УДК 621.391:519.22

І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько

ОБҐРУНТУВАННЯ ВЕЛИЧИНИ КРОКУ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ У ПРОЦЕСІ КОМПОНЕНТНОГО ВЗАЄМОКОРЕЛЯЦІЙНОГО АНАЛІЗУ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

The estimator properties of two periodically non-stationary random signals cross-correlation function formed on the base of discrete data in the form of trigonometric polynomial are analyzed. The formulae for estimator bias and variance, which describe their dependences on sampling time and sampling size are derived. The interpolation formula for cross-correlation function estimator is obtained.

Keywords: *periodically non-stationary random processes, cross-correlation function, component analysis, sampling time, estimator variance and bias*.

Проаналізовано властивості оцінки взаємокореляційної функції двох періодично нестаціонарних випадкових сигналів, що формуються на основі дискретних даних у вигляді тригонометричного полінома. Виведено формули для зміщення й дисперсії оцінок, які описують їх залежність від кроку дискретизації та величини вибірки. Отримано інтерполяційну формулу для оцінки взаємокореляційної функції.

Ключові слова: *періодично нестаціонарні випадкові процеси, взаємокореляційна функція, компонентний аналіз, крок дискретизації, дисперсія та зміщення оцінки.*

Використання імовірнісної моделі вібраційних сигналів у вигляді періодичного нестаціонарного випадкового процесу надає нові можливості під час виявлення дефектів обертових механізмів на ранніх стадіях їх розвитку [1–4]. При такому підході перший етап обробки вібросигналів полягає у їх розділенні на детерміновану та стохастичну складові. З детермінованою складовою вібросигналів, як правило, пов’язані макродефекти механічних систем, такі як дисбаланс, ексцентриситет, неспівосність, биття, зачеплення тощо. Стохастична складова містить інформацію про нестаціонарні та нелінійні властивості вібраційного сигналу, які пов’язані із силами тертя, зміною в’язкості мастил, шороховатостями поверхонь та ін. Саме аналіз стохастичної складової, в тому числі характеристик її періодичної нестаціонарності, дає змогу виявляти дефекти на початкових стадіях їх зародження. Періодична нестаціонарність випадкової складової зумовлена стохастичною модуляцією гармонік. Ця модуляція здебільшого не є вузькосмуговою, тому вона не завжди буде проявлятися у пікових значеннях оцінок спектральної густини потужності стаціонарного наближення сигналу. Носіями інформації про типи дефектів обертових вузлів є авто- та взаємокореляційні і відповідні їм спектральні характеристики модулюючих процесів. Ці характеристики інтегрально виявляються у характеристиках періодично нестаціонарних випадкових процесів (ПНВП) – математичних моделей сигналів вібрації. Тому діагностичні ознаки можуть будуватися як на основі оцінок, так і безпосередньо на основі характеристик модулюючих процесів [1–3].

Однією з важливих задач діагностики є аналіз зв’язаності вібраційних коливань великих стаціонарних агрегатів, відібраних у різних точках. Така задача може бути розв’язана на основі моделі сигналів вібрації у вигляді багатомірних періодично нестаціонарних випадкових процесів. Багатомірний аналіз сигналів на її основі дає змогу локалізувати дефекти, визначити їх типи, розділити джерела. Першим етапом цього аналізу є взаємокореляційний. Оцінки взаємокореляційних функцій можуть бути визначені з використанням як когерентного, так і компонентного методів. Перший з них ґрунтується на усередненні відліків реалізації сигналу, відібраних через період корельованості [5, 8], а другий – на формуванні тригонометричного полінома [6, 8]

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)=\sum_{k=-N_2}^{N_2}\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(t,u)e^{ik\omega_0 t},$$

при цьому

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left[\xi(t)-\hat{m}_{\xi}(t)\right]\left[\eta(t+u)-\hat{m}_{\eta}(t+u)\right]e^{-ik\omega_0 t}dt,\ \omega_0=\frac{2\pi}{T},$$

де

$$\hat{m}_{\xi,\eta}(nh)=\sum_{k=-N_1}^{N_1}\hat{m}_k^{(\xi,\eta)}e^{ik\omega_0 t},\quad \hat{m}_k^{(\xi,\eta)}=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\begin{Bmatrix}\xi(nh)\\ \eta(nh)\end{Bmatrix}e^{-ik\omega_0 t}dt.$$

Характерною особливістю компонентних оцінок є те, що вони формуються з урахуванням апріорних відомостей про число гармонічних складових імовірнісних характеристик. Такі відомості можуть бути отримані на основі результатів аналізу фізичних умов породження процесу, а також попереднього використання когерентного методу. Саме врахування скінченого числа гармонік суттєво покращує ефективність оцінок при швидкому загасанні кореляційних зв’язків у разі збільшення зсуву *u*. При $N_1\to\infty$ і $N_2\to\infty$ когерентні і компонентні оцінки збігаються [5–8]. Властивості неперервних компонентних оцінок взаємокореляційних функцій були проаналізовані в роботі [6]. Такий аналіз дає змогу обґрунтовано вибирати параметри обробки, а саме довжину реалізації і точку усічення корелограми, залежно від параметрів сигналу, характеристики якого оцінюються. Ця стаття присвячена аналізу дискретних компонентних оцінок, що уможливлює дослідження впливу на систематичну і середньоквадратичну похибки оцінювання кроку дискретизації.

