $\|u\|_{H_\Gamma^1} = (u,u)_{H_\Gamma^1}^{1/2}$, де $(.,.)_V$ – скалярний добуток на V. Нескладно показати [7], що для довільного $u \in H_\Gamma^1$ норми $\|u\|_{H_\Gamma^1}$ і $\|u\|_{H^1}$ еквівалентні. Введемо простір $H_{\Gamma,\Delta=0}^1 = \{u \in H_\Gamma^1 :\ \Delta u = 0\}$. Справедлива [8]

Теорема 1. Оператор γ_1^1 здійснює неперервне, взаємно однозначне відображення з $H_{\Gamma,\Delta=0}^1$ у $W_2^{-1/2}(\Gamma)$, причому довільна функція $u \in H_{\Gamma,\Delta=0}^1$ може бути зображена у вигляді

$$u(x) = (U\gamma_1^1 u)(x) \equiv \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\gamma_1^1 u(y)}{|x-y|} d\Gamma_y, \quad x \in G, G', \quad y \in \Gamma.$$

Розглянемо граничну задачу: знайти функцію

$$u \in H_{\Gamma,\Delta=0}^1, \tag{3}$$

яка задовольняє умові

$$\gamma_1^{\varepsilon_1} u = f_1, \quad f_1 \in W_2^{-1/2}(\Gamma). \tag{4}$$

Справедлива [8]

Теорема 2. Оператор $\gamma_1^{\varepsilon_1}$ здійснює неперервне, взаємно однозначне відображення з $H_{\Gamma,\Delta=0}^1$ у $W_2^{-1/2}(\Gamma)$, а еквівалентне задачі (3), (4) інтегральне рівняння для потенціалу простого шару

$$(S\sigma)(x) \equiv (\gamma_1^{\varepsilon_1} U\sigma)(x) = f_1(x), \quad \sigma = \gamma_1^1 u \in W_2^{-1/2}(\Gamma), \quad f_1 \in W_2^{-1/2}(\Gamma) \tag{5}$$

має єдиний розв'язок.

Задача з умовою стрибка шуканої функції. Введемо [6] простір $K_\Gamma^1 = \{u \in H^1 \setminus R : \gamma_1^1 u = 0\}$, де R – множина постійних функцій на G, $(u,v)_{K_\Gamma^1} = \int_{G\cup G'} \nabla u \nabla v$, $\|u\|_{K_\Gamma^1} = (u,u)_{K_\Gamma^1}^{1/2}$. Нескладно показати [6], що для довільного $u \in K_\Gamma^1$ норми $\|u\|_{K_\Gamma^1}$ і $\|u\|_{H^1}$ еквівалентні. Введемо простори $K_{\Gamma,\Delta=0}^1 = \{u \in K_\Gamma^1 : \Delta u = 0\}$,

$\tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma) = W_2^{1/2}(\Gamma) \setminus P$, $\tilde{W}_2^{-1/2}(\Gamma) = \{g \in W_2^{-1/2}(\Gamma) : \langle g,1 \rangle_{W_2^{1/2}(\Gamma)\times W_2^{-1/2}(\Gamma)} = 0\}$, де P – множина постійних функцій на Γ. Справедлива [6]

Теорема 3. Оператор γ_0^1 здійснює неперервне, взаємно однозначне відображення з $K^1_{\Gamma,\Delta=0}$ у $\tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)$, причому довільна функція $v \in K^1_{\Gamma,\Delta=0}$ може бути зображена у вигляді

$$v(x) = (V\gamma_0^1 v)(x) \equiv -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \gamma_0^1 v(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{|x-y|} d\Gamma_y, \quad x \in G, G', \quad y \in \Gamma.$$

Розглянемо граничну задачу: знайти функцію

$$v \in K^1_{\Gamma,\Delta=0}, \tag{6}$$

яка задовольняє умові

$$\gamma_0^{\varepsilon_0} v = f_0, \qquad f_0 \in \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma). \tag{7}$$

Справедлива [11]

Теорема 4. Оператор $\gamma_0^{\varepsilon_0}$ здійснює неперервне, взаємно однозначне відображення з $K^1_{\Gamma,\Delta=0}$ у $\tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)$, а еквівалентне задачі (6), (7) інтегральне рівняння для потенціалу подвійного шару

$$(Dq)(x) \equiv (\gamma_0^{\varepsilon_0} Vq)(x) = f_0(x), \quad q = \gamma_1^0 u \in \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma), \quad f_0 \in \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma) \tag{8}$$

має єдиний розв’язок.