Припустимо, що $T=(M+1)h$, $M\in\mathbb{N}$ і $\theta=NT$. Компонентна дискретна оцінка взаємокореляційної функції має вигляд

$$\hat{b}_{\xi\eta}(nh,jh)=\sum_{k=-N_2}^{N_2}\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh)e^{ik\frac{2\pi}{M+1}n},\tag{1}$$

при цьому

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh)=\frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}\left[\xi(nh)-\hat{m}_{\xi}(nh)\right]\left[\eta\left[(n+j)h\right]-\hat{m}_{\eta}\left[(n+j)h\right]\right]e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n},\tag{2}$$

а також

$$\hat{m}_{\xi,\eta}(nh)=\sum_{k=-N_1}^{N_1}\hat{m}_k^{(\xi,\eta)}e^{ik\frac{2\pi}{M+1}n},\quad \hat{m}_k^{(\xi,\eta)}=\frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}\begin{Bmatrix}\xi(nh)\\ \eta(nh)\end{Bmatrix}e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n}.$$

Перепишемо вираз (2) у вигляді

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh)=\frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}\begin{bmatrix}\mathring{\xi}(nh)\mathring{\eta}\left[(n+j)h\right]-\mathring{\hat{m}}_{\xi}(nh)\mathring{\eta}\left[(n+j)h\right]-\\ -\mathring{\xi}(nh)\mathring{\hat{m}}_{\eta}\left[(n+j)h\right]+\mathring{\hat{m}}_{\xi}(nh)\mathring{\hat{m}}_{\eta}\left[(n+j)h\right]\end{bmatrix}e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n},\tag{3}$$

де $\mathring{\hat{m}}_{\xi\eta}(nh)=\hat{m}_{\xi\eta}(nh)-m_{\xi\eta}(nh)$. Якщо накладання відсутнє $(M\geq 2N_1)$, то

$$\hat{m}_{\xi}(nh)-m_{\xi}(nh)=\sum_{l=-N_1}^{N_1}\left(\hat{m}_l^{(\xi)}-m_l^{(\xi)}\right)e^{il\frac{2\pi}{M+1}n}=\sum_{l=-N_1}^{N_1}e^{il\frac{2\pi}{M+1}n}\left[\frac{1}{K}\sum_{p=0}^{K-1}\overset{\circ}{\xi}(ph)e^{-il\frac{2\pi}{M+1}p}\right],$$

$$\hat{m}_{\eta}(nh)-m_{\eta}(nh)=\sum_{l=-N_1}^{N_1}\left(\hat{m}_l^{(\eta)}-m_l^{(\eta)}\right)e^{il\frac{2\pi}{M+1}n}=\sum_{l=-N_1}^{N_1}e^{il\frac{2\pi}{M+1}n}\left[\frac{1}{K}\sum_{p=0}^{K-1}\overset{\circ}{\eta}(ph)e^{-il\frac{2\pi}{M+1}p}\right].$$

Беручи до уваги ці формули, для другої і третьої складових виразу (3) отримуємо

$$-\frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}\left[\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(nh)\overset{\circ}{\eta}\left[(n+j)h\right]+\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}\left[(n+j)h\right]\overset{\circ}{\xi}(nh)\right]e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n}=$$

$$=-\frac{1}{K^2}\sum_{n,p=0}^{K-1}\left[\overset{\circ}{\xi}(nh)\overset{\circ}{\eta}\left[(p+j)h\right]\tilde{g}_k\left(N_1,n,p\right)+\overset{\circ}{\xi}(nh)\overset{\circ}{\eta}(ph)\tilde{h}_k\left(N_1,n,p\right)\right],$$

де

$$\tilde{g}_k\left(N_1,n,p\right)=e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}p}\sum_{l=-N_1}^{N_1}e^{il\frac{2\pi}{M+1}(p-n)},$$

$$\tilde{h}_k\left(N_1,n,p\right)=e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}p}\sum_{l=-N_1}^{N_1}e^{il\frac{2\pi}{M+1}(n-p+j)}.$$

Четверту складову перепишемо у вигляді

$$\frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(nh)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}\left[(n+j)h\right]e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n}=$$

$$=\frac{1}{K^2}\sum_{p,q=0}^{K-1}\overset{\circ}{\xi}(ph)\overset{\circ}{\eta}(qh)\sum_{l,m=-N_1}^{N_1}e^{i\frac{2\pi}{M+1}\left[(j-q)m-lp\right]}\left[\frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}e^{i\frac{2\pi}{M+1}(l-k+m)}\right]. \qquad (4)$$

Якщо $M\geq N_2+N_1$, то

$$\frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}e^{i\frac{2\pi}{M+1}(l-k+m)}=\delta_{l,k-m},$$

і тоді

$$\sum_{l,m=-N_1}^{N_1}e^{i\frac{2\pi}{M+1}\left[(j-q)m-lp\right]}\delta_{l,k-m}=e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}p}\sum_{l\in M}e^{il\frac{2\pi}{M+1}(p-q+j)}, \qquad (5)$$

де $M=\{-N_1,...,N_1\}\bigcap\{k-N_1,...,k+N_1\}$. Позначимо праву частину виразу через $\tilde{p}_k\left(N_1,p,q\right)$. Для різниці $\tilde{p}_k\left(N_1,p,q\right)-\tilde{h}_k\left(N_1,p,q\right)$ маємо

$$\tilde{p}_k\left(N_1,p,q\right)-\tilde{h}_k\left(N_1,p,q\right)=e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n}\sum_{l\in\overline{M}}e^{il\frac{2\pi}{M+1}(n-p+j)}=\tilde{p}'\left(N_1,p,q\right),$$

при цьому $\overline{M}=\{-N_1,...,-N_1\}\setminus M$. Враховуючи співвідношення (4), (5), для математичного сподівання оцінки (2) при умові $M\geq 2N_2$ знаходимо

$$E\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh)=B_k^{(\xi\eta)}(jh)-\frac{1}{K^2}\sum_{n,p=0}^{K-1}\begin{bmatrix}b_{\xi\eta}\left(ph,(n-p+j)h\right)\tilde{g}_k\left(N_1,n,p\right)+\\+b_{\eta\xi}\left(ph,(n-p)h\right)\tilde{p}'_k\left(N_1,n,p\right)\end{bmatrix}.$$

Ввівши новий індекс сумування $r=n-p$ і змінивши його порядок, після перетворень отримуємо таку формулу для зміщення:

$$\varepsilon\left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh)\right]=-\frac{1}{K^2}\sum_{p=0}^{K-1}\sum_{r=-p}^{K-p-1}\begin{bmatrix} b_{\xi\eta}\left(ph,(r+j)h\right)\tilde{g}_k\left(N_1,r+p,p\right)+\\ +b_{\eta\xi}\left(ph,rh\right)\tilde{p}_k^{/}\left(N_1,p+r,p\right)\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{K^2}\left[\sum_{p=0}^{K-1}\left[b_{\xi\eta}\left(ph,jh\right)\tilde{g}_k\left(N_1,p,p\right)+b_{\eta\xi}\left(ph,0\right)\tilde{p}_k^{/}\left(N_1,p,p\right)\right]+\right.$$

$$+\sum_{r=1}^{K-1}\sum_{p=0}^{K-r-1}\left[b_{\xi\eta}\left[ph,(r+j)h\right]\tilde{g}_k\left(N_1,p+r,p\right)+b_{\xi\eta}\left[(p+r)h,(j-r)h\right]\tilde{g}_k\left(N_1,p,p+r\right)+\right.$$

$$\left.\left.+b_{\eta\xi}\left(ph,rh\right)\tilde{p}_k^{/}\left(N_1,r+p,p\right)+b_{\xi\eta}\left(ph,rh\right)\tilde{p}_k^{/}\left(N_1,p,p+r\right)\right]\right].$$

Запишемо взаємокореляційну функцію у вигляді ряду

$$b_{\xi\eta}\left(nh,jh\right)=\sum_{k=-N_2}^{N_2}B_k^{(\xi\eta)}\left(jh\right)e^{ik\frac{2\pi}{M+1}p}. \tag{6}$$

Тоді

$$\varepsilon\left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh)\right]=-\frac{1}{K}\left[\sum_{m=-N_2}^{N_2}\sum_{r=1}^{K-1}\begin{bmatrix} B_m^{(\xi\eta)}\left[(r-j)h\right]e^{im\frac{2\pi}{M+1}j}+\\ +B_m^{(\xi\eta)}\left[(r+j)h\right]e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}r}\end{bmatrix}\tilde{h}\left(N_1,r\right)+\right.$$

$$+\left[B_m^{(\eta\xi)}\left(rh\right)\tilde{h}^{/}\left(N_1,j,r\right)+B_m^{(\xi\eta)}\left(rh\right)\tilde{\tilde{h}}^{/}\left(N_1,j,r\right)\right]\tilde{f}_{m-k}\left(0,K-r-1\right)+$$

$$\left.+\left(2N_1+1\right)B_k^{(\xi\eta)}\left(jh\right)+B_k^{(\xi\eta)}\left(0\right)\sum_{l\in\bar{M}}e^{il\frac{2\pi}{M+1}j}\right], \tag{7}$$