Задача з умовою стрибка шуканої функції та її нормальної похідної. Введемо простір $HK^1_{\Gamma,\Delta=0} = H^1_{\Gamma,\Delta=0} \cup K^1_{\Gamma,\Delta=0}$. Із співвідношень (1) і (2) випливає, що для довільних $u \in HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$, $v \in HK^1_\Gamma$ виконується формула Гріна

$$(u,v)_{HK^1_\Gamma} = \left\langle \gamma_1^i u, \gamma_0^i v \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)} - \left\langle \gamma_1^e u, \gamma_0^e v \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)} \tag{9}$$

Справедлива

Лема. $H^1_{\Gamma,\Delta=0} \cap K^1_{\Gamma,\Delta=0} = \{0\}$.

Дійсно, припустімо, що $u \in H^1_{\Gamma,\Delta=0} \cap K^1_{\Gamma,\Delta=0}$. Оскільки $u \in H^1_{\Gamma,\Delta=0}$, тобто $\gamma_0^1 u = 0$, із (9) отримуємо $\|u\|^2_{HK^1_\Gamma} = \left\langle \gamma_1^1 u, \gamma_0 u \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)}$. Але u також належить і $K^1_{\Gamma,\Delta=0}$, тобто $\gamma_1^1 u = 0$. Отже, $\|u\|_{HK^1_\Gamma} = 0$.

Отже, простори $H^1_{\Gamma,\Delta=0}$ і $K^1_{\Gamma,\Delta=0}$ є ортогональними відносно введеного скалярного добутку підпросторами $HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$. Тоді з теорем 1 і 3 слідує справедливість наступного твердження.

Теорема 5. Оператор (γ_1^1, γ_0^1) здійснює взаємно однозначне відображення з $HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$ у $W_2^{-1/2}(\Gamma) \times \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)$, причому довільна функція $w \in HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$ може бути єдиним чином зображена у вигляді

$$w(x) = u(x) + v(x) \equiv (U\gamma_1^1 u)(x) + (V\gamma_0^1 v)(x), \quad x \in G, G', \tag{10}$$

де $u \in H^1_{\Gamma,\Delta=0}$, $v \in K^1_{\Gamma,\Delta=0}$.

Розглянемо граничну задачу: знайти функцію

$$w \in HK^1_{\Gamma,\Delta=0}, \tag{11}$$

яка задовольняє умовам

$$\gamma_0^{\varepsilon_0} w = g_0\,, \quad g_0 \in \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)\,, \tag{12}$$

$$\gamma_1^{\varepsilon_1} w = g_1\,, \quad g_1 \in W_2^{-1/2}(\Gamma)\,. \tag{13}$$

Беручи до уваги зображення (10) та позначивши $\gamma_0^i u^i = \gamma_0^e u^e = \gamma_0 u$ для $u \in H^1_{\Gamma,\Delta=0}$ і $\gamma_1^i v^i = \gamma_1^e v^e = \gamma_1 v$ для $v \in K^1_{\Gamma,\Delta=0}$, із (12)–(13) отримуємо

$$(1-\varepsilon_0)\gamma_0 u + \gamma_0^{\varepsilon_0} v = g_0\,, \tag{14}$$

$$\gamma_1^{\varepsilon_1} u + (1-\varepsilon_1)\gamma_1^{\varepsilon_1} v = g_1\,. \tag{15}$$