де

$$\tilde{h}\left(N_1,r\right)=1+2\sum_{l=1}^{N_1}\cos l\frac{2\pi}{M+1}r,$$

$$\tilde{h}_k^{/}\left(N_1,j,r\right)=e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}r}\sum_{l\in\bar{M}}e^{il\frac{2\pi}{M+1}(r+j)},$$

$$\tilde{\tilde{h}}_k^{/}\left(N_1,j,r\right)=\sum_{l\in\bar{M}}e^{il\frac{2\pi}{M+1}(j-r)},$$

$$\tilde{f}_{m-k}\left(0,K-r-1\right)=\frac{1}{K}\sum_{p=0}^{K-r-1}e^{i(m-k)\frac{2\pi}{M+1}p}.$$

Зміщення $\varepsilon\left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)\right]$, як видно з (7), залежить не тільки від величини того компонента, що оцінюється, але й всіх інших компонентів, які формують кореляційну функцію ПКВ процесів. Однак залежність від компонентів інших номерів не є істотною, оскільки значення функції $\tilde{f}_0\left(0,K-r-1\right)$ значно перевищують значення інших. Тому складовими, що містять функції $\tilde{f}_{m-k}\left(0,K-r-1\right)$ при $m\neq k$, як складовими вищого порядку малості, можемо знехтувати:

$$\varepsilon\left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh)\right]=-\frac{1}{K}\left[\left(2N_1+1\right)B_k^{(\xi\eta)}\left(jh\right)+B_k^{(\xi\eta)}\left(0\right)\sum_{l\in\bar{M}}e^{il\frac{2\pi}{M+1}j}+\right.$$

$$+\sum_{r=1}^{K-1}\left(1-\frac{r}{K}\right)\left[B_k^{(\xi\eta)}\left[(j-r)h\right]e^{ik\frac{2\pi}{M+1}j}+B_k^{(\xi\eta)}\left[(r+j)h\right]e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}r}\right]\tilde{h}(N_1,r)+$$

$$+B_k^{(\eta\xi)}(rh)\tilde{h}_k^{/}(N_1,j,r)+B_k^{(\xi\eta)}(rh)\tilde{\tilde{h}}_k^{/}(N_1,j,r)\Bigg]. \qquad (8)$$

Результати проведеного вище аналізу сформуємо у вигляді теореми.

Теорема 1. *Дискретна компонентна оцінка (1) взаємокореляційної функції (6) у разі виконання умов*

$$\lim_{|u|\to\infty}B_k^{(\xi\eta)}(u)=0\,,\quad k=\overline{-N_2,N_2}\,, \qquad (9)$$

а також $M\ge 2N_1$ *і* $M\ge N_2+2N_1$ *є асимптотично незміщеною, тобто* $\varepsilon\left[\hat{b}_{\xi\eta}(nh,jh)\right]\to 0$*, якщо* $K\to\infty$*, а для скінченних* K *зміщення оцінки (1) дорівнює*

$$\varepsilon\left[\hat{b}_{\xi\eta}(nh,jh)\right]=\sum_{k=-N_2}^{N_2}\varepsilon\left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh)\right]e^{ik\frac{2\pi}{M+1}n}\,,$$

де величина $\varepsilon\left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh)\right]$ *в першому наближенні визначається формулою (8).*

Якщо $k=0$, то множина $\overline{M}$ порожня, тому для середнього значення зміщення оцінки взаємокореляційної функції (1) маємо:

$$\varepsilon_{\text{ñâð}}\left[\hat{b}_{\xi\eta}(nh,jh)\right]=-\frac{1}{K}\left[\begin{array}{l}(2N_1+1)B_0^{(\xi\eta)}(jh)+\\ +\sum\limits_{r=1}^{K-1}\left(1-\dfrac{r}{K}\right)\left[\begin{array}{l}B_0^{(\xi\eta)}\left[(r-j)h\right]+\\ +B_0^{(\xi\eta)}\left[(r+j)h\right]\end{array}\right]\end{array}\right]\left(1+2\sum_{l=1}^{N_1}\cos l\frac{2\pi}{N+1}r\right)\Bigg].$$

У границі $h\to 0$, $\theta=const$, формула визначатиме зміщення оцінок взаємокореляційних компонентів при неперервному оцінюванні. Переходячи до асимптотики $N_1\to 0$, отримаємо співвідношення, які визначатимуть зміщення оцінок кореляційних компонентів, що обчислюються за формулою

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{T}\int_0^T\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)e^{-ik\omega_0 t}dt\,,$$

де $\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)$ – когерентна оцінка [5].

Перейдемо тепер до аналізу дисперсії оцінки взаємокореляційної функції (1). При цьому будемо вважати, що оцінка математичного сподівання є незміщеною $(M\ge 2N_1)$. Оцінка (3) в такому випадку набуває вигляду

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh)=\frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}\left[\overset{\circ}{\xi}(nh)\overset{\circ}{\eta}\left[(n+j)h\right]e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{K}\sum_{p=0}^{K-1}\left[\overset{\circ}{\eta}\left[(p+j)h\right]\overset{\circ}{\xi}(ph)\tilde{g}_k(N_1,n,p)+\overset{\circ}{\xi}(nh)\overset{\circ}{\eta}(ph)\tilde{p}_k^{/}(N_1,n,p)\right]\right].$$

На основі (1) отримуємо

$$D\left[\hat{b}_{\xi\eta}(nh,jh)\right]=E\left|\sum_{l=-N_2}^{N_2}\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(jh)e^{il\frac{2\pi}{M+1}n}\right|^2=\sum_{r=-2N_2}^{2N_2}\alpha_r(jh)e^{ir\frac{2\pi}{M+1}n}=$$

$$=\alpha_0(jh)+\sum_{r=1}^{2N_2}\left[\alpha_r^c(jh)\cos r\frac{2\pi}{M+1}n+\alpha_r^s(jh)\sin r\frac{2\pi}{M+1}n\right], \qquad (10)$$

де

$$\alpha_r(jh)=\frac{1}{2}\left[\alpha_r^c(jh)-i\alpha_r^s(jh)\right]=\begin{cases}\sum\limits_{k=-N_2-r}^{N_2}R_{r+k,k}^{(\xi\eta)}(jh), & r\le 0,\\ \sum\limits_{k=-N_2}^{N_2-r}R_{r+k,k}^{(\xi\eta)}(jh), & r>0,\end{cases} \qquad (11)$$

а також $R_{lk}^{(\xi\eta)}(jh)=E\,\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(jh)\bar{\hat{B}}_k^{(\xi\eta)}(jh)-E\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(u)E\bar{\hat{B}}_k^{(\xi\eta)}(jh)$. Для кореляції $R_{r+k,k}(jh)$ в першому наближенні знаходимо

$$R_{r+k,k}^{(\xi\eta)}(jh)=\frac{1}{K^2}\sum_{p,q=0}^{K-1}b_\zeta\left[ph,(q-p)h,jh\right]e^{ik\frac{2\pi}{M+1}(q-p)}e^{-ir\frac{2\pi}{M+1}p},$$

де для гауссових ПНВП

$$b_\zeta\left[ph,(q-p)h,jh\right]=b_\xi\left[ph,(q-p)h\right]b_\eta\left[(p+j)h,(q-p)h\right]+$$

$$+b_{\xi\eta}\left[ph,(q-p)h+jh\right]b_{\xi\eta}\left[(p+j)h,(q-p)h\right]. \qquad (12)$$

Враховуючи властивість $b_\zeta\left[ph,(q-p)h,jh\right]=b_\zeta\left[qh,(q-p)h,jh\right]$, після перетворень отримуємо

$$R_{r+k,k}^{(\xi\eta)}(jh)=\frac{1}{K^2}\sum_{p=0}^{K-1}\sum_{m=-p}^{K-p-1}b_\zeta(ph,mh,jh)e^{i\frac{2\pi}{M+1}(km-rp)}=$$

$$=\frac{1}{K^2}\left[\sum_{p=0}^{K-1}b_\zeta(ph,0,jh)e^{-ir\frac{2\pi}{M+1}p}+\sum_{m=1}^{K-1}\left[\begin{matrix}e^{-i(k+r)\frac{2\pi}{M+1}m}+\\+e^{ik\frac{2\pi}{M+1}m}\end{matrix}\right]\sum_{p=0}^{K-m-1}b_\zeta(ph,mh,jh)e^{-ir\frac{2\pi}{M+1}n}\right]. \qquad (13)$$

Функція $b_\zeta(ph,mh,jh)$ є періодичною за аргументом ph, тому може бути подана у вигляді ряду

$$b_\zeta(ph,mh,jh)=\sum_{q=-2N_2}^{2N_2}\tilde{B}_q(mh,jh)e^{iq\frac{2\pi}{M+1}p}.$$