Визначимо $\gamma_0 u = \Phi\gamma_1^{\varepsilon_1} u$, де Φ – граничний оператор, який ставить у відповідність значенню стрибка нормальної похідної шуканої функції її слід на поверхні Γ. Оператор Φ, побудований у вигляді $\Phi = \tilde{S}\; S^{-1}$, де $\tilde{S} = \gamma_0 U$ і S визначений згідно з (5), є лінійним неперервним взаємно однозначним оператором з $W_2^{-1/2}(\Gamma)$ у $W_2^{1/2}(\Gamma)$ [9]. Зазначимо, що $\tilde{S}$ та S є операторами інтегральних рівнянь для потенціалу простого шару, еквівалентних задачі Діріхле та задачі з умовою стрибка нормальної похідної шуканої функції відповідно. Алгоритмічно оператор Φ реалізується шляхом розв'язання інтегрального рівняння для потенціалу простого шару, еквівалентного задачі з умовою стрибка нормальної похідної та розрахунку за кінцевими формулами значення шуканої функції на граничній поверхні, як сліду потенціалу простого шару з визначеною на попередньому кроці густиною.

Визначимо $\gamma_1 v = \Psi\gamma_0^{\varepsilon_0} v$, де Ψ – граничний оператор, який ставить у відповідність значенню стрибка шуканої функції слід її нормальної похідної на поверхні Γ. Оператор Ψ, побудований у вигляді $\Psi = \tilde{D}\; D^{-1}$, де $\tilde{D} = \gamma_1 V$ і D визначений згідно з (8) , є лінійним неперервним взаємно однозначним оператором з $\tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)$ у $\tilde{W}_2^{-1/2}(\Gamma)$ [10]. Зазначимо, що $\tilde{D}$ та D є операторами інтегральних рівнянь для потенціалу подвійного шару, еквівалентних задачі Неймана та задачі з умовою стрибка шуканої функції відповідно. Алгоритмічно оператор Ψ реалізується шляхом розв'язання інтегрального рівняння для потенціалу подвійного шару, еквівалентного задачі з умовою стрибка шуканої функції та розрахунку за кінцевими формулами значення її нормальної похідної на граничній поверхні, як сліду нормальної похідної потенціалу подвійного шару з визначеною на попередньому кроці густиною.

Далі з (14) і (15) послідовно отримуємо

$$(1-\varepsilon_0)\;\Phi\gamma_1^{\varepsilon_1} u + \gamma_0^{\varepsilon_0} v = g_0\,,$$

$$\Psi^{-1}\gamma_1^{\varepsilon_1} u\,/\,(1-\varepsilon_1) + \gamma_0^{\varepsilon_0} v = \Psi^{-1} g_1\,/(1-\varepsilon_1)\,,$$

$$(1-\varepsilon_0)\;\Phi\gamma_1^{\varepsilon_1} u - \Psi^{-1}\gamma_1^{\varepsilon_1} u\,/\,(1-\varepsilon_1) = g_0 - \Psi^{-1} g_1\,/(1-\varepsilon_1)\,,$$

$$[\,(1-\varepsilon_0)\;(1-\varepsilon_1)\;\Phi - \Psi^{-1}]\gamma_1^{\varepsilon_1} u = (1-\varepsilon_1) g_0 - \Psi^{-1} g_1)\,, \quad \gamma_1^{\varepsilon_1} u = p_1\,, \tag{16}$$

де $p_1 = [\,(1-\varepsilon_0)\;(1-\varepsilon_1)\;\Phi^{-1} - \Psi\,] \times [(1-\varepsilon_1) g_0 - \Psi^{-1} g_1)] \in W_2^{-1/2}(\Gamma)$. Із теореми 2 випливає, що задача (3), (16) має єдиний розв'язок. Розв'язання цієї задачі еквівалентне розв'язанню інтегрального рівняння для потенціалу простого шару

$$(S\sigma)(x) \equiv (\gamma_1^{\varepsilon_1} U\sigma)(x) = p_1(x)\,, \quad \sigma \in W_2^{-1/2}(\Gamma)\,, \quad p_1 \in W_2^{-1/2}(\Gamma)\,, \tag{17}$$

яке згідно з теоремою 2 також має єдиний розв'язок.