Підставимо його у вираз (13) і просумуємо по *p*:

$$R_{r+k,k}^{(\xi\eta)}(jh)=\frac{1}{K}\sum_{q=-2N_2}^{2N_2}\left[\tilde{B}_q(0,jh)\,\tilde{f}_{q-r}(0,K-1)+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{K-1}\tilde{B}_q(mh,jh)\,\tilde{f}_{q-r}(0,K-m-1)\left[e^{-i(k+r)\frac{2\pi}{M+1}m}+e^{ik\frac{2\pi}{M+1}m}\right]\right].$$

Нехтуючи складовими, для котрих $q-r\ne s(M+1)$, $s\in\mathbb{Z}$, для коефіцієнтів $\alpha_r(jh)$ маємо:

$$\alpha_r(jh)=\frac{1}{K}\left[\sum_{s\in A}\left(2N_2-|r|+1\right)\tilde{B}_{r+s(M+1)}(0,jh)+\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{K-1}\left(1-\frac{m}{K}\right)\tilde{B}_{r+s(M+1)}\left(mh, jh\right)\sum_{k\in Q}\left[e^{-i(k+r)\frac{2\pi}{M+1}m}+e^{ik\frac{2\pi}{M+1}m}\right]\Bigg],$$

де $Q=\{-N_2-r,...,N_2\}$ для $r<0$ і $Q=\{-N_2,...,N_2-r\}$ для $r\geq 0$. Множина A є множиною цілих чисел s, при яких $\left|r+s\left(M+1\right)\right|\leq 2N_2+1$. Якщо $M\geq 4N_2$, то ця множина складається з одного елемента $s=0$. У цьому випадку накладання відсутнє і

$$\alpha_r\left(jh\right)=\frac{1}{K}\left[\left(2N_2-|r|+1\right)\tilde{B}_r\left(0, jh\right)+\sum_{m=1}^{K-1}\left(1-\frac{m}{K}\right)\tilde{B}_r\left(mh, jh\right)\sum_{k\in Q}\begin{bmatrix}e^{-i(k+r)\frac{2\pi}{M+1}m}+\\+e^{ik\frac{2\pi}{M+1}m}\end{bmatrix}\right]. \quad (14)$$

Звідси, враховуючи $\tilde{B}_r\left(mh, jh\right)=\frac{1}{2}\left[\tilde{B}_r^c\left(mh, jh\right)-i\tilde{B}_r^s\left(mh, jh\right)\right]$, знаходимо

$$\alpha_r^c\left(jh\right)=\frac{1}{K}\Bigg[\left(2N_2-|r|+1\right)\tilde{B}_r^c\left(0, jh\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{K-1}\left(1-\frac{m}{K}\right)\Bigg[\tilde{B}_r^c\left(mh, jh\right)\sum_{k\in Q}\left[\cos\left(k+r\right)\frac{2\pi}{M+1}m+\cos k\frac{2\pi}{M+1}m\right]-$$

$$-\tilde{B}_r^s\left(mh, jh\right)\sum_{k\in Q}\left[\sin\left(k+r\right)\frac{2\pi}{M+1}m-\sin k\frac{2\pi}{M+1}m\right]\Bigg]\Bigg], \quad (15)$$

$$\alpha_r^s\left(jh\right)=\frac{1}{K}\Bigg[\left(2N_2-|r|+1\right)\tilde{B}_r^s\left(0, jh\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{K-1}\left(1-\frac{m}{K}\right)\Bigg[\tilde{B}_r^c\left(mh, jh\right)\sum_{k\in Q}\left[\sin\left(k+r\right)\frac{2\pi}{M+1}m-\sin k\frac{2\pi}{M+1}m\right]+$$

$$+\tilde{B}_r^s\left(mh, jh\right)\sum_{k\in Q}\left[\cos\left(k+r\right)\frac{2\pi}{M+1}m+\cos k\frac{2\pi}{M+1}m\right]\Bigg]\Bigg]. \quad (16)$$

Нульовий коефіцієнт $\alpha_0\left(jh\right)$, як випливає з (11) і (13), визначається тільки дисперсіями оцінок взаємокореляційних компонентів:

$$\alpha_0\left(jh\right)=\sum_{k=-N_2}^{N_2}R_{k,k}^{(\xi\eta)}\left(jh\right)=D\left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}\left(jh\right)\right]+2\sum_{k=1}^{N_2}D\left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}\left(jh\right)\right].$$

Підставляючи до цього співвідношення формули (3.3.7) і (3.3.10), що визначають величини $D\left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}\left(jh\right)\right]$ і $D\left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}\left(jh\right)\right]$, отримуємо вираз:

$$\alpha_0\left(jh\right)=\frac{1}{K}\left[\left(2N_2+1\right)\tilde{B}_0\left(0, jh\right)+2\sum_{m=1}^{K-1}\left(1-\frac{m}{K}\right)\tilde{B}_0\left(mh, jh\right)\left(1+2\sum_{k=1}^{N_2}\cos k\frac{2\pi}{M+1}m\right)\right], \quad (17)$$

який збігається з (14), якщо $r=0$.

Для гауссових ПНВП, виходячи з (12), легко знаходимо співвідношення, які виражають величини $\tilde{B}_0\left(mh, jh\right)$ і $\tilde{B}_k\left(mh, jh\right)$ через кореляційні компоненти авто- та взаємокореляційної функцій сигналів [5]:

$$\tilde{B}_r\left(u_1,u\right)=\begin{cases}\sum\limits_{q=-N_2-r}^{N_2}\begin{bmatrix}B_{q+r}^{(\xi)}\left(u_1\right)\overline{B}_q^{(\eta)}\left(u_1\right)e^{-iq\omega_0u}+\\+B_{q+r}^{(\xi\eta)}\left(u_1+u\right)\overline{B}_q^{(\xi\eta)}\left(u-u_1\right)e^{-iq\omega_0u_1}\end{bmatrix}, r\le 0,\\ \sum\limits_{q=-N_2}^{N_2-r}\begin{bmatrix}B_{q+r}^{(\xi)}\left(u_1\right)\overline{B}_q^{(\eta)}\left(u_1\right)e^{-iq\omega_0u}+\\+B_{q+r}^{(\xi\eta)}\left(u_1+u\right)\overline{B}_q^{(\xi\eta)}\left(u-u_1\right)e^{-iq\omega_0u_1}\end{bmatrix}, r>0.\end{cases} \tag{18}$$

На основі проведеного аналізу доходимо висновку, що справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Дискретна компонентна оцінка взаємокореляційної функції гауссових сигналів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ у разі виконання умови (9) є слушною, тобто $D\left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh)\right]\to 0$, якщо $K\to\infty$, а її дисперсія при скінченних K і $M\ge 4N_2+1$ в першому наближенні визначається формулами (10) і (14)–(18).*

Якщо $h\to 0$, $\theta=\text{const}$, то з (14)–(17) отримаємо формулу для коефіцієнтів Фур'є дисперсії неперервної оцінки кореляційної функції, а звідси при $N_2\to\infty$ маємо

$$\alpha_r(u)=\frac{1}{N}\left[\tilde{B}_r(0,u)+2\sum_{n=1}^{K-1}\left(1-\frac{n}{K}\right)\tilde{B}_r(nT,u)\right].$$

Зауважимо, що з теореми 1 випливає, що при $h\le\dfrac{T}{2N_2+1}$ і $h\le\dfrac{T}{2N_1+N_2+1}$ оцінка

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t,jh)=\sum_{k=-N_2}^{N_2}e^{ik\omega_0t}\left[\frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}\begin{bmatrix}\xi(nh)-\\-\hat{m}_\xi(nh)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta\left[(n+j)h\right]-\\-\hat{m}_\eta\left[(n+j)h\right]\end{bmatrix}e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n}\right] \tag{19}$$

є незміщеною оцінкою взаємокореляційної функції для всіх $t\in[0,T]$. Доведемо, що справедливою є теорема.

Теорема 3. *Співвідношення (19) збігається з інтерполяційною формулою Котельникова–Шеннона, записаної з використанням когерентної оцінки взаємокореляційної функції, тобто*

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t,jh)=\sum_{r=0}^{2N_2}\hat{b}_{\xi\eta}(rh,jh)\varphi_r(t), \tag{20}$$

де

$$\varphi_r(t)=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{h}(t-rh)\right]}{(2N_1+1)\sin\left[\frac{\pi}{h}(t-rh)\right]},$$

$$\hat{b}_{\xi\eta}(rh,jh)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\begin{bmatrix}\left[\xi\left[\left(r+n(M+1)\right)h\right]-\hat{m}_\xi\left[\left(r+n(M+1)\right)h\right]\right]\times\\ \times\left[\eta\left[\left(r+j+n(M+1)\right)h\right]-\hat{m}_\eta\left[\left(r+j+n(M+1)\right)h\right]\right]\end{bmatrix}, \tag{21}$$

а для гауссових ПКВП у разі виконання умов (9) оцінка (20) є слушною оцінкою взаємокореляційної функції двох ПНВП.