Далі з (14) отримуємо

$$\gamma_0^{\varepsilon_0} v = g_0 - (1-\varepsilon_0)\gamma_0 u\,,$$

$$\gamma_0^{\varepsilon_0} v = p_0\,, \tag{18}$$

де $p_0 = g_0 - (1-\varepsilon_0)\Phi p_1$. Тоді з теореми 4 слідує, що у разі виконання умови

$$p_0 \in \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma) \tag{19}$$

задача (6), (18) має єдиний розв'язок. Розв'язання цієї задачі еквівалентне розв'язанню інтегрального рівняння для потенціалу подвійного шару

$$(Dq)(x) \equiv (\gamma_0^{\varepsilon_0} Vq)(x) = p_0(x)\,, \quad q \in \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)\,, \quad p_0 \in \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)\,, \tag{20}$$

яке згідно з теоремою 4 також має єдиний розв'язок.

Враховуючи результати теорем 2–4, отримуємо справедливість наступного твердження.

Теорема 6. За виконання умови (19) задача (11)–(13) зводиться до послідовного розв'язання задач (3), (16) та (6), (18) або еквівалентних їм інтегральних рівнянь для потенціалів простого і подвійного шару (17) та (20), які мають єдиний розв'язок. Тоді розв'язок задачі (11)–(13) визначається співвідношенням (8).

Використовуючи для апроксимації невідомих густин потенціалів системи N лінійно незалежних функцій (лагранжевих кінцевих елементів, B-сплайнів тощо [3]), ми доходимо у випадку безпосереднього розв'язання задачі (11)–(13) за допомогою суми потенціалів простого та подвійного шару необхідності вирішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) зі щільними матрицями розмірності $2N$, що потребує виконання порядку $8O(N^3)$ операцій. Використання процедури, застосованої під час доведення теореми 6, потребує розв'язання п'яти СЛАР з матрицями розмірності N, що потребує виконання порядку $5O(N^3)$ операцій, тобто майже на 40% менше. Отже, застосування теорії граничних операторів дає змогу не лише визначити умови коректної розв'язності окремих крайових задач для рівняння Лапласа, але й будувати ефективні методи їх чисельного розв'язання за допомогою потенціалів простого і подвійного шару.

1. *Громадка Т., Лей Ч.* Комплексный метод граничных элементов. – М.: Мир, 1990. – 303 с.
2. *Лебедев В. И., Агошков В. Н.* Операторы Пуанкаре–Стеклова и их применение в анализе. – М.: ОВМ АН СССР, 1983. – 214 с.
3. *Полищук А. Д.* О численном решении интегральных уравнений теории потенциала // Препринт (ВЦ СО АН СССР; 743). – Новосибирск, 1987. – 26 с.
4. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 342 с.
5. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1991. – 448 с.
6. *Giroure J.* Formulation variationnelle par equations integrales de problemes aux limites exterieurs // Rapport Interne du Centre de Mathematiques Appliquees de l'Ecole Politechnique. – 1976. – № 6. – 97 p.
7. *Hsiao G. C., Wendland W. L.* Boundary integral equations. – Berlin: Springer, 2008. – 618 p.
8. *Nedelec J. C., Planchard J.* Une methode variationnelle d'elements finis pour la resolution numerique d'un probleme exterieur dans R^3 // R.A.I.R.O. – 1973. – **R3**, № 7. – P. 105–129.
9. *Polishchuk A. D.* Construction of boundary operators for the Laplacian. – I. Using of simple layer potential // X^{th} Int. Seminar "Direct and invers Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory", (Lviv, Ukraine, September 12–15, 2005). – Lviv, Ukraine, 2005. – P. 137–139.
10. *Polishchuk A. D.* Construction of boundary operators for the Laplacian. – II. Using of double layer potential // X^{th} Int. Seminar "Direct and invers Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory", (Lviv, Ukraine, September 12–15, 2005). – Lviv, Ukraine, 2005. – P. 140–142.
11. *Polishchuk A. D.* Solution of searched function jump problem for the Laplacian in R^3 by means of double layer potential // $VIII^{th}$ Int. Seminar "Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory", (Tbilisi, Georgia, October 11–14, 2004). – Tbilisi, Georgia, 2004. – P. 51–54.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 11.09.2012