Оскільки

$$\sum_{k=-N_2}^{N_2} e^{ik\omega_0(t-nh)} = \frac{\sin(2N_1+1)\frac{\pi}{T}(t-nh)}{\sin\frac{\pi}{T}(t-nh)},$$

то

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t, jh) = \frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}\begin{bmatrix}\xi(nh)- \\ -\hat{m}_\xi(nh)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta\left[(n+j)h\right]- \\ -\hat{m}_\eta\left[(n+j)h\right]\end{bmatrix}\frac{\sin(2N_1+1)\frac{\pi}{T}(t-nh)}{\sin\frac{\pi}{T}(t-nh)}.$$

Розіб'ємо цю суму на підсуми, які формуються в межах інтервалу, що дорівнює періоду корельованості $T=(M+1)h$, при цьому будемо вважати, що $K=N(M+1)$:

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t, jh) = \frac{1}{K}\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{k=p(2N_2+1)}^{(p+1)(2N_2+1)-1}\begin{bmatrix}\xi(kh)- \\ -\hat{m}_\xi(kh)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta\left[(k+j)h\right]- \\ -\hat{m}_\eta\left[(k+j)h\right]\end{bmatrix}\frac{\sin(2N_2+1)\frac{\pi}{T}(t-kh)}{\sin\frac{\pi}{T}(t-kh)}.$$

Після введення нового індексу сумування $r=k-p(2N_2+1)$ отримуємо:

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t, jh) = \frac{1}{K}\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{2N_2}\begin{bmatrix}\xi\left[\left(r+p(2N_2+1)\right)h\right]- \\ -\hat{m}_\xi\left[\left(r+p(2N_2+1)\right)h\right]\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\eta\left[\left(r+p(2N_2+1)\right)h\right]- \\ -\hat{m}_\eta\left[\left(r+p(2N_2+1)\right)h\right]\end{bmatrix}\frac{\sin(2N_2+1)\frac{\pi}{T}\left(t-rh-p(2N_2+1)h\right)}{\sin\frac{\pi}{T}\left(t-rh-p(2N_2+1)h\right)}.$$

Якщо $M=2N_2$, то

$$\sin(2N_2+1)\frac{\pi}{T}\left(t-rh-p(2N_2+1)h\right)=$$

$$=\sin\frac{\pi}{h}(t-2h)\cos p(2N_2+1)\pi = \sin\frac{\pi}{h}(t-rh)\cos p\pi,$$

$$\sin\frac{\pi}{T}\left(t-rh-p(2N_2+1)h\right)=\sin\frac{\pi}{T}(t-rh)\cos p\pi.$$

А тоді

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t, jh) = \sum_{r=0}^{2N_2}\hat{b}_{\xi\eta}(rh, jh)\varphi_r(t), \tag{22}$$

де $\hat{b}_{\xi\eta}(rh, jh)$ – когерентна оцінка (21).

Слушність оцінки (20) випливає зі слушності когерентної оцінки (22).

Отримані вище співвідношення уможливлюють при заданих апроксимаційних виразах взаємокореляційних компонентів ПКВП обчислення числових значень характеристик оцінок математичного сподівання і кореляційної функції ПКВП при певному кроці дискретизації h та величині вибірки K і на цій основі проведення обґрунтованого вибору цих параметрів обробки. Як і в неперервному випадку, перевага за збіжністю компонентних оцінок, якщо інтервал дискретизації задовольняє необхідні вимоги (умова відсутності ефектів накладання першого й другого роду), більш суттєво буде виявлятися при невеликій кількості коефіцієнтів Фур'є характеристик, що обчислюються, і швидкому загасанні кореляційних зв'язків.

1. *Least* Squares Method in the Statistic Analysis of Periodically Correlated Random Processes / I. Javorskyj, R. Yuzefovych, I. Kravets, Z. Zakrzewski // Radioelectronics and Communication Systems. – 2011. – **54**, № 1. – P. 45–59.
2. *Методи* вібраційної діагностики початкових стадій пошкодження обертових систем / І. М. Яворський, П. П. Драбин, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 2. – С. 134–140.
3. *Методи* та засоби ранньої діагностики підшипникових вузлів турбоагрегатів ТЕС / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець та ін. // Енергетика та електрифікація. – 2012. – № 8. – С. 58–67.
4. *Antoni I.* Cyclostationarity by examples // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2009. – **23**. – P. 987–1036.
5. *Взаємокореляційний* когерентний аналіз періодично корельованих випадкових сигналів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько // Відбір і обробка інформації. – 2012. – № 36(112). – С. 5–13.
6. *Компонентний* взаємокореля-ційний аналіз періодично корельованих випадкових сигналів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько // Відбір і обробка інформації. – 2012. – № 37(113). – С. 10–18.
7. *Coherent* covariance analysis for periodically correlated random processes / I. Javorskyj, I. Isayev, Z. Zakrzewski, S. P. Brooks // Signal Processing. – 2007. – **87**. – P. 13–32.
8. *Component* covariance analysis for periodically correlated random processes / I. Javorskyj, I. Isayev, J. Majewski, R. Yuzefovych // Signal Processing. – 2010. – **90**. – P. 1083–1102.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка
НАН України, Львів;
Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету,
Бидгощ, Польща

Одержано
09.01.2